АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 2, с. 257–260

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.222

ВОЗМУЩЕНИЯ ФОРМИРУЮЩЕГОСЯ УДАРНОГО ФРОНТА ПИЛООБРАЗНЫХ ВОЛН В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ

© 1997 г. Ю. Н. Маков, О. В. Руденко

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119899 Москва, Воробьевы горы

Поступила в редакцию 08.11.95 г.

Предложена простая математическая модель укручающегося фронта нелинейной волны в диссипативной среде с учетом конечной ширины этого фронта. На основе данной модели исследованы качественные эффекты и получены количественные характеристики процесса взаимодействия формируемого ударного фронта с возмущениями различного типа.

Процесс формирования ударного фронта, типичный для интенсивных акустических волн, происходит при действии на трансформируемый профиль волны двух основных и конкурирующих факторов – нелинейного укручения и высокочастотного затухания. Эволюция одномерных возмущений при этом полностью описывается уравнениями типа Бюргерса [1]. Важным следствием этой модели, отвечающим реальным физическим процессам, является конечность ширины ударного фронта, определяемая акустическим числом Рейнольдса (числом Гольдберга), которое зависит от отношения параметра нелинейности и коэффициента диссипативных потерь.

В реальных условиях, при воздействии различных внешних факторов, профили интенсивных волн могут искажаться за счет их взаимодействия с более слабыми и мелкомасштабными возмущениями. Характерным примером такой ситуации может служить искажение профиля волны звукового удара от сверхзвукового самолета при прохождении этой волны через турбулентный слой атмосферы [2].

Поэтому вполне очевиден интерес, проявляемый к аналитическим и численным исследованиям взаимодействий типичных для нелинейной акустики волновых профилей (тангенс–гиперболический профиль квазистационарного ударного фронта, профиль N-волны и другие) с различного рода возмущениями [3, 4], а также к экспериментальному изучению таких взаимодействий [5, 6].

В настоящее время получен ряд точных и приближенных решений [7–9] задачи о взаимодействии малых возмущений с простейшим решением уравнений типа Бюргерса в виде прямолинейного профиля, изменяющего свою крутизну в процессе распространения волны. Однако в случае укручающегося профиля эти решения, полученные без учета высокочастотных потерь, не могут дать правильного количественного (а иногда и качественного) описания реального взаимодействия. Так, точное решение [7] задачи о взаимодействии гармонических возмущений с укручающимся вплоть до вертикального положения линейным профилем, отвечающим ударному фронту нулевой ширины, приводит к сколь угодно большим значениям коэффициента усиления возмущений. Эта особенность может быть устранена только при учете конечной ширины фронта.

Известные результаты асимптотического анализа уравнения нелинейной акустики [1] не допускают простого описания процесса уменьшения ширины фронта непосредственно перед формированием квазистационарной ударной волны. Поэтому ниже предлагается такая модель, позволяющая рассчитать взаимодействия фронта с малыми мелкомасштабными возмущениями.

Воспользуемся обычным уравнением Бюргерса, описывающим распространение плоских волн:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \qquad (1)$$

Здесь $z = (\varepsilon/c^2)\omega_0 u_0 x = x/x_s$ – координата, нормированная на характерную нелинейную длину – расстояние образования разрыва x_s, $\theta = \omega_0(t - x/c)$, $V = u/u_0$, u_0 и ω_0 – характерные значения колебательной скорости и частоты интенсивной волны. Параметры среды: плотность ρ, скорость звука c и эффективная вязкость b [1] присутствуют в уравнении (1) в виде комбинации $\Gamma = b\omega_0/(2\varepsilon c\rho u_0)$, представляющей собой обратное акустическое число Рейнольдса.

Заметим, что полученные ниже результаты могут быть обобщены на случай произвольных одномерных волн – сферических, цилиндрических, волн в рупорах и концентраторах, внутри лучевых трубок при использовании приближения нелинейной геометрической акустики – по аналогии с тем, как это сделано в работе [9].

Ищем решение (1) в виде тангенс–гиперболического профиля, соответствующего стационарному фронту, но с изменяющимся коэффициентом наклона (шириной фронта):

$$V = \mathrm{th}[a(z)\theta]. \tag{2}$$

Ограничиваясь прифронтовой областью ($\mathrm{th}\,\alpha \approx \alpha$), получим для наклона $a(z)$ следующее уравнение:

$$\frac{da}{dz} = a^2(1 - 2\Gamma a), \tag{3}$$

стационарное решение которого $a_{st} = 1/2\Gamma$, достигаемое на расстояниях $z \longrightarrow \infty$, совпадает с соответствующим значением в точном стационарном решении $V_{st} = \mathrm{th}(\theta/2\Gamma)$ уравнения Бюргерса (1).

Решение уравнения (3) при граничном условии $a(z = 0) = a_0$ имеет вид

$$z = \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a}\right) + 2\Gamma \ln\left(\frac{a}{a_0}\frac{1 - 2\Gamma a_0}{1 - 2\Gamma a}\right). \tag{4}$$

При сильно выраженной нелинейности (малые числа Γ) на небольших расстояниях z решение (4) описывает увеличение наклона, происходящее по гиперболическому закону $a(z) = a_0/(1 - a_0 z)$. Однако вблизи особой точки $z = 1/a_0$ поведение решения изменяется, и приближение к стационарному значению $a_{st} = 1/2\Gamma$ происходит асимптотически по экспоненциальному закону.

Получим теперь уравнение эволюции малых возмущений на укручающемся фронте, основываясь на модели (2)–(4). Подставляя в уравнение (1) $V = \mathrm{th}(a\theta) + V_1(z, \theta)$ и линеаризуя его относительно V_1, получим

$$\frac{\partial q}{\partial z} - a(z)\theta\frac{\partial q}{\partial \theta} = \Gamma\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}. \tag{5}$$

Здесь использована новая переменная q, вводимая соотношением $V_1 = \partial q/\partial\theta$. Поскольку решение (4) дает неявную зависимость $a(z)$, в уравнении (5) удобно совершить переход от z к новой независимой переменной $a(z)$. После этого с помощью замены

$$T = \frac{a}{a_0}\frac{1 - 2\Gamma a_0}{1 - 2\Gamma a}\theta, \quad A = \frac{1}{4a_0^2}\left[\left(\frac{1 - 2\Gamma a_0}{1 - 2\Gamma a}\right)^2 - 1\right] \tag{6}$$

удается свести (5) к простейшему уравнению диффузии, не содержащему переменных коэффициентов:

$$\frac{\partial q}{\partial A} = \frac{\partial^2 q}{\partial T^2}. \tag{7}$$

Решая (7) и возвращаясь к возмущению V_1, получим общее выражение

$$V_1 = \frac{a}{\sqrt{\pi}\left[1 - \left(\frac{1 - 2\Gamma a}{1 - 2\Gamma a_0}\right)^2\right]^{1/2}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{\left(a\theta - \frac{1 - 2\Gamma a}{1 - 2\Gamma a_0}a_0\theta_1\right)^2}{1 - \left(\frac{1 - 2\Gamma a}{1 - 2\Gamma a_0}\right)^2}\right] V_1^0(\theta_1)d\theta_1, \tag{8}$$

где $V_1^0 = V_1(\theta, z = 0)$ – форма исходного возмущения.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

Трансформация исходного гармонического возмущения $V_1^0 = C\sin(n\theta)$ описывается решением

$$V_1 = C\frac{a}{a_0}\frac{1 - 2\Gamma a_0}{1 - 2\Gamma a} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{n^2}{4a_0^2}\left(\left(\frac{1 - 2\Gamma a_0}{1 - 2\Gamma a}\right)^2 - 1\right)\right]\sin\left(\frac{a}{a_0}\frac{1 - 2\Gamma a_0}{1 - 2\Gamma a}n\theta\right). \tag{9}$$

Видно, что при увеличении наклона фронта от начального значения a_0 до конечной величины $a_{st} = 1/2\Gamma$ (расстояние z при этом возрастает от 0 до ∞) происходит неограниченный рост частоты. Амплитуда при этом стремится к нулю, уменьшаясь либо монотонно, либо проходя через максимум. Такое поведение определяется конкуренцией двух факторов: усилением возмущения на укручающемся фронте опорной волны и затуханием, растущим с увеличением частоты.

Максимум амплитуды реализуется при значении коэффициента наклона $a = a_*$ из условия

$$2\Gamma a_* = 1 + \frac{n^2}{4a_0^2}(1 - 2\Gamma a_0)^2 -$$
$$-\left[\frac{n^2}{2a_0^2}(1 - 2\Gamma a_0)^2 + \left(\frac{n^2}{4a_0^2}(1 - 2\Gamma a_0)^2\right)^2\right]^{1/2}. \tag{10}$$

Таким образом, если при $z = 0$ начальное значение a_0 профиля опорной волны меньше величины a_*, то амплитуда гармонического возмущения сначала растет, достигая максимума при $a = a_*$, а затем уменьшается до нуля. В противном случае, если при $z = 0$ $a_0 > a_*$, происходит монотонное убывание амплитуды. Заметим, что условие существования максимума $a_0 < a_*$, согласно (10), имеет вид $\Gamma n^2/a_0 < 1$.

Интересным представляется вопрос о наибольшем возможном усилении возмущения на фронте опорной волны. Определим коэффициент K как отношение максимальной амплитуды сигнала (9), достигаемой при $a = a_*$ (10), к исходному значению C. Этот коэффициент равен

$$K = \frac{a_*}{a_0}\frac{1-2\Gamma a_0}{1-2\Gamma a_*}\exp\left[-\frac{n^2}{4a_0^2}\left(\left(\frac{1-2\Gamma a_0}{1-2\Gamma a_*}\right)^2-1\right)\right]. \quad (11)$$

Выражение (11) существенно упрощается, когда

$$a_0/a_{st} = 2\Gamma a_0 \ll 1, \quad n^2/4a_0^2 \gg 1. \quad (12)$$

Первое из неравенств (12) означает, что исходный наклон переднего фронта опорной волны мал по сравнению со своим стационарным значением; второе – что рассматривается высокочастотное возмущение.

С учетом неравенств (12) из формулы (10) получаем $a_* = a_0^2/\Gamma n^2 > a_0$; коэффициент усиления (11) при этом равен

$$K = \frac{a_0}{\Gamma n^2}e^{-1} = \frac{f_L}{f_H^2}\frac{\varepsilon}{\pi^2 b}\left(\frac{1}{2}\rho c I\right)^{1/2}e^{-1}. \quad (13)$$

Здесь $f_L = a_0/\omega_0$ – характерная частота опорной волны, $f_H = n\omega_0/2\pi$ – более высокая частота исходного гармонического возмущения, $I = \rho c u_0^2/2$ – интенсивность опорной волны.

Отметим, что коэффициент усиления (13) (без множителя e^{-1}) одновременно показывает, во сколько раз возрастает частота исходного возмущения в момент достижения максимума его амплитуды. Это следует из структуры решения (9).

Интересно также, что для заданной интенсивности I и отношения частот f_L/f_H в данной среде существует верхняя граничная частота возмущения, при превышении которой усиление отсутствует.

Перейдем к численным оценкам. Пусть опорной является исходная гармоническая волна с частотой $f_L = 1$ МГц, возбуждаемая в воде ($\varepsilon = 4$, $\rho = 1$ г/см^3, $c = 1.5 \times 10^5$ см/с, $b = 4 \times 10^{-2}$ Пуаз). Ее интенсивность 100 Вт/см^2. Исходная частота возмущения $f_H = 5$ МГц. При этом коэффициент усиления согласно (13) лишь немногим превышает единицу: $K \approx 1.3$. Существенно большего усиления, согласно оценкам, можно достичь с использованием опорной волны в виде интенсивного одиночного импульса, возбуждаемого при поглощении лазерного излучения [10]. В это случае удается получить значительные импульсные давления, не допуская развития кавитации.

Далее рассмотрим трансформацию возмущений импульсного типа.

Для исходного колоколообразного импульса

$$V_1^0 = C_0\exp[-(\theta-\theta_0)^2/\sigma_0^2] \quad (14)$$

из (8) получаем решение, описывающее его трансформацию

$$V_1 = C(z)\exp\{-[\theta-\theta_0(z)]^2/\sigma^2(z)\}, \quad (15)$$

где

$$C(z) = C_0 a\sigma_0\left[1-(1-a_0^2\sigma_0^2)\left(\frac{1-2\Gamma a}{1-2\Gamma a_0}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$\theta_0(z) = \theta_0\frac{a_0}{a}\left(\frac{1-2\Gamma a}{1-2\Gamma a_0}\right)^2,$$

$$\sigma(z) = \frac{1}{a}\left[1-(1-a_0^2\sigma_0^2)\left(\frac{1-2\Gamma a}{1-2\Gamma a_0}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Принимая во внимание соотношение $2\Gamma < \sigma_0 < 1/a_0$ между начальной шириной импульса и исходной и конечной шириной формируемого ударного фронта, из (15) получаем, что однополярный колоколообразный импульс (14) с ростом z (т.е. с ростом a от a_0 до $1/2\Gamma$) сужается до ширины ударного фронта 2Γ, а его пиковое значение растет до величины $C_0\sigma_0/2\Gamma$. Этот результат, однако, не согласуется с полученным в предыдущем примере исчезновением на укручающемся фронте нелинейной волны гармонических возмущений (спектральных составляющих импульсного возмущения). Данный "парадокс" объясняется наличием в спектре рассмотренного однополярного импульсного возмущения постоянной составляющей нулевой частоты, которая не затухает из-за высокочастотной диссипации. В реальном эксперименте эта постоянная составляющая исчезает из-за дифракционных эффектов и однополярный импульс трансформируется в биполярный.

Решение, описывающее эволюцию биполярного импульсного возмущения, легко получить дифференцированием уже найденного решения (15) для однополярного импульса. Оно имеет вид

$$V_1 = \frac{a_0}{a}\frac{1-2\Gamma a}{1-2\Gamma a_0}C(z)\frac{\partial}{\partial\theta}\times \exp\{-[\theta-\theta_0(z)]^2/\sigma^2(z)\}, \quad (16)$$

где $C(z)$, $\theta_0(z)$, $\sigma(z)$ определены в (15).

Из (16) следует, что пиковое значение биполярного импульса возмущения

$$(V_1)_{\max} = \sqrt{\frac{2}{e}}aa_0\times \left\{\frac{1-2\Gamma a_0}{1-2\Gamma a}\left[1-(1-a_0^2\sigma_0^2)\left(\frac{1-2\Gamma a}{1-2\Gamma a_0}\right)^2\right]\right\}^{-1} \quad (17)$$

стремится к нулю при достижении предельной ширины (т.е. $a = \Gamma/2$) укручающего фронта опорного сигнала. Это согласуется с полученным ранее результатом по затуханию до нулевой амплитуды на укручающемся фронте опорного сигнала всех гармонических составляющих спектра импульсного сигнала.

Таким образом, предложенная в работе простая математическая модель (2)–(4) укручающегося фронта нелинейной волны с учетом его конечной ширины позволила эффективно исследовать качественные эффекты и получить количественные характеристики процесса взаимодействия формируемого ударного фронта с возмущениями различного типа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код грантов 95-02-03827, 96-02-16281).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. *Raspet R., Bass H.E., Yao L., Boulander P.* Statistical and numerical study of the relationship between turbulence and sonic boom characteristics // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 96. № 6. P. 3621–3626.
3. *Руденко О.В.* Нелинейные пилообразные волны // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
4. *Красильников В.А., Тагунов Е.Я.* О некоторых особенностях коллинеарного взаимодействия монохроматических волн в среде без дисперсии // Вестник Моск. ун-та. Сер. физика, астрон. 1978. Т. 19. № 4. С. 99–108.
5. *Moffet M.B., Konrad W.L., Carlton L.F.* Experimental demonstration of the absorbtion of sound by sound in water // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. № 4. P. 1048–1051.
6. *Буров В.А., Красильников В.А., Тагунов Е.Я.* Экспериментальное исследование коллинеарного взаимодействия слабого ультразвукового сигнала с интенсивными низкочастотными возмущениями в воде // Вест. Моск. ун-та Сер. 3. Физика, астрон. 1978. Т. 19. № 4. С. 53–58.
7. *Гурбатов С.Н.* Нелинейное взаимодействие волн в средах без дисперсии при наличии внешних распределенных источников // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 3. С. 283–294.
8. *Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука. 1990.
9. *Маков Ю.Н., Руденко О.В.* Динамика возмущений нелинейных пилообразных волн // Акуст. журн. 1995 (в печати).
10. *Андреев В.Г., Вероман В.Ю., Денисов Г.А., Руденко О.В., Сапожников О.А.* Нелинейно–акустические аспекты экстракорпоральной литотрипсии // Акуст. журн. 1992. Т.38. № 4. С. 588–593.

Evolution of Disturbances on a Nonliner Shock Wave Front Forming in a Dissipative Mediam

Yu. N. Makov and O. V. Rudenko

A simple mathematical model of a nonlinear wavefront with increasing slope in a dissipative medium with allowance for the finite width of this front is proposed. This model is used to study the qualitative behaviour and to obtain quantitive characteristics of the interaction between the forming shock front and various disturbances.