АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 3, с. 299–303

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

© 1997 г. С. М. Балабаев, Н. Ф. Ивина

Дальневосточный технический институт рыбной промышленности и хозяйства
690600 Владивосток, ул. Луговая, 52-Б

Поступила в редакцию 26.12.95 г.

Рассмотрено влияние погрешности комбинированного метода конечных и граничных элементов на расчет основных характеристик (частотные характеристики чувствительности излучения и безразмерных активной и реактивной составляющих электрической проводимости с учетом акустической нагрузки, диаграмма направленности) цилиндрического пьезопреобразователя с объемной деформацией. Для устранения погрешности применен ранее известный метод, а также метод, основанный на введении потерь, – комплексного волнового числа с небольшой мнимой частью в жидкости.

В статье [1] рассмотрен комбинированный метод конечных и граничных элементов для анализа пьезопреобразователей произвольных геометрических форм и его применение к расчету основных характеристик водозаполненного пьезоцилиндра и коаксиальной антенны из двух одинаковых пьезоцилиндров.

Известно, что метод граничных элементов (МГЭ) имеет погрешность решения на критических частотах, которые являются собственными частотами для внутренней задачи Дирихле или Неймана (при условии, что внутренняя замкнутая область заполнена такой же жидкостью, что и окружает эту область). На этих частотах погрешность МГЭ приводит к появлению ложных максимумов и минимумов на частотных характеристиках пьезопреобразователя (ПП).

Для ПП, рассмотренных в статье [1], исследовались частотные характеристики в диапазоне низких частот, и поэтому критические частоты не попали в исследуемый диапазон. Более сложная ситуация возникает тогда, когда ложный резонанс попадает в рабочую полосу частот, так как он может внести большую погрешность в расчет основных характеристик ПП.

Отметим, что эта проблема является давней и хорошо известной, поскольку она изучалась еще в связи с применением граничного интегрального уравнения (ГИУ) Гельмгольца для решения задач излучения и рассеяния звука. Для ее преодоления применялись различные методы, которые изложены, например, в известной монографии [2]. Эта проблема остается актуальной и для МГЭ (а следовательно, и для комбинированного метода конечных и граничных элементов), поскольку он является одним из способов численного решения ГИУ Гельмгольца. Во многих последних статьях, например [3–7], посвященных применению МГЭ для задач излучения и рассеяния звука упругими телами, обсуждается проблема неединственности решения и различные способы ее преодоления, основанные главным образом на ранее известных методах [2].

Аппроксимирующая система уравнений комбинированного метода [1] или соответствующая система МГЭ дает приближенное решение, которое при увеличении количества граничных элементов или порядка аппроксимации стремится к точному решению, но дает погрешность на критических частотах. Погрешность и неединственность решения связаны с появлением сингулярности, матрица этой системы становится плохо обусловленной в окрестностях критических частот. В статье [4] показано, что погрешность связана с плохой сходимостью численного интегрирования вблизи точки сингулярности. Диапазон погрешности можно уменьшить, увеличивая количество граничных элементов, но погрешность на критической частоте можно устранить, только изменяя аппроксимирующую систему уравнений.

Одним из удачных приемов устранения погрешности остается использование известного метода, предложенного еще в фундаментальной работе [8]. В отличие от других способов, решавших проблему неединственности решения модификацией ГИУ Гельмгольца или фундаментального сингулярного решения (функции Грина), в этой работе само ГИУ Гельмгольца применено к M дополнительным внутренним точкам. Система уравнений с квадратной матрицей NN для граничных

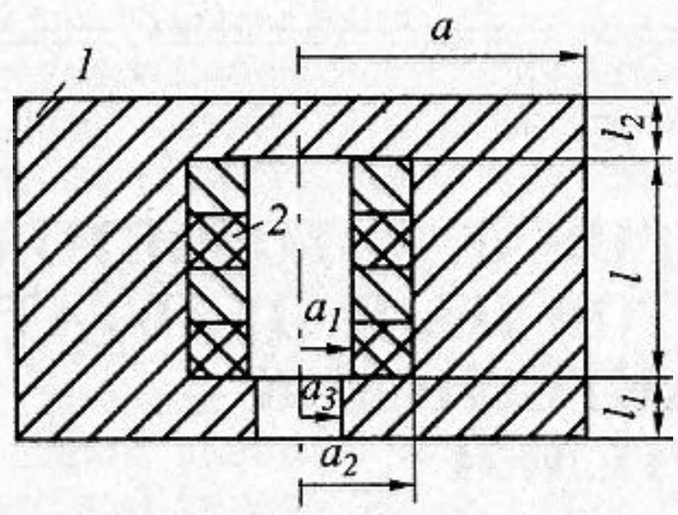

Рис. 1. Цилиндрический пьезопреобразователь с объемной деформацией: *1* – корпус; *2* – секционированный пьезоцилиндр.

точек увеличивается на M уравнений с нулевой правой частью. Результирующая переопределенная система уравнений с прямоугольной матрицей $(N + M)N$ решается методом наименьших квадратов. В статье [5] рассмотрен модифицированный метод и исследована зависимость давления (потенциала скорости) от расположения дополнительных точек, а также предложен их выбор для тел сферической и цилиндрической формы.

В данной статье для устранения погрешности использован метод, предложенный в работе [8]. Кроме того, исследовался следующий довольно простой и физически очевидный способ уменьшения погрешности. Так как погрешность на критической частоте обусловлена резонансом внутреннего замкнутого объема (при условии, что он заполнен жидкостью, окружающей этот объем), для ее уменьшения вводились потери, т. е. волновое число в жидкости принималось комплексным с небольшой мнимой частью. Волновое число определялось как $k = k_1(1 + i\alpha)$; при расчетах величина α принималась равной 0.01–0.1.

Указанные проблемы хорошо проявляются при анализе цилиндрического ПП с объемной деформацией, изображенного на рис. 1. Отметим, что эти вопросы для анализа акустического излучения ПП при использовании комбинированного метода конечных и граничных элементов ранее не рассматривались. Для исследуемого ПП известны экспериментально измеренные характеристики, это позволяет контролировать численные результаты. ПП состоит из металлического цилиндра *1* и секционированного пьезоцилиндра с осевой поляризацией *2*, фактически пьезоцилиндр помещен внутрь массивной оболочки из алюминия; конструкция такого ПП собирается из двух половинок. В гидроакустической аппаратуре он работает в плоском жестком экране и излучает одной торцевой плоскостью. Рассмотрим работу этого ПП, полностью погруженного в воду. Для расчетов объем ПП разбивается на кольцевые конечные элементы (пьезоактивные и пассивные), а его поверхность – на кольцевые граничные элементы, при расчетах использованы элементы второго порядка. При этом учтены частотно-независимые механические потери, величина которых подбиралась путем соответствия расчетных и экспериментальных частотных характеристик импеданса ненагруженного ПП.

Расчеты выполнены для ПП с размерами $a = 27.5$ мм, $a_1 = 5$ мм, $a_2 = 11$ мм, $a_3 = 4$ мм, $l = 22$ мм, $l_1 = l_2 = 6$ мм из пьезокерамики ЦТБС-3 и алюминия; параметры материалов соответствуют справочным данным. Анализ свободных колебаний позволяет определить частоты резонанса f_r, антирезонанса f_a, динамический коэффициент электромеханической связи k и формы колебаний. Для ПП указанных размеров получены следующие значения: 1-я мода: $f_r = 42.5$ кГц, $f_a = 42.8$ кГц, $k = 0.019$; 2-я мода: $f_r = 50.2$ кГц, $f_a = 54.0$ кГц, $k = 0.406$.

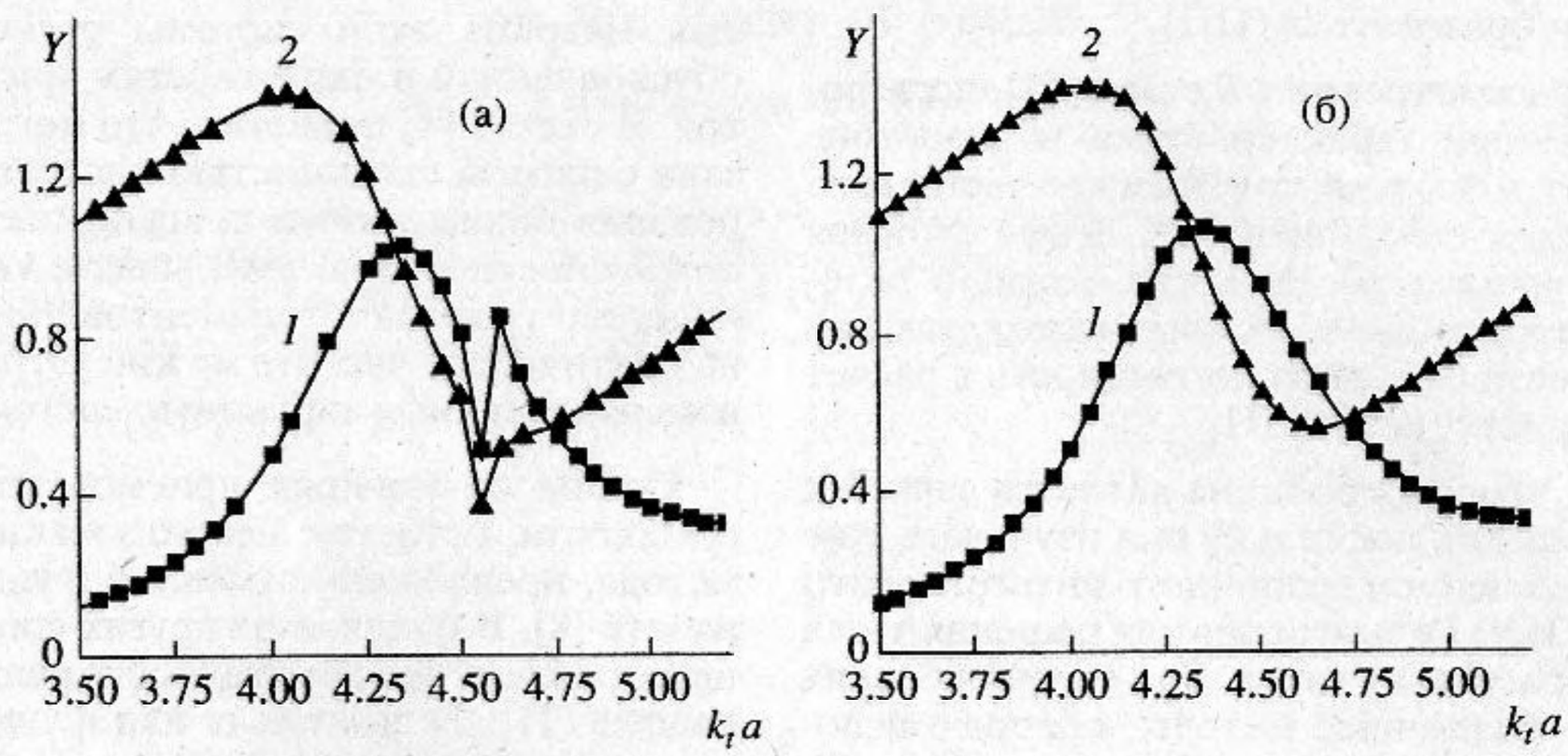

Рис. 2. Частотные характеристики безразмерной электрической проводимости пьезопреобразователя с учетом акустической нагрузки (кривая *1* – активная составляющая; кривая *2* – реактивная составляющая): а – расчет с погрешностью на критической частоте; б – расчет с корректировкой погрешности.

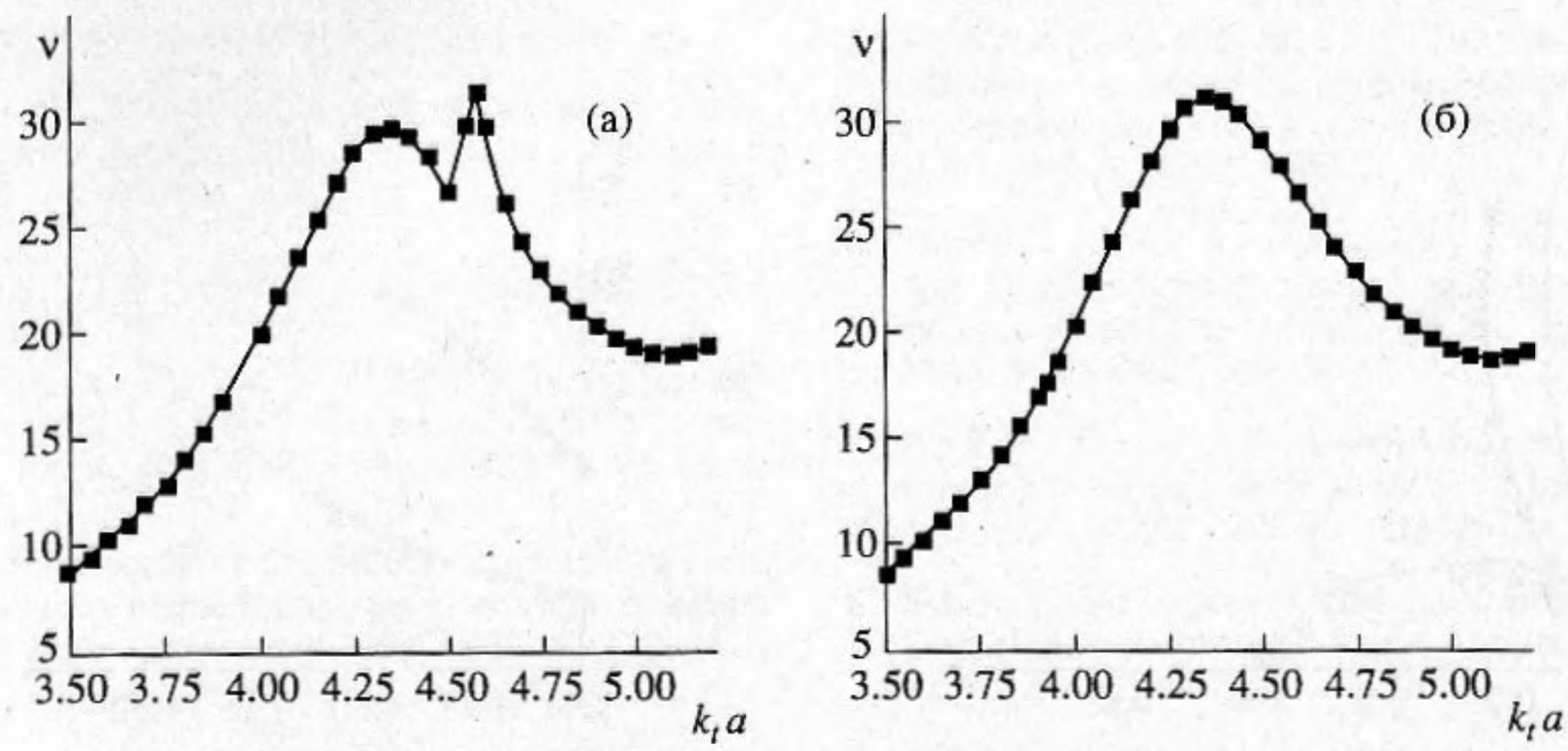

Рис. 3. Частотные характеристики чувствительности излучения пьезопреобразователя, Па/В м: а – расчет с погрешностью на критической частоте; б – расчет с корректировкой погрешности.

Более высокие моды не рассматриваются. Первая мода является антисимметричной и практически не возбуждается. Вторая (симметричная) мода колебаний хорошо наблюдается экспериментально; деформации ПП имеют объемный характер, осевая и радиальная компоненты смещения соизмеримы. Рассматриваемый ПП имеет цилиндрическую излучающую поверхность, что позволяет довольно просто определить критические частоты [5]. Наибольшее влияние в исследуемом частотном диапазоне оказывает критическая частота $f = 52.7$ кГц, соответствующая безразмерному частотному параметру $k_t\ a = 4.55$; k_t – волновое число поперечной волны в пьезокерамике; скорость поперечной волны в пьезокерамике равна $c_t = 2000$ м/с.

На рис. 2 приведены частотные характеристики безразмерных активной и реактивной составляющих электрической проводимости ПП с учетом акустической нагрузки с погрешностью на критической частоте и с корректировкой этой погрешности. Основной максимум активной составляющей соответствует резонансной частоте 50.2 кГц ($k_t\ a = 4.33$); на критической частоте появляются ложные минимумы активной и реактивной составляющих, а после критической частоты – ложный максимум у активной составляющей электрической проводимости. Погрешность в данном случае оказывает большее влияние на активную составляющую электрической проводимости, чем на реактивную. Необходимо отметить, что критическая частота находится в рабочей полосе частот.

На рис. 3 представлены частотные характеристики чувствительности излучения, которая определена как отношение давления на расстоянии 1 м к приложенному электрическому напряжению. Частотная характеристика чувствительности излучения искажается дополнительным ложным максимумом вблизи критической частоты, что может привести к неправильной оценке рабочей полосы частот ПП.

На рис. 4 приведены нормированные на величину основного максимума диаграммы направленности ПП на критической частоте с погрешностью и с ее корректировкой, погрешность также приводит к искажению диаграммы направленности.

Выполнен анализ приведенных выше характеристик ПП при изменении его резонансной частоты, причем резонансная частота ПП варьировалась без изменения его внешних размеров, а следовательно, без изменения критических частот. Размеры a_1, a_2, l, l_1, l_2 изменялись так, чтобы сохранялась суммарная высота цилиндра и его внешний радиус. На рис. 5 приведены частотные характеристики чувствительности излучения ПП при изменении его резонансной частоты для двух вариантов: вариант 1 – резонансная частота увеличена; вариант 2 – резонансная частота уменьшена. Искажения частотной характеристики чувствительности при понижении резонансной частоты незначительны (кривая *2*), так как критическая частота выходит за рабочую полосу частот. При повышении резонансной частоты и ее приближении к критической происходит резкое искажение частотной характеристики (кривая *1*). Аналогичная ситуация наблюдается и на частотных характеристиках безразмерных активной и реактивной составляющих электрической проводимости (рис. 6).

Расчеты по комбинированному методу конечных и граничных элементов без корректировки погрешности выполнены по ранее разработанной программе [1]. Приведенные результаты с корректировкой погрешности получены с применением метода, предложенного в работе [8]. При использовании этого метода рассмотрена проблема выбора дополнительных точек. В статье [5] отме-

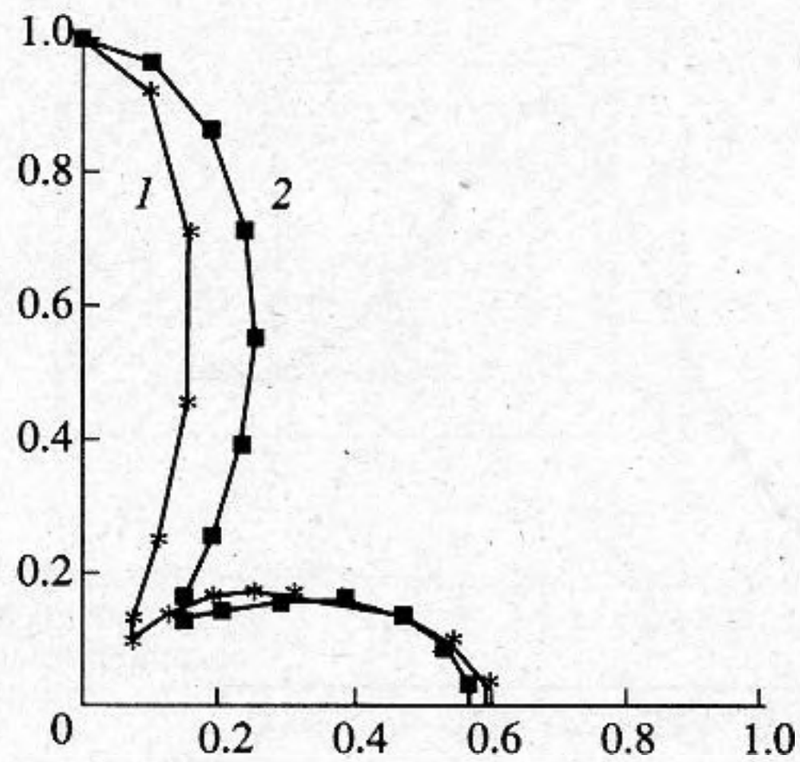

Рис. 4. Нормированные диаграммы направленности на критической частоте: *1* – расчет с погрешностью; *2* – расчет с корректировкой погрешности.

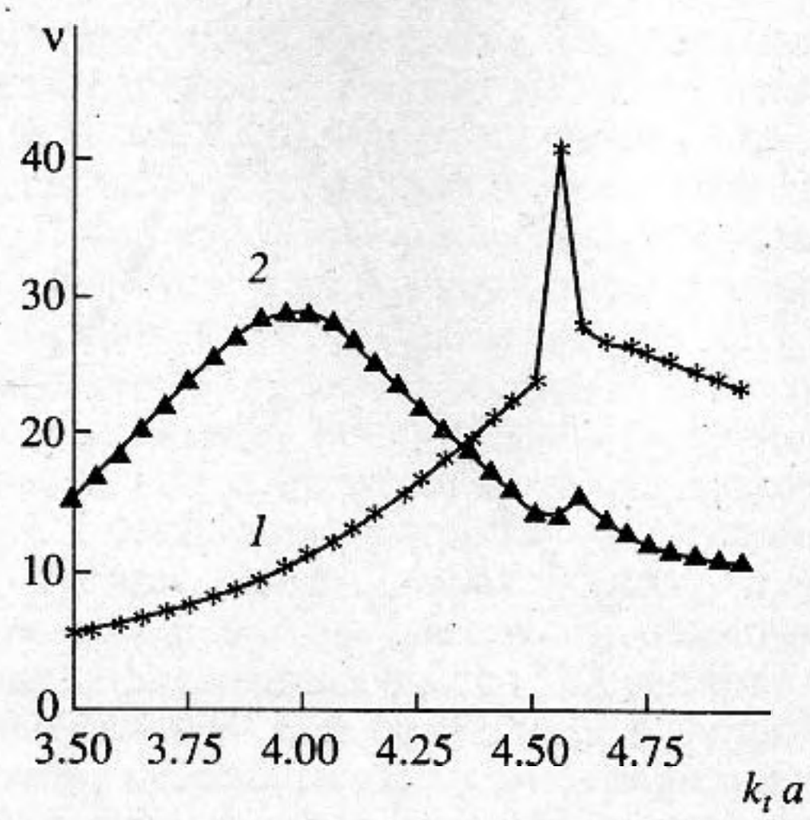

Рис. 5. Частотные характеристики чувствительности излучения пьезопреобразователя, Па/В м, при изменении его резонансной частоты: *1* – частота увеличена; *2* – частота уменьшена.

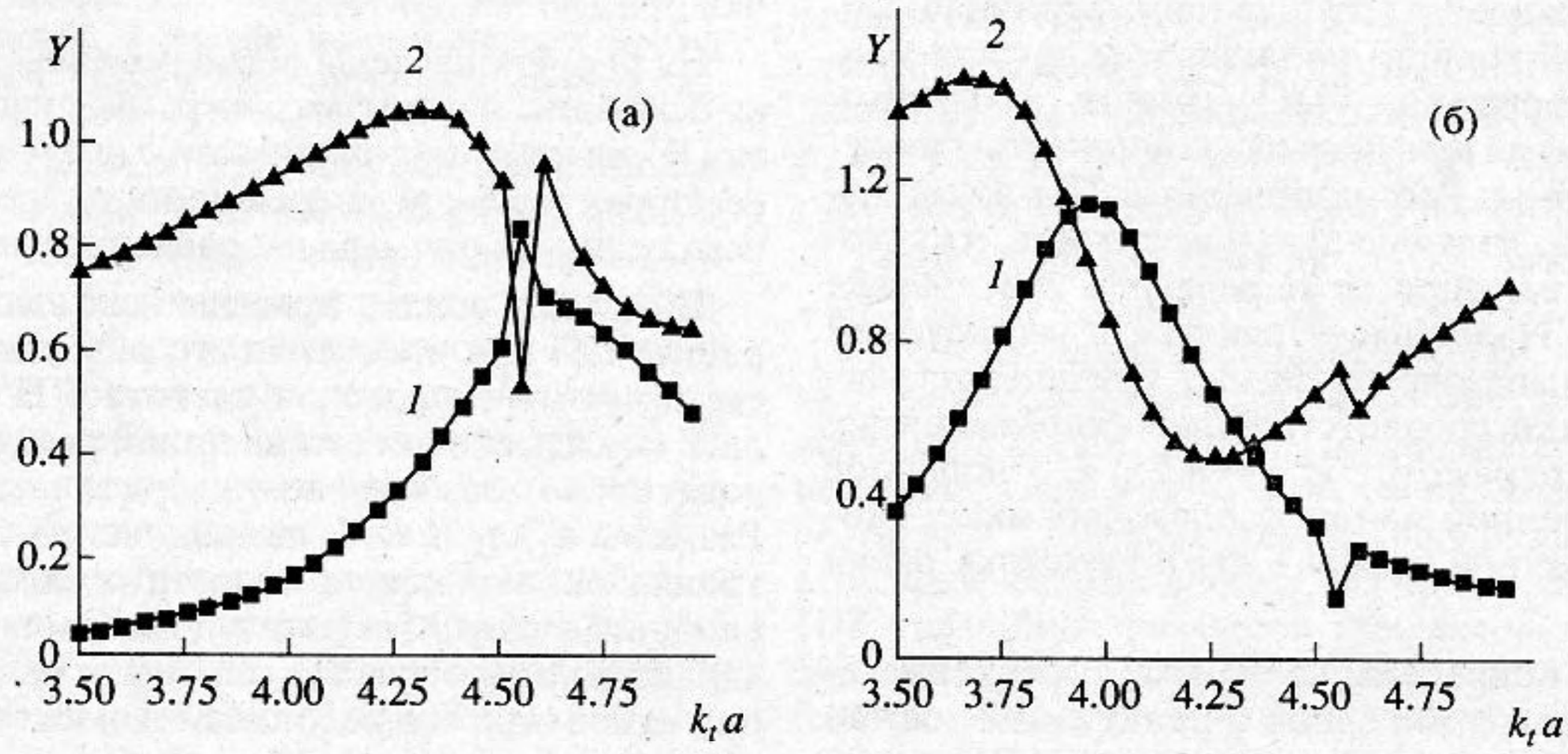

Рис. 6. Частотные характеристики безразмерной электрической проводимости пьезопреобразователя при изменении его резонансной частоты (*1* – активная составляющая; 2 – реактивная составляющая): а – частота увеличена; б – частота уменьшена.

чено, что эти точки не должны попадать на узловые линии собственных функций внутренней задачи Дирихле, но для ПП сложной формы собственные функции неизвестны без решения дополнительной задачи. Приведенные результаты с корректировкой погрешности получены с расположением дополнительных точек внутри объема ПП. Однако если эти точки располагать во внутренней области ПП, но вблизи его поверхности, то можно избежать их попадания на узловые линии для ПП, работающего на первых модах.

При введении комплексного волнового числа с небольшой мнимой частью для исследуемого ПП можно получить практически идентичные результаты, причем основной резонанс изменяется несущественно, в то время как ложный резонанс исчезает. Такой метод можно использовать для классификации ложных резонансов ПП сложной формы. Однако такой способ не решает полностью проблему погрешности МГЭ на критических частотах, т. е. он не является универсальным. Расчет импеданса излучения сферы показал, что введение комплексного волнового числа не исключает полностью погрешность на критической частоте, но значительно ее уменьшает.

Основные типы ПП работают в низкочастотном диапазоне, где плотность критических частот мала, поэтому применение метода [8] или введение комплексного волнового числа вполне решают проблему устранения погрешности МГЭ при анализе ПП комбинированным методом конечных и граничных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балабаев С.М., Ивина Н.Ф.* Анализ пьезопреобразователей комбинированным методом конечных и граничных элементов // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 2. С. 172–178.
2. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. С. 304.
3. *Cunefare K.A., Koopmann G., Brod K.* A boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers // Journ. Acoust. Soc. Am. 1989. V. 85. № 1. P. 39–48.
4. *Dokumaci E.* A study of the failure of numerical solutions in boundary element analysis of acoustic radiation problems // Journ. Sound and Vibr. 1990. V. 139. № 1. P. 83–97.
5. *Seybert A.F., Rengarajan T.K.* The use of CHIEF to obtain unique solutions for acoustic radiation using boundary integral equations // Journ. Acoust. Soc. Am. 1987. V. 81. № 5. P. 1299–1306.
6. *Stupfel B., Lavie A., Decarpigny J.-N.* Combined integral equation formulation and null-field method for the exterior acoustic problem // Journ. Acoust. Soc. Am. 1988. V. 83. № 3. P. 927–941.
7. *Wu T.W., Seybert A.F.* A weighted residual formulation for the CHIEF method in acoustics // Journ. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 90. № 3. P. 1608–1614.
8. *Schenck H.A.* Improved intergral formulation for acoustic radiation problems // Journ. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 44. № 1. P. 41–58.

The Effect of Error in a Combined Finite Boundary Element Analysis on the Basic Characteristics of Piezoelectric Transducers

S. M. Balabaev and N. F. Ivina

This paper considers the influence of solution error in a combined finite element–boundary element analysis on the computed basic characteristics (frequency characteristics of radiation sensitivity and of dimensionless conductance and susceptance with allowance for acoustic load and directional pattern) of a cylindrical piezoelectric transducer with volume deformation. A known method and a method based on introducing losses in the form of a complex wave number with minor imaginary part are used for eliminating the error.