АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 2, с. 230–237

УДК 534.231.1

СЛАБОРАСХОДЯЩИЕСЯ АКУСТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ В ПЛАВНОНЕОДНОРОДНЫХ ПО ТРАССЕ ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

© 1997 г. Ю. В. Петухов

Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
603600 Н. Новгород, Большая Печерская, 25

Поступила в редакцию 04.10.95 г.

Получено соотношение, ограничивающее максимально возможный диапазон изменения положения гладкого экстремума в угловой зависимости длины цикла луча с расстоянием, выполнение которого необходимо для обусловленного этим экстремумом существования слаборасходящегося акустического пучка на определенных дистанциях в плавнонеоднородном по трассе океаническом волноводе.

Как известно [1–8], стратификация скорости звука в водном слое океана может при определенных условиях приводить к формированию и распространению в океанических волноводах слаборасходящихся акустических пучков, несмотря на ненаправленное излучение акустических сигналов. Выполненные в [1–5] исследования показали, что слаборасходящиеся акустические пучки формируются около таких лучей, которым в угловой зависимости их длины цикла соответствуют гладкие экстремумы. Естественно, что сделанные в [1–5] выводы справедливы в диапазоне частот, для которого реализуются условия многомодового режима распространения акустических сигналов в океанических волноводах. Тем не менее даже при выполнении этих условий [6–8], а тем более при маломодовом режиме распространения [6, 7], эффективная ширина слаборасходящихся акустических пучков, а следовательно, и темп геометрического расхождения их волнового фронта с расстоянием могут существенно зависеть от частоты излучения, в результате чего возможны эффекты [6–9], не описываемые в рамках геометроакустического приближения, использованного в [1–5].

В [5] отмечалось, что слаборасходящиеся акустические пучки представляют наибольший интерес при решении задач, связанных с использованием закономерностей дальнего распространения звуковых сигналов в океане. На дальнее же распространение слаборасходящихся акустических пучков будут влиять не только дифракционные эффекты [6–8], но и изменения стратификации скорости звука в водном слое океана с расстоянием [5], которые могут приводить к существенному увеличению расфокусировки таких пучков по трассе океанического волновода. Однако, как показано впервые в [5], в конкретных – реальных – ситуациях, где не происходит качественной перестройки подводного звукового канала, несмотря на то, что в целом угловые зависимости длины циклов лучей на различных участках неоднородного по трассе океанического волновода отличаются достаточно сильно друг от друга, положения отдельных экстремумов в этих зависимостях изменяются с расстоянием весьма незначительно, вследствие чего дополнительная расфокусировка слаборасходящихся акустических пучков мала, и они сохраняются на соответствующих значительных дистанциях.

Следует отметить, что в [5] тем не менее не получено какого-либо количественного соотношения, которое позволяло бы прогнозировать возможность сохранения слаборасходящегося акустического пучка в неоднородном по трассе океаническом волноводе. Именно поэтому настоящая работа посвящена установлению ограничения на диапазон изменения положения экстремума в угловой зависимости длины цикла лучей с расстоянием, при выполнении которого возможно сохранение слабой расходимости соответствующего акустического пучка в плавно-неоднородном по трассе океаническом волноводе.

Для решения поставленной задачи рассмотрим сначала однородный по трассе океанический волновод с определенной зависимостью показателя преломления акустических волн $n(z)$ от глубины $0 \le z \le H$, соответствующей подводному звуковому каналу, ось которого расположена на глубине $z = z_0$; здесь H – глубина водного слоя океана, граничащего с однородным дном. Такой океанический волновод характеризуется определенной

зависимостью длины цикла лучей $D(\beta)$ от параметра $\beta = \cos\chi$ [10]:

$$D(\beta) = 2\beta\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{\sqrt{n^2(z)-\beta^2}}. \quad (1)$$

Здесь χ – угол скольжения луча на оси канала, а пределы интегрирования в (1) могут принимать следующие значения:

$$\begin{aligned} &z_1 = z_в,\ z_2 = z_н,\ n(H) \gtrless n(0);\\ &z_1 = 0,\ z_2 = z_н,\ n(H) < n(0);\\ &z_1 = z_в,\ z_2 = H,\ n(H) > n(0), \end{aligned} \quad (2)$$

где $z_в$, $z_н$ – соответственно верхние и нижние горизонты поворота лучей, определяемые из уравнения $n(z) = \beta$. Из (2) видно, что исключаются из рассмотрения лишь лучи, взаимодействующие со свободной поверхностью и дном океана, которым отвечают значения $z_1 = 0$, $z_2 = H$. Последнее обусловлено тем, что, как отмечалось в [5], для таких лучей функция $D(\beta)$ не имеет экстремумов в соответствующем диапазоне изменения параметра $\beta : \beta < n(H)$ при $n(H) < n(0)$, – отвечающем открытому к поверхности подводному звуковому каналу; $\beta < n(0)$ при $n(0) < n(H)$, – отвечающем открытому ко дну подводному звуковому каналу.

Предположим теперь, что значение $\beta = \beta_c$ отвечает некоторому гладкому экстремуму функции $D(\beta)$:

$$\left.\frac{dD}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_c} = 0, \quad (3)$$

расположенному в каком-либо из трех диапазонов изменения параметра β:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} n(0) < \beta \le n(z_s),\ n(H) < n(0),\\ n(H) < \beta \le n(z_s),\ n(H) > n(0); \end{cases}\\ &n(H) < \beta \le n(0),\ n(H) < n(0);\\ &n(0) < \beta \le n(H),\ n(H) > n(0), \end{aligned} \quad (4)$$

соответствующих определенным типам лучей: рефрагированным, взаимодействующим со свободной поверхностью или дном океана. Здесь $z_s < z_0$ – глубина погружения источника.

Определим диапазон изменения $\Delta\beta = \delta_c$ параметра β, отвечающий лучам, формирующим (вносящим основной вклад) слаборасходящийся пучок лучей и группирующимся около соответствующего особого луча с $\beta = \beta_c$. Естественно, что для формирования узкого слаборасходящегося пучка, который бы заметно выделялся на общем фоне всех лучей соответствующего – допустимого – диапазона изменения $\Delta\beta = \delta_d$ параметра β

$$\delta_d = \begin{cases} n(z_s) - n(0),\ n(H) < n(0),\\ n(z_s) - n(H),\ n(H) > n(0),\\ |n(H) - n(0)|,\ n(H) \gtrless n(0), \end{cases} \quad (5)$$

необходимо потребовать выполнения следующего неравенства:

$$\delta_c/\delta_d \ll 1. \quad (6)$$

Однако соотношение (6) не решает поставленной задачи, поскольку формулирует лишь необходимое, но не достаточное условие, которое не позволяет определять зависимость δ_c от пройденного пучком горизонтального расстояния r. Требуемое же соотношение можно получить, если сформулировать такое условие, которое бы позволяло определять, какие лучи из соответствующего им диапазона $0 \le \Delta\beta \le \delta_c$ будут менее всего расфокусировать (дефокусировать) пучок с центром на луче $\beta = \beta_c$ по мере его распространения.

Очевидно, что таким условием является условие малости величины $\Delta r(\beta_c, \beta)$, характеризующей разность проходимых лучами с параметрами β_c и $\beta = \beta_c + \Delta\beta$ горизонтальных расстояний $r(\beta_c)$ и $r(\beta)$ при целом числе циклов $m = 1, 2, \ldots$, по сравнению с длиной полуцикла луча с $\beta = \beta_c$. Это условие можно записать в виде следующего неравенства:

$$|\Delta r| = m|D(\beta) - D(\beta_c)| \ll D(\beta_c)/2. \quad (7)$$

В самом деле, при выполнении вместо (7) равенства $\Delta r(\beta, \beta_c) = D(\beta_c)/2$ верхняя точка поворота $z_в(\beta)$ луча с параметром $\beta = \beta_c + \Delta\beta$ при определенном значении $m = m_c$ будет находиться на том же расстоянии, что и нижняя точка поворота $z_н(\beta_c)$ центрального луча с $\beta = \beta_c$, в результате чего ширина соответствующего пучка лучей с конкретно заданным диапазоном $\Delta\beta$ достигнет максимально возможной величины. Поэтому в такой ситуации можно говорить о максимальной друг относительно друга дефокусировке лучей с параметрами $\beta = \beta_c$ и $\beta = \beta_c + \Delta\beta$.

Если теперь воспользоваться соотношениями (3), (6) и разложением вблизи значения $\beta = \beta_c < n(z_s)$ ($\chi_c = \arccos[\beta_c/n(z_s)] \ne 0$) функции $D(\beta)$ в ряд по $\Delta\beta$ с точностью до величины второго порядка малости включительно:

$$D(\beta) \approx D(\beta_c) + \frac{1}{2}\left.\left(\frac{d^2D}{d\beta^2}\right)\right|_{\beta=\beta_c}(\Delta\beta)^2, \quad (8)$$

то неравенство (7) можно представить в следующем виде:

$$|\Delta\beta| \ll \sqrt{D(\beta_c)/m\left|\left.\left(\frac{d^2D}{d\beta^2}\right)\right|_{\beta=\beta_c}\right|}. \quad (9)$$

Учитывая же, что малая величина $\Delta\beta$ с точностью до первого порядка малости по величине $\Delta\chi_s$, отвечающей соответствующему диапазону изменения угла скольжения лучей на горизонте источника χ_s, выражается, с использованием закона

Снеллиуса $\beta = n(z_s)\cos\chi_s$, приближенным равенством

$$\Delta\beta \approx -\Delta\chi_s n(z_s)\sin\chi_s, \tag{10}$$

а уравнение (3) при $\chi_s = \chi_c \neq 0$ равносильно уравнению

$$\left(\frac{dD}{d\chi_s}\right)\bigg|_{\chi_s=\chi_c} = 0, \tag{11}$$

из (9) находим следующее неравенство:

$$|\Delta\chi_s| \ll \sqrt{D(\chi_c)/m\left|\left(\frac{d^2D}{d\chi_s^2}\right)\bigg|_{\chi_s=\chi_c}\right|}. \tag{12}$$

При $\chi_s = \chi_c = 0$ уравнение (3), при условии выполнения (11), преобразуется к отличающемуся от (11) уравнению следующего вида:

$$\left(\frac{1}{\sin\chi_s}\frac{dD}{d\chi_s}\right)\bigg|_{\chi_s=0} \propto \left(\frac{d^2D}{d\chi_s^2}\right)\bigg|_{\chi_s=0} = 0. \tag{13}$$

Поскольку же справедливо тождество

$$\frac{d^2D}{d\beta^2}(\Delta\beta)^2 \equiv \frac{d^2D}{d\chi_s^2} - \mathrm{ctg}\chi_s\frac{dD}{d\chi_s}, \tag{14}$$

то с учетом уравнений (11) и (13) из него следует, что второе слагаемое в (8) обращается в нуль, и поэтому соотношение (12) необходимо модифицировать. В такой ситуации при преобразовании неравенства (7) необходимо воспользоваться разложением функции $D(\beta)$ в ряд по $\Delta\beta$ с точностью до третьего порядка малости включительно:

$$D(\beta) \approx D(\beta_c) + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3D}{d\beta^3}\right)\bigg|_{\beta=\beta_c}(\Delta\beta)^3, \tag{15}$$

после чего, с использованием (10), получим следующее соотношение:

$$|\Delta\chi_s| \ll$$

$$\ll \left\{\frac{3D(\chi_s)}{m}\Big/\left|\left[\frac{d^3D}{d\chi_s^3} - \frac{3}{\chi_s}\left(\frac{d^2D}{d\chi_s^2} - \frac{1}{\chi_s}\frac{dD}{d\chi_s}\right)\right]\right|\bigg|_{\chi_s=0}\right\}^{1/3}. \tag{16}$$

Если же предположить, что при $\chi_s = \chi_c = 0$ справедливо уравнение (11) и, в отличие от (3), неравенство

$$\left(\frac{dD}{d\beta}\right)\bigg|_{\beta=\beta_c=n(z_s)} \neq 0, \tag{17}$$

при разложении функции $D(\beta)$ в ряд можно снова воспользоваться выражением (8), поскольку

$$\left(\frac{dD}{d\beta}\right)\bigg|_{\beta=\beta_c}\Delta\beta = \left(\frac{dD}{d\chi_s}\right)\bigg|_{\chi_s=\chi_c}\Delta\chi_s = 0, \tag{17'}$$

в результате чего получим совпадающее с (12) соотношение.

Следовательно, при выполнении равенства (11) для значений $\chi_s = \chi_c \gtrless 0$, которым соответствуют гладкие экстремумы функции $D(\chi_s)$, диапазон изменения угла скольжения лучей при выходе их из источника $\Delta\chi_s$, формирующих соответствующий слаборасходящийся пучок в однородном по трассе океаническом волноводе, должен удовлетворять условию (12); в частном же случае, т.е. при выполнении равенства (13) и $\chi_s = \chi_c = 0$, этот диапазон должен удовлетворять условию (16).

Таким образом, выполнение условия (12) или (16) является необходимым и достаточным для сохранения на определенных расстояниях в однородном по трассе океаническом волноводе слабой расходимости узкого акустического пучка, сформированного лучами с заданным диапазоном изменения угла скольжения на горизонте источника.

Прежде чем приступить к получению аналогичного (7) условия сохранения слабой геометрической расходимости акустического пучка в плавнонеоднородном по трассе океаническом волноводе и следующих из этого условия аналогичных (12), (16) соотношений, преобразуем (7) к виду, более удобному для соответствующего обобщения. С этой целью воспользуемся сначала результатами и выводами, следующими из строгого модового представления для поля в однородных по трассе океанических волноводах и соответствующего ему ВКБ приближения.

Как известно [10], при возбуждении в волноводе определенного количества мод $L(\omega)$, зависящего от частоты излучения ω, с номерами $1 \le l \le L(\omega)$ и горизонтальными волновыми числами $k_l = k_l(\omega)$, наиболее крупномасштабная интерференционная структура поля в горизонтальном направлении будет характеризоваться пространственными периодами интерференции соседних мод

$$R_{l,l+1} = 2\pi/(k_l - k_{l+1}). \tag{18}$$

С использованием (18) для двух пар мод с номерами $l, l+1$ и $n, n+1$ ($l \neq n$) можно получить выражение для пространственного периода переформирования соответствующей крупномасштабной интерференционной структуры поля в горизонтальном направлении

$$R_g(l,n) = R_{l,l+1}R_{n,n+1}/|R_{l,l+1} - R_{n,n+1}|, \tag{19}$$

с очевидностью следующее [6] из определения пространственных частот интерференционных биений $\Omega(l, n) = 2\pi/R_g(l, n)$ интенсивности акустического поля $J(r)$ в зависимости от горизонтального расстояния.

В приближении ВКБ горизонтальное волновое число моды выражается через угол скольжения χ_l бриллюэновского луча на оси канала: $k_l = k_0\beta_l$, $\beta_l = \cos\chi_l$, $k_0 = \omega/c_0$, c_0 – значение скорости звука на горизонте $z = z_0$; при этом значения параметра β_l определяются из дисперсионного уравнения следующего вида [10]:

$$k_0\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{n^2(z)-\beta_l^2}\,dz = \pi(l-\nu), \tag{20}$$

где, в соответствии с (2) и предположением об абсолютной жесткости дна,

$$\nu = \begin{cases} 1/4, & z_1 = 0,\ z_2 = z_н(\beta_l); \\ 1/2, & z_1 = z_в(\beta_l),\ z_2 = z_н(\beta_l); \\ -1/4, & z_1 = z_в(\beta_l),\ z_2 = H. \end{cases} \tag{21}$$

Поскольку при $l \gg 1$ разностное выражение (18) можно в приближении ВКБ заменить дифференциальным равенством

$$R_{l,l+1} = -\frac{2\pi}{k_0}\Big/\frac{d\beta_l}{dl}, \tag{22}$$

то с учетом определения для $D(\beta)$ (1) и следующей из дисперсионного уравнения (20) величины производной

$$\frac{d\beta_l}{dl} = -\frac{2\pi}{k_0 D(\beta_l)} \tag{23}$$

из (22) найдем приближенное соотношение между двумя важнейшими характеристиками интерференционной структуры поля в волноводе:

$$R_{l,l+1} = D(\beta_l). \tag{24}$$

С использованием (24) и (19) получаем весьма полезное для дальнейшего анализа выражение

$$R_g(l,n) = D(\beta_l)D(\beta_n)/|D(\beta_l)-D(\beta_n)|. \tag{25}$$

Предположим далее, что параметр β_l изменяется непрерывно, т.е. пренебрежем дискретностью изменения угла скольжения бриллюэновской волны; тогда из (25) в соответствующем этому предположению геометроакустическом приближении получим следующее выражение для периода переформирования интерференционной структуры поля:

$$R_g(\beta_c,\beta) = D(\beta_c)D(\beta)/|D(\beta_c)-D(\beta)|, \tag{26}$$

отвечающего лучам с различающимися значениями параметра β, в данном случае с $\beta = \beta_c$ и $\beta = \beta_c + \Delta\beta$, представляющими основной интерес.

Покажем теперь с использованием (26), что условие (7) равносильно условию малости пройденного пучком горизонтального расстояния по сравнению с половинной величиной пространственного периода переформирования (26), определенного для заданного диапазона $\Delta\beta$ изменения параметра β лучей, формирующих этот пучок:

$$r \ll \frac{1}{2}R_g(\beta_c,\beta). \tag{27}$$

В этом легко убедиться, подставив в (27) величины $r = mD(\beta_c)$ и $R_g(\beta_c,\beta)$ (26), поскольку в таком случае автоматически получаем совпадающее с (7) неравенство.

Привлекательность записи условия (7) в виде (27) обусловлена простотой обобщения последнего на плавнонеоднородные по трассе океанические волноводы, поскольку при таком подходе достаточно лишь получить соответствующее выражение для $R_g(\beta_c,\beta)$. Именно поэтому далее и остановимся на определении $R_g(\beta_c,\beta)$, а также выводе аналогичных (12), (16) соотношений для плавнонеоднородного по трассе океанического волновода с соответствующей зависимостью $n(z, r)$.

В адиабатическом приближении (невзаимодействующих мод) для плавнонеоднородного по трассе океанического волновода аналогичная $R_{l,l+1}$ (18) величина, характеризующая теперь уже изменяющийся с расстоянием пространственный масштаб интерференционной структуры поля, будет определяться следующим выражением:

$$R_{l,l+1} = 2\pi r\Big/\int_0^r (k_l - k_{l+1})\,dr, \tag{28}$$

где k_l – горизонтальное волновое число моды для волновода сравнения, зависящее от частоты излучения и расстояния r. С использованием также приближения ВКБ для определения собственных функций в волноводе сравнения и соответствующих им значений параметра β_l, которые в этом случае находятся из аналогичного (20) дисперсионного уравнения [10]

$$k_0\int_{z_1(r)}^{z_2(r)}\sqrt{n^2(z,r)-\beta_l^2}\,dz = \pi(l-\nu), \tag{29}$$

преобразуем, по аналогии с (22)–(24), выражение (28) к следующему виду:

$$R_{l,l+1} = r\Big/\int_0^r \frac{dr}{D(\beta_l)}, \tag{30}$$

где

$$D(\beta_l) = 2\beta_l\int_{z_1(r)}^{z_2(r)}\frac{dz}{\sqrt{n^2(z,r)-\beta_l^2}}. \tag{31}$$

Из (19) с использованием (30) найдем требуемое выражение для характерного пространственного

масштаба переформирования крупномасштабной интерференционной структуры поля в плавнонеоднородном по трассе океаническом волноводе:

$$R_g(l, n) = \frac{r}{\left|\int\limits_0^r \frac{D(\beta_l) - D(\beta_n)}{D(\beta_l)D(\beta_n)} dr\right|}, \tag{32}$$

которое, по аналогии с (26), в геометроакустическом приближении запишется в следующем виде:

$$R_g(\beta_c, \beta) = \frac{r}{\left|\int\limits_0^r \frac{D(\beta_c) - D(\beta)}{D(\beta_c)D(\beta)} dr\right|}. \tag{33}$$

После подстановки выражения для $R_g(\beta_c, \beta)$ (33) в неравенство (27) получим эквивалентное (7) соотношение

$$\left|\int\limits_0^r \frac{D(\beta_c) - D(\beta)}{D(\beta_c)D(\beta)} dr\right| \ll \frac{1}{2}. \tag{34}$$

Далее, как и в случае однородного по трассе океанического волновода, воспользуемся при преобразованиях выражения (34) разложениями функции $D(\beta)$ (31) в ряд с точностью до второго (см. (8)) или третьего (см. (15)) порядка малости по $\Delta\beta$ включительно вблизи значения $\beta = \beta_c$, зависящего теперь от расстояния r. Тогда при соответствующих условиях на величину β_c получим следующие неравенства:

$$\left|\int\limits_0^r \left\{\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \beta^2}\right)\Bigg|_{\beta = \beta_c} (\Delta\beta)^2 / D^2(\beta_c)\right\} dr\right| \ll 1, \tag{35}$$

$$\beta_c < n(z_s, r);$$

$$\left|\int\limits_0^r \left\{\left(\frac{\partial^3 D}{\partial \beta^3}\right)\Bigg|_{\beta = \beta_c} (\Delta\beta)^3 / D^2(\beta_c)\right\} dr\right| \ll 3, \tag{36}$$

$$\beta_c = n(z_s, r).$$

С целью дальнейшего преобразования неравенств (35), (36) к аналогичному (12), (16) виду найдем связь между значениями параметра β вблизи источника $\beta^{(0)} = \beta(r = 0)$ и на произвольном расстоянии $\beta = \beta(r)$. Для этого воспользуемся законом сохранения лучевого инварианта [10]:

$$\frac{1}{c_0(r)} \int\limits_{z_1(r)}^{z_2(r)} \sqrt{n^2(z, r) - \beta^2}\, dz = \tag{37}$$

$$= \frac{1}{c_0(0)} \int\limits_{z_1(0)}^{z_2(0)} \sqrt{n^2(z, 0) - (\beta^{(0)})^2}\, dz = \text{const},$$

следующего из дисперсионного уравнения (29). Дифференцируя (37) по параметру β, находим уравнение

$$\frac{d\beta^{(0)}}{d\beta} = \frac{c_0(0)D(\beta, r)}{c_0(r)D^{(0)}(\beta^{(0)})}, \tag{38}$$

в котором $D^{(0)}(\beta^{(0)}) = D(\beta^{(0)}, r = 0)$. Кроме того, поскольку рассматриваемые здесь узкие акустические пучки формируются лучами с весьма малым диапазоном $\Delta\chi_s^{(0)}$ изменения их угла скольжения в источнике $\chi_s^{(0)}$ и соответственно малым диапазоном $\Delta\beta^{(0)}$ изменения параметра $\beta^{(0)}$, а следовательно, и $0 \le \Delta\beta \le \delta_c$ (см. (6)), где теперь δ_c является функцией r, то, полагая в (37) $\beta = \beta_c + \Delta\beta$, $\beta^{(0)} = \beta_c^{(0)} + \Delta\beta^{(0)}$ и используя разложения левой и правой частей равенства (37) в ряды с точностью до первого порядка малости по $\Delta\beta$ и $\Delta\beta^{(0)}$ соответственно, находим следующее соотношение:

$$\Delta\beta^{(0)} \approx \frac{c_0(0)D(\beta_c, r)}{c_0(r)D^{(0)}(\beta_c^{(0)})} \Delta\beta, \tag{39}$$

которое, кстати, следует из (38) при замене дифференциалов конечными приращениями соответствующих величин. С использованием (38), (39), а также закона Снеллиуса в плавнонеоднородном по трассе океаническом волноводе

$$n(z_s, r)\cos\chi_s = \cos\chi, \tag{40}$$

неравенства (35), (36) можно переписать в следующем виде:

$$\left|\int\limits_0^r \left\{\left[\frac{\partial^2 D}{(\partial \chi_s^{(0)})^2}\right]\Bigg|_{\chi_s^{(0)} = \chi_{sc}^{(0)}} (\Delta\chi_s^{(0)})^2 / D^2(\chi_{sc}^{(0)}, r)\right\} dr\right| \ll 1, \tag{41}$$

$$(\chi_c \ne 0),$$

$$\left|\int\limits_0^r \left\{\left[\frac{\partial^3 D}{(\partial \chi_s^{(0)})^3} - 3\frac{\partial}{\partial \chi_s^{(0)}}\left(\frac{1}{\chi_s^{(0)}}\frac{\partial D}{\partial \chi_s^{(0)}}\right)\right]\Bigg|_{\chi_s^{(0)} = \chi_{sc}^{(0)}} \times \right.$$

$$\left. \times (\Delta\chi_s^{(0)})^3 / D^2(\chi_{sc}^{(0)}, r)\right\} dr\right| \ll 3 \tag{42}$$

$$(\chi_c) = 0.$$

Здесь величины $\chi_{sc}^{(0)} = \arccos[\beta_c^{(0)}/n(z_s, 0)]$ и $\Delta\chi_s^{(0)} = \chi_s^{(0)} - \chi_{sc}^{(0)}$ являются функциями r, поскольку определяются через соответствующие им величины $\chi_{sc}(r) = \arccos[\beta_c/n(z_s, r)]$ и $\Delta\chi_s(r) = \chi_s - \chi_{sc}$ из приведенных выше соотношений (37) и (39).

Если ограничиться рассмотрением монотонно однонаправленного изменения угловой зависимости длины цикла лучей с расстоянием, то очевидно, что слаборасходящийся акустический пучок будет существовать по трассе до тех пор, пока диапазон изменения положения соответствующего этому пучку гладкого экстремума (минимума) $|\Delta\chi_{sc}| = |\chi_{sc} - \chi_{sc}^{(0)}|$ в $D(\chi_s)$ не будет превышать диапазона изменения угла выхода из источника лучей, формирующих этот пучок:

$$|\Delta\chi_{sc}| \le |\Delta\chi_s^{(0)}|. \tag{43}$$

Воспользовавшись для оценки величины $|\Delta\chi_s^{(0)}|$ нижней границей допустимого диапазона ее изменения в (43), из (41), (42) получим необходимые и достаточные условия для сохранения слабой геометрической расходимости узкого акустического пучка в плавнонеоднородном по трассе океаническом волноводе:

$$\left|\int_0^r \left\{\left[\frac{\partial^2 D}{(\partial\chi_s^{(0)})^2}\right]\Bigg|_{\chi_s^{(0)} = \chi_{sc}^{(0)}} (|\Delta\chi_{sc}|)^2/D^2(\chi_{sc}^{(0)}, r)\right\}dr\right| \ll 1, \tag{44}$$

$$(\chi_c \ne 0),$$

$$\left|\int_0^r \left\{\left[\frac{\partial^3 D}{(\partial\chi_s^{(0)})^3} - 3\frac{\partial}{\partial\chi_s^{(0)}}\left(\frac{1}{\chi_s^{(0)}}\frac{\partial D}{\partial\chi_s^{(0)}}\right)\right]\Bigg|_{\chi_s^{(0)} = \chi_{sc}^{(0)}} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times (|\Delta\chi_{sc}|)^3/D^2(\chi_{sc}^{(0)}, r)\right\}dr\right| \ll 3. \tag{45}$$

$$(\chi_c = 0)$$

В заключительной части данной работы воспользуемся полученными здесь и в [11] результатами для вывода условий, выполнение которых необходимо и достаточно для формирования и распространения в плавнонеоднородном по трассе океаническом волноводе всего лишь одного-единственного и наиболее узкого, при определенной частоте излучения, акустического пучка, сформированного отраженными от свободной поверхности океана бриллюэновскими волнами (лучами).

Условия существования такого пучка в однородном по трассе океаническом волноводе с открытым к поверхности подводным звуковым каналом и акустически прозрачным дном при определенной выделенной частоте излучения $\omega = \omega_0$, зависящей от глубины погружения ближайшей к свободной поверхности океана корреспондирующей точки, получены в [11] с использованием приближения ВКБ для модового представления поля, поэтому ниже воспользуемся соответствующими результатами этой работы.

Начнем с того, что запишем выражение для определения выделенной частоты излучения ω в плавнонеоднородном по трассе океаническом волноводе, которое получается простым обобщением приведенного в [11] выражения (22), найденного при условии расположения корреспондирующих точек на одной глубине:

$$\omega = \frac{\pi c_0(r)}{2}\Big/\int_0^z \sqrt{n^2(z, r) - \beta_c^2}\,dz. \tag{46}$$

Здесь значение $\beta_l = \beta_c(r)$ соответствует положению гладкого минимума у функции $D(\beta_l)$ (31) для $z_1 = 0$, $z_2 = z_н(r)$ и определяется из решения уравнения (3) в диапазоне $n(H) < \beta_c \le n(0)$. Выражение (46) является следствием того факта, что при данном значении ω, которое зависит теперь уже и от горизонтального расстояния, положение минимума в $D(\beta_l)$ (31) совпадает с положением единственного максимума у функции $I(\beta_l)$, характеризующей зависимость интенсивности мод от параметра β_l [11]. Определяемые из (46) значения ω должны удовлетворять условию слабого возбуждения рефрагированных мод по сравнению с взаимодействующими с поверхностью океана модами [11]:

$$k_0 \int_{z_н(r)}^{z} \sqrt{n^2(z, r) - \beta_l^2}\,dz \ll \frac{\pi}{4}, \tag{47}$$
$$n(0, r) < \beta_l \le n(z_s, r),$$

которое с учетом (46) можно переписать в следующем виде:

$$\int_{z_н(r)}^{z} \sqrt{n^2(z, r) - \beta_l^2}\,dz\Big/\int_0^z \sqrt{n^2(z, r) - \beta_c^2}\,dz \ll \frac{1}{2}. \tag{48}$$

Кроме того, если зафиксировать значение выделенной частоты излучения $\omega_0 = \omega\,(r = 0)$, определяемое с использованием данных о стратификации акустических характеристик океанического волновода вблизи источника:

$$\omega_0 = \frac{\pi c_0(0)}{2}\Big/\int_0^z \sqrt{n^2(z, 0) - (\beta_c^{(0)})^2}\,dz, \tag{49}$$

то необходимо потребовать также выполнения условия малости относительного изменения $\Delta\omega/\omega_0 = (\omega(r) - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$ возможного значения выделенной частоты излучения $\omega(r)$ по трассе

распространения, которое с учетом (46), (49) запишется в следующем виде:

$$\frac{c_0(r)}{c_0(0)}\times$$
$$\times\int_0^z\sqrt{n^2(z,0)-(\beta_c^{(0)})^2}dz/\int_0^z\sqrt{n^2(z,r)-\beta_c^2}dz-1\ll 1. \quad (50)$$

Следовательно, выполнение в плавнонеоднородном по трассе океаническом волноводе условий (44), (49), (50) обеспечит сохранение: во-первых, слабого геометрического расхождения волнового фронта узкого акустического пучка, сформированного в данном случае взаимодействующими со свободной поверхностью океана бриллюэновскими волнами (лучами) (см. (44)); во-вторых, минимальной дифракционной (дополнительной к чисто геометроакустической) дефокусировки такого пучка, зависящей от частоты излучения и обусловленной смещением положения единственного максимума функции $I(\beta_l)$ с расстоянием от его положения $\beta_l=\beta_c^{(0)}$ при $r=0$ и гладкого минимума $\beta=\beta_c$ функции $D(\beta_l)$ (31) (см. (50)).

Здесь следует отметить, что наряду с проявлением в слаборасходящихся акустических пучках дифракционных эффектов, обусловленных различием в относительном расположении соответствующих экстремумов у функций $D(\beta_l)$ и $I(\beta_l)$, необходимо также, при определенных условиях (см., например, [8]), учитывать проявление дифракционных эффектов, обусловленных дополнительным, по сравнению с чисто геометрическим, набегом фазы $\varphi_в(\beta_l,\omega)$ бриллюэновской волной [1, 2, 12]. Учет конечной величины $\varphi_в(\beta_l,\omega)$ приведет к появлению в угловой зависимости длины цикла соответствующих лучей дополнительного по сравнению с $D(\beta)$ (см. (1), (31)) слагаемого $D_в(\beta,\omega)$, определяемого выражением следующего вида [13]:

$$D_в(\beta,\omega)=-\frac{1}{k_0}\frac{\partial\varphi_в}{\partial\beta}, \quad (51)$$

в котором присутствует явная зависимость от частоты излучения, приводящая к аналогичной зависимости положения гладкого экстремума $\beta=\beta_c(\omega)$ у функции $D(\beta,\omega)=D(\beta)+D_в(\beta,\omega)$ [1, 2]. Если предположить, например, что слаборасходящийся акустический пучок формируется рефрагированными на глубинах $0<z\le z_s\ll z_0$ и взаимодействующими с дном лучами, то величину $D_в(\beta,\omega)$ можно интерпретировать как горизонтальное смещение квазиплоского пучка (соответствующего лучу с определенным значением параметра β) при полном внутреннем отражении его от дна океана [14]. Существенное влияние $D_в(\beta,\omega)$ на ширину взаимодействующего с дном слаборасходящегося акустического пучка при различных частотах излучения наглядно продемонстрировано в [8]. Естественно, что с учетом таких дифракционных эффектов выполнение необходимых и достаточных условий для сохранения слабого геометрического расхождения волнового фронта узких акустических пучков в плавнонеоднородных по трассе акустических волноводах (см. (44), (45)) будет зависеть не только от расстояния, но и от частоты излучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-02-06071-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буслаев В.С.* Структура акустического поля вблизи поверхности глубокого моря // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 117. С. 98–111.
2. *Буслаев В.С., Перель М.В.* Влияние вида профиля скорости вблизи поверхности на структуру поля в глубоком море // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 3. С. 296–302.
3. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В., Дремучев С.А., Куртепов В.М., Селиванов В.Г., Чепурин Ю.А.* Акустические эксперименты по распространению звука через внутритермоклинную линзу и на двух протяженных трассах в Атлантическом океане // Океаническая акустика. М.: Наука, 1993. С. 21–34.
4. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В., Дремучев С.А., Куртепов В.М., Селиванов В.Г., Чепурин Ю.А.* Эксперимент по дальнему распространению звука в Канарской котловине Атлантического океана // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 5. С. 824–831.
5. *Гончаров В.В., Куртепов В.М.* О формировании и распространении слаборасходящихся пучков лучей в горизонтально неоднородном океане // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 5. С. 773–781.
6. *Петухов Ю.В.* Влияние дифракционных и интерференционных эффектов на формирование дальних зон акустической освещенности в подводном звуковом канале // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 3. С. 585–588.
7. *Петухов Ю.В.* Частотная зависимость эффекта квазипериодического распределения дальних зон акустической освещенности в подводном звуковом канале // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 5. С. 917–923.
8. *Петухов Ю.В.* Звуковой пучок с минимальной геометрической расходимостью волнового фронта по трассе распространения в стратифицированном океаническом волноводе // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 1. С. 111–120.
9. *Fitzgerald R.M., Guthrie A.N., Nutile D.A., Shaffer J.D.* Long-range low frequency CW propagation in the deep ocean: Antigua – Newfoundland // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 56. № 1. P. 58–69.
10. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.
11. *Петухов Ю.В.* Квазиоптическая теория эффекта минимального дифракционного расплывания даль-

них зон акустической освещенности на определенной частоте в подводном звуковом канале // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 3. С. 401–411.

12. *Годин О.А., Прокопюк И.В.* О расчете акустического поля в океане методом ВКБ при неаналитической аппроксимации скорости звука // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 49–54.

13. *Tindle C.T., Weston D.E.* Connection of acoustic beam displacement, cycle distances and attenuation for rays and normal modes // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 67. № 5. P. 1614–1622.

14. *Davis J.A., Murphy E.L.* Modified ray theory for bounded media // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 56. № 6. P. 1747–1760.

Slowly-Diverging Acoustic Beams in Smoothly Inhomogeneous Ocean Waveguides

Yu. V. Petukhov

The maximum variation range of a smooth extremum in the ray cycle angular profile of is obtained as a function of distance from the source. This is the necessary condition for a slowly-divergent acoustic beam (conditioned by this extremum) to exist at substantial distances in a smoothly inhomogeneous ocean waveguide.