АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 2, с. 255–256

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.26

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗДАНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГИХ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯХ (МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА)

© 1997 г. А. Д. Лапин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 18.12.95 г.

Землетрясения порождают интенсивные упругие волны в земной коре. Достигая поверхности земли, эти волны раскачивают здания, стоящие на ней. Вынужденные колебания здания имеют резонансный характер; они особенно интенсивны при частотах внешнего воздействия, равных или близких собственным частотам этого здания. Ниже исследованы вынужденные низкочастотные резонансные колебания высокого цилиндрического здания (башни). При низких частотах внешнего воздействия такое здание ведет себя подобно стержню.

Рассмотрим однородное твердое полупространство $z < 0$ со свободной поверхностью $z = 0$. К ней при $z = 0$, $\sqrt{x^2+y^2} \le a$ присоединен (приклеен) тонкий круглый стержень радиусом a и длиной L. Ось стержня совпадает с осью z, конец $z = L$ стержня свободный. Требуется рассчитать вынужденные колебания стержня под действием упругих волн, распространяющихся в твердом полупространстве. Этот расчет выполним для гармонических фурье-компонент полей.

Гармоническое поле в твердой среде будем характеризовать вектором смещения $\mathbf{U}$. Это поле представим в виде $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(0)} + \mathbf{U}^{(1)}$, где $\mathbf{U}^{(0)}$ – поле в твердом полупространстве со свободной границей (при отсутствии стержня), $\mathbf{U}^{(1)}$ – рассеянное поле, обусловленное колебаниями стержня. Оно сшивается с полем в стержне: на границе стержень-твердое полупространство непрерывны смещения и напряжения. Для тонкого (по сравнению с длиной продольной волны) стержня достаточно потребовать непрерывности усредненных (по площади круга $\sqrt{x^2+y^2} \le a$) смещений и напряжений.

Положим $U_y^{(0)}(0, 0, 0) = 0$. Тогда стержень будет колебаться в плоскости (x, z). Обозначим через u и w соответственно компоненты смещения стержня по осям x и z. Вынужденные колебания стержня получим следующим способом. Найдем смещения в стержне и в твердом полупространстве, создаваемые нормальной ($\perp$) и тангенциальной ($\parallel$) силами

$$F_{(t)}^{(\perp)} = F_0^{(\perp)}\exp(-i\omega t),$$
$$F_{(t)}^{(\parallel)} = F_0^{(\parallel)}\exp(-i\omega t),$$

равномерно распределенными по площади круга $z = 0$, $\sqrt{x^2+y^2} \le a$. Амплитуды $F_0^{(\perp)}$ и $F_0^{(\parallel)}$ этих сил подберем таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия при $x = y = 0$

$$w = U_z^{(0)} + U_z^{(1)}, \quad u = U_x^{(0)} + U_x^{(1)}. \tag{1}$$

При таком выборе амплитуд сил получим самосогласованное решение поставленной задачи.

Задача о возбуждении тонкого стержня нормальной и тангенциальной силами решается стандартным методом [1, 2]. Компоненты смещения $w(0)$ и $u(0)$ получим по формулам

$$\begin{aligned} w(0) &= -F_0^{(\perp)}Y_L^{(\perp)}/(-i\omega), \\ u(0) &= -F_0^{(\parallel)}Y_L^{(\parallel)}/(-i\omega), \end{aligned} \tag{2}$$

где $Y_L^{(\perp)}$ и $Y_L^{(\parallel)}$ – соответственно податливости стержня по отношению к нормальной и тангенциальной силам.

Задача о возбуждении твердого полупространства нормальной и тангенциальной силами решена в работах [3–5]. Компоненты смещения $U_z^{(1)}(0,0,0)$ и $U_x^{(1)}(0, 0, 0)$ получим по формулам

$$\begin{aligned} U_z^{(1)}(0,0,0) &= F_0^{(\perp)}Y^{(\perp)}/(-i\omega), \\ U_x^{(1)}(0,0,0) &= F_0^{(\parallel)}Y^{(\parallel)}/(-i\omega), \end{aligned} \tag{3}$$

где $Y^{(\perp)}$ и $Y^{(\parallel)}$ – соответственно податливости твердого полупространства по отношению к нормальной и к тангенциальной силам. Усредненная за период мощность излучения равна

$$Q = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,Y^{(\perp)}\left|F_0^{(\perp)}\right|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,Y^{(\parallel)}\left|F_0^{(\parallel)}\right|^2.$$

Подберем амплитуды $F_0^{(\perp)}$ и $F_0^{(\parallel)}$ таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения (I). Подставляя формулы (2) и (3) в соотношения (I), получим искомые амплитуды сил

$$F_0^{(\perp)} = i\omega U_z^{(0)}(0,0,0)\{\mathrm{Re}(Y_L^{(\perp)} + Y^{(\perp)}) + i\,\mathrm{Im}(Y_L^{(\perp)} + Y^{(\perp)})\}^{-1}, \tag{4}$$

$$F_0^{(\parallel)} = i\omega U_x^{(0)}(0,0,0)\{\mathrm{Re}(Y_L^{(\parallel)} + Y^{(\parallel)}) + i\,\mathrm{Im}(Y_L^{(\parallel)} + Y^{(\parallel)})\}^{-1}. \tag{5}$$

Вынужденные колебания стержня таковы:

$$w(z) = F_0^{(\perp)}Y_\infty^{(\perp)}\frac{\cos[k_0(L-z)]}{\omega\sin(k_0L)}, \tag{6}$$

$$u(z) = \frac{1}{2\omega}F_0^{(\parallel)}Y_\infty^{(\parallel)}\{\mathrm{ch}(kL)\sin(kL) + \mathrm{sh}(kL)\cos(kL)\}^{-1}\{\mathrm{ch}(kz) + \cos(kz) + \cos(kL)\,\mathrm{ch}[k(L-z)] + \mathrm{ch}(kL)\cos[k(L-z)] + \sin(kL)\,\mathrm{sh}[k(L-z)] - \mathrm{sh}(kL)\sin[k(L-z)]\}, \tag{7}$$

где $Y_\infty^{(\perp)} = (\rho_0 c_0 S)^{-1}$ и $Y_\infty^{(\parallel)}(\rho_0 cS)^{-1}$, $K_0 = \omega/c_0$, $k = \omega/c$, c_0 и c – соответственно скорости продольной и изгибной волн в стержне, ρ_0 и $S = \pi a^2$ – плотность материала и площадь поперечного сечения стержня.

Интенсивные (резонансные) вынужденные колебания стержня происходят при частотах, близких $\omega_n^{(\perp)}$ и $\omega_n^{(\parallel)}$, где $\omega_n^{(\perp)}$ – решение уравнения $\mathrm{Im}(Y_L^{(\perp)} + Y^{(\perp)}) = 0$, $\omega_n^{(\parallel)}$ – решение уравнения $\mathrm{Im}(Y_L^{(\parallel)} + Y^{(\parallel)}) = 0$. Реактивные компоненты податливости твердого полупространства по отношению к нормальной и к тангенциальной силам отрицательные (упругого типа), поэтому из этих дисперсионных уравнений можно сделать следующие заключения: частоты $\omega_n^{(\perp)}$ меньше частот продольных собственных колебаний стержня, закрепленного на одном конце и свободного на другом; частоты $\omega_n^{(\parallel)}$ меньше частот изгибных собственных колебаний стержня, заделанного на одном конце и свободного на другом.

При резонансе на продольных колебаниях стержня ($\omega = \omega_n^{(\perp)}$) из формул (4) и (5) имеем соотношения

$$F_0^{(\perp)} = \frac{i\omega U_z^{(0)}(0,0,0)}{\mathrm{Re}(Y_L^{(\perp)} + Y^{(\perp)})}, \quad \left|F_0^{(\parallel)}\right| \ll \left|F_0^{(\perp)}\right|$$

и максимальное продольное смещение стержня примерно в $Y_\infty^{(\perp)}/\mathrm{Re}(Y_L^{(\perp)} + Y^{(\perp)})$ раз больше смещения $U_z^{(0)}(0, 0, 0)$. В твердом полупространстве продольная, сдвиговая и рэлеевская волны уносят соответственно 7%, 25% и 68% рассеянной энергии.

При резонансе на изгибных колебаниях стержня ($\omega = \omega_n^{(\parallel)}$) имеем

$$F_0^{(\parallel)} = \frac{i\omega U_x^{(0)}(0,0,0)}{\mathrm{Re}(Y_L^{(\parallel)} + Y^{(\parallel)})}, \quad \left|F_0^{(\perp)}\right| \ll \left|F_0^{(\parallel)}\right|$$

и максимальное поперечное смещение стержня примерно в $Y_\infty^{(\parallel)}/\mathrm{Re}(Y_L^{(\parallel)} + Y^{(\parallel)})$ раз больше смещения $U_x^{(0)}(0, 0, 0)$. В твердом полупространстве продольная, сдвиговая и рэлеевская волны уносят соответственно 3%, 61% и 36% рассеянной энергии.

В общем случае величины $Y^{(\perp)}$ и $Y^{(\parallel)}$ определяются по сложным формулам [3–5]. Для среды, у которой коэффициенты Ламэ равны друг другу, имеем приближенно

$$\mathrm{Re}\,Y^{(\perp)} \approx \mathrm{Re}\,Y^{(\parallel)} \approx \frac{0.8\omega^2}{\rho c_l^3},$$

где ρ и c_l – соответственно плотность среды и скорость продольной волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морз Ф.* Колебания и звук. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965.
3. *Miller G.F., Pursey H.* The field and radiaton impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid // Proc. Roy. Soc., ser. A. 1954. V. 223, № 1155. P. 521–541.
4. *Miller G.F., Pursey H.* On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid // Proc. Roy. Soc., ser. A. 1955. V. 223, № 1192. P. 55–69.
5. *Гущин В.В., Докучаев В.П., Заславский Ю.М., Конюхова И.Д.* О распределении мощности между различными типами излучаемых волн в полубезграничной упругой среде // Исследование земли невзрывными сейсмическими источниками. М.: Наука, 1981. С. 113–118.