АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 3, с. 304–309

УДК 534.08; 534.22

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ РОМБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ АКУСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

© 1997 г. С. В. Богданов

Институт Физики полупроводников СО РАН

630090 Новосибирск, проспект Ак. Лаврентьева, 13

Поступила в редакцию 17.01.96 г.

В работе предложен акустический метод определения упругих и пьезоэлектрических постоянных ромбических кристаллов класса $mm2$. Метод основан на измерении фазовых скоростей упругих волн в объемных образцах. Для определения всех девяти упругих и пяти пьезоэлектрических постоянных необходимо всего три образца, что выгодно отличает предлагаемый метод от используемого сейчас метода "резонанса–антирезонанса". Достоинством метода является также то, что он позволяет определить знаки пьезоэлектрических постоянных, что невозможно в методе "резонанса–антирезонанса". К недостаткам метода можно отнести необходимость высокоточных измерений фазовых скоростей упругих волн и высокую точность в определении ориентации образцов.

В предыдущей нашей работе [1] мы рассмотрели определение упругих c_{ijkl} и пьезоэлектрических e_{mpq} постоянных кристаллов следующих классов: 23, $\bar{4}3m$, 422, $\bar{4}2m$, 622, 222. Там же были приведены требования к точности измерения фазовых скоростей ($\delta V \sim 1$ м/с) и углов ориентации образцов ($\delta\varphi \sim 20'$) – при $K^2 \sim 0.01$ и желаемой точности определения $e_{mpq} \sim 10\%$. В настоящей работе мы рассмотрим ромбические кристаллы класса $mm2$. Как и в работе [1] будем полагать, что плотность образцов ρ и значения диэлектрической проницаемости ε нам известны.

Для ромбических кристаллов класса $mm2$ отличны от нуля следующие компоненты тензоров $\hat{c}$, $\hat{e}$, $\hat{\varepsilon}$:

$$c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}, c_{12}, c_{13}, c_{23};$$

$$e_{15}, e_{24}, e_{31}, e_{32}, e_{33};\ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}.$$

Для определения всех 9 упругих и 5 пьезоэлектрических постоянных нам потребуется четыре[1] образца в виде кубика с ребром "а". Требования к размерам образца, преобразователя и длине волны звука изложены в [1] – при выбранных размерах в образце должны распространяться плоские волны с фазовой скоростью, не отличающейся от таковой в безграничном кристалле.

Малое число образцов является существенным достоинством предлагаемого метода – при использовании классического метода "резонанса и антирезонанса" [2] авторам работы [3] для определения всех упругих и пьезоэлектрических постоянных бифталата калия (ромбический кристалл, класс $mm2$) потребовалось 7 стержней, 2 пластины и 3 объемных образца, т.е. всего двенадцать образцов.

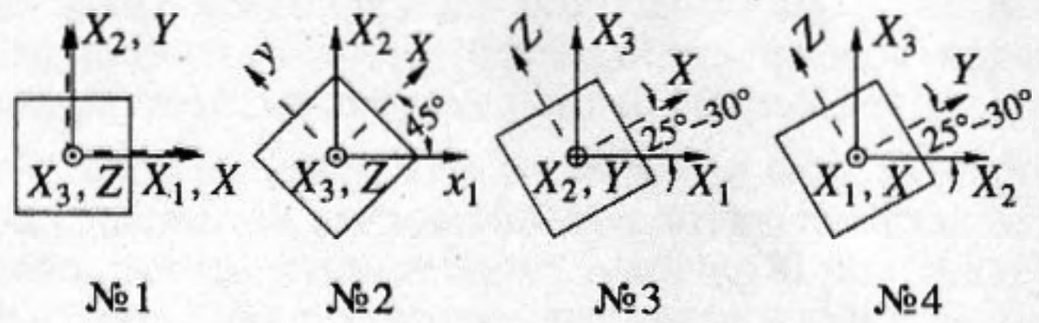
В предлагаемом методе образцы должны быть ориентированы следующим образом (ребра кубика являются рабочими осями X, Y, Z образца) – см. рисунок 1:

Образец № 1 – ориентирован строго по кристаллофизическим осям X_1, X_2, X_3.

Образец № 2 – повернут вокруг кристаллофизической оси X_3 на угол $\alpha = 45°$.

Образец № 3 – повернут вокруг кристаллофизической оси X_2 на угол $\varphi \cong 25°–30°$.

Образец № 4 – повернут вокруг кристаллофизической оси X_1 на угол $\psi \cong 25°–30°$.



Взаимное расположение кристаллофизических осей X_1, X_2, X_3 и рабочих осей X, Y, Z образцов.

[1] При необходимости можно ограничиться 3 образцами №№ 2, 3, 4. На них можно провести все измерения, выполняемые на образце № 1, но менее удобно.

Компоненты Γ_{ij} тензора Кристофеля–Грина (К–Г) для кристаллов класса $mm2$ имеют следующий вид [4]:

$$\Gamma_{11} = c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{55}n_3^2 + \frac{1}{\varepsilon}(e_{31} + e_{15})^2 n_1^2 n_3^2,$$

$$\Gamma_{22} = c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{44}n_3^2 + \frac{1}{\varepsilon}(e_{32} + e_{24})^2 n_2^2 n_3^2,$$

$$\Gamma_{33} = c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2 + c_{33}n_3^2 + \frac{1}{\varepsilon}(e_{15}n_1^2 + e_{24}n_2^2 + e_{33}n_3^2)^2,$$

$$\Gamma_{12} = (c_{12} + c_{66})n_1 n_2 + \frac{1}{\varepsilon}(e_{31} + e_{15})(e_{32} + e_{24})n_1 n_2 n_3^2,$$

$$\Gamma_{13} = (c_{13} + c_{55})n_1 n_3 + \frac{1}{\varepsilon}(e_{31} + e_{15}) \times \qquad (1)$$

$$\times (e_{15}n_1^2 + e_{24}n_2^2 + e_{33}n_3^2)n_1 n_3,$$

$$\Gamma_{23} = (c_{23} + c_{44})n_2 n_3 + \frac{1}{\varepsilon}(e_{32} + e_{24}) \times$$

$$\times (e_{15}n_1^2 + e_{24}n_2^2 + e_{33}n_3^2)n_2 n_3,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{11}n_1^2 + \varepsilon_{22}n_2^2 + \varepsilon_{33}n_3^2.$$

Здесь – $n_{1,2,3}$ – направляющие косинусы волновой нормали **n**. Для упрощения записи здесь (и в дальнейшем) мы опустили у упругих постоянных c_{ijkl}^E индекс "E" (измерено при неизменном электрическом поле), а у диэлектрической проницаемости ε_{mn}^ξ индекс "ξ" (измерено при неизменных деформациях).

Таким образом, $c_{ijkl} \equiv c_{ijkl}^E$, а $\varepsilon_{mn} \equiv \varepsilon_{mn}^\xi$.

I. ИЗМЕРЕНИЯ НА ОБРАЗЦЕ № 1

Определение упругих постоянных начнем с измерений скоростей $V_{[n_1 n_2 n_3]}^{[u_1 u_2 u_3]}$ упругих волн, имеющих волновую нормаль, совпадающую с кристаллофизическими осями X_1, X_2, X_3. Индексы в квадратных скобках у скорости V являются направляющими косинусами (или кратными им величинами): нижние – вектора волновой нормали **n**, верхние – вектора смещения **u**. Всего необходимо выполнить измерения 8 скоростей: трех продольных и 5 поперечных (желательно измерить скорости всех 6 поперечных волн – это позволит определить c_{66} из 2 независимых измерений и оценить их точность). Значения всех 9 скоростей таковы:

$V_{[100]}^{[100]} = \sqrt{c_{11}/\rho}$	$V_{[100]}^{[010]} = \sqrt{c_{66}/\rho}$	$V_{[100]}^{[001]} = \sqrt{c_{55}^D/\rho}$
$V_{[010]}^{[100]} = \sqrt{c_{66}/\rho}$	$V_{[010]}^{[010]} = \sqrt{c_{22}/\rho}$	$V_{[010]}^{[001]} = \sqrt{c_{44}^D/\rho}$
$V_{[001]}^{[100]} = \sqrt{c_{55}/\rho}$	$V_{[001]}^{[010]} = \sqrt{c_{44}/\rho}$	$V_{[010]}^{[001]} = \sqrt{c_{33}^D/\rho}$

Здесь $c_{33}^D = c_{33} + e_{33}^2/\varepsilon_{33}$; $c_{44}^D = c_{44} + e_{24}^2/\varepsilon_{22}$; $c_{55}^D = c_{55} + e_{15}^2/\varepsilon_{11}$.

Отметим, что при распространении упругих волн вдоль кристаллофизических осей кристалла класса $mm2$ все волны являются "чистыми". Пьезоактивными являются моды, имеющие смещение **u** вдоль полярной оси X_3. Только для них возникает пьезоэлектрическая реакция и упругая постоянная возрастает от c^E до c^D.

Измерив упомянутые скорости и составив выражения ρV^2, определим следующие упругие и пьезоэлектрические постоянные:

$$c_{11}, c_{22}, c_{33}^D, c_{44}, c_{44}^D, c_{55}, c_{55}^D, c_{66}; e_{15}^2, e_{24}^2.$$

Для дальнейшего условно примем, что $e_{15} = +\sqrt{e_{15}^2}$.

Заметим, что для пьезоэлектрических постоянных в физическом смысле имеют значения лишь их относительные знаки – без ущерба для "физики" знаки всех пьезопостоянных можно изменить на обратные. "Истинные" знаки являются результатом международного соглашения – см., например, [5].

II. ИЗМЕРЕНИЯ НА ОБРАЗЦЕ № 2

Для определения упругой постоянной c_{12} и относительного знака пьезопостоянной e_{24} нам потребуется образец № 2. Волновая нормаль в этом случае лежит в плоскости (001). Ее направляющие косинусы $n_1 = n_2$, $n_3 = 0$. Подставив эти значения n_i в (1), выписав уравнения К–Г, получим дисперсионное уравнение

$$(\Gamma_{33} - \rho V^2)[(\Gamma_{11} - \rho V^2)(\Gamma_{22} - \rho V^2) - \Gamma_{12}^2] = 0.$$

Видно, что волна, поляризованная вдоль X_3, "чистая" и пьезоактивная. Ее скорость $V_{[110]}^{[001]}$ связана с упругими и пьезоэлектрическими постоянными соотношением

$$\rho(V_{[110]}^{[001]})^2 = \Gamma_{33} = \frac{1}{2}(c_{44} + c_{55}) + \frac{1}{2}\frac{(e_{15} + e_{24})^2}{(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}.$$

Таким образом

$$(e_{15}+e_{24})^2 = (\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})[2\rho(V_{[110]}^{[001]})^2-(c_{44}+c_{55})].$$

Это позволяет установить знак e_{24} относительно принятого нами положительным e_{15}: если $(e_{15}+e_{24})^2 > (e_{15}^2+e_{24}^2)$, то e_{24} того же знака, что и e_{15}, если меньше – то противоположного.

Для определения упругой постоянной c_{12} необходимо измерить скорости волн, поляризованных в плоскости (001): квазипродольной (быстрой) – $V_{[110]}^{[1]}$ и квазипоперечной (медленной) – $V_{[110]}^{[2]}$.

Обозначая $x = \rho V^2$ и разрешая квадратное уравнение

$$(\Gamma_{11}-x)(\Gamma_{22}-x)-\Gamma_{12}^2 = 0,$$

получим:

$$x_1 = \rho(V_{[110]}^{[1]})^2 = \frac{1}{2}(\Gamma_{11}+\Gamma_{22}) + \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_{11}-\Gamma_{22})^2+4\Gamma_{12}^2},$$

$$x_2 = \rho(V_{[110]}^{[2]})^2 = \frac{1}{2}(\Gamma_{11}+\Gamma_{22}) - \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_{11}-\Gamma_{22})^2+4\Gamma_{12}^2}.$$

Искомая упругая постоянная c_{12} содержится в Γ_{12}. Ее можно найти, использовав либо x_1, либо x_2, либо их разность (x_1-x_2).

Так, в последнем случае

$$c_{12} = \sqrt{(x_1-x_2)^2-\frac{1}{4}(c_{11}-c_{22})^2}-c_{66}.$$

С нашей точки зрения целесообразно выполнить измерения скоростей как квазипродольной $V_{[110]}^{[1]}$, так и квазипоперечной $V_{[110]}^{[2]}$ волн и найти c_{12} всеми тремя способами. В качестве c_{12} следует взять среднее. Это также позволит оценить точность выполненных измерений.

III. ИЗМЕРЕНИЯ НА ОБРАЗЦЕ № 3

Образец № 3 необходим для предварительного определения упругой постоянной c_{13} и пьезоэлектрических постоянных e_{31} и e_{33}. Для этих целей необходимо выполнить измерения скоростей квазипродольной и квазипоперечной волн, распространяющихся в плоскости (010) и поляризованных в этой же плоскости. При распространении упругих волн в плоскости (010) направляющие косинусы волновой нормали будут: $n_1 \neq 0$; $n_2 = 0$; $n_3 \neq 0$ и $n_1^2 + n_3^2 = 1$. Дисперсионное уравнение для этого случая

$$(\Gamma_{22}-\rho V^2)[(\Gamma_{11}-\rho V^2)(\Gamma_{33}-\rho V^2)-\Gamma_{13}^2] = 0.$$

Волна, поляризованная вдоль X_2, чистая и не пьезоактивная. От c_{13} она не зависит. Нас будут интересовать волны, поляризованные в плоскости (010). Для них

$$(\Gamma_{11}-\rho V^2)(\Gamma_{33}-\rho V^2)-\Gamma_{13}^2 = 0.$$

Обозначая $\rho V^2 = y$ и решая квадратное уравнение, получим

$$y_1 = \rho(V_{[n_1 0 n_3]}^{[1]})^2 = \frac{1}{2}(\Gamma_{11}+\Gamma_{33}) + \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_{11}-\Gamma_{33})^2+4\Gamma_{13}^2},$$

$$y_2 = \rho(V_{[n_1 0 n_3]}^{[2]})^2 = \frac{1}{2}(\Gamma_{11}+\Gamma_{33}) - \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_{11}-\Gamma_{33})^2+4\Gamma_{13}^2}. \quad (2)$$

Неизвестная c_{13} содержится в Γ_{13}.

На первый взгляд кажется, что, выбрав некоторый конкретный угол $\varphi = \varphi_1$, можно из соотношений (2) определить Γ_{13}, а затем и c_{13}, аналогично тому, как это было сделано при определении c_{12}. Однако, поступить столь "прямолинейно" нельзя, поскольку Γ_{11}, Γ_{33}, Γ_{13} содержат неизвестные пьезоэлектрические постоянные.

Используя y_1 и y_2, можно составить несколько независимых уравнений. Однако, они будут содержать избыточное число неизвестных. Подобная ситуация часто встречается при определении упругих постоянных. Недостающие уравнения в этом случае получают, выполнив аналогичные измерения для других срезов кристалла, т.е. на других образцах с иной ориентацией волновой нормали. При этом структура уравнений не изменяется, но изменяются коэффициенты при неизвестных. Это позволяет решить полученную систему уравнений и найти все неизвестные. К сожалению, подобный метод непригоден для рассматриваемого случая. Дело в том, что все неизвестные пьезопостоянные в составленных таким способом уравнениях входят здесь с одним и тем же коэффициентом и разделить их не представляется возможным. Поясним это следующим примером. Пусть мы хотим определить e_{31} и e_{33}. Для этой цели составим сумму $S = y_1 + y_2 = \Gamma_{11} + \Gamma_{33}$ один раз при измерениях на одном образце при $\varphi = \varphi_1$ и второй раз при измерениях на другом образце при $\varphi = \varphi_2$. При этом мы ожидаем, что коэффициенты при e_{31} и e_{33} изменятся по-разному, и мы сможем решить полученную систему уравнений.

Однако, на самом деле этого не произойдет. Действительно, воспользовавшись (1), легко убедиться, что

$$S = y_1 + y_2 = \Gamma_{11} + \Gamma_{33} = (c_{11} + c_{55})n_1^2 + \\ + (c_{33}^D + c_{55})n_3^2 + \frac{1}{\varepsilon}e_{15}^2 n_1^4 + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\left[(e_{15} + e_{31})^2 + \left(2e_{15}e_{33} - \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}e_{33}^2\right)\right]n_1^2 n_3^2 \quad (3)$$

или

$$S = (c_{11} + c_{55})n_1^2 + (c_{33}^D + c_{55})n_3^2 + \\ + \frac{1}{\varepsilon}e_{15}^2 n_1^4 + \frac{1}{\varepsilon}N n_1^2 n_3^2. \quad (3a)$$

Здесь

$$N = m + k;\ m = (e_{15} + e_{31})^2;\ k = \left(2e_{15}e_{33} - \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}e_{33}^2\right).$$

Таким образом, сумма, стоящая в квадратных скобках в (3), выступает как единое неизвестное N. Его составляющие e_{31} и e_{33} не разделяются при переходе к другому образцу с другой ориентацией волновой нормали.

В данной работе мы обошли эту трудность, произведя замену неизвестных и выполнив измерения при двух различных ориентациях волновой нормали. В качестве новых неизвестных выберем

$$m = (e_{15} + e_{31})^2 \text{ и } k = 2e_{15}e_{33} - \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}e_{33}^2.$$

Рассмотрим их более подробно.

Неизвестная "m" является существенно положительной величиной. Если она найдена, то пьезоэлектрическая постоянная e_{31} определяется соотношением

$$e_{31} = -e_{15} \pm \sqrt{m}. \quad (4)$$

Оба значения e_{31} имеют физический смысл и отдать предпочтение какому-либо из них пока невозможно.

Неизвестная "k" может быть как больше, так и меньше нуля. Действительно, "k" можно представить в виде

$$k = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}e_{33}^2\left(2\frac{\varepsilon_{33}e_{15}}{\varepsilon_{11}e_{33}} - 1\right).$$

Отсюда видно, что

$k > 0$, если e_{15} и e_{33} одного знака и $e_{33} < 2\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}e_{15}$;

$k < 0$, если а) e_{15} и e_{33} разных знаков,

б) e_{15} и e_{33} одного знака и $e_{33} > 2\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}e_{15}$.

Если величина "k" нам известна, то пьезоэлектрическая постоянная e_{33} находится из квадратного уравнения

$$e_{33}^2 - 2\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}e_{15}e_{33} + \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}k = 0.$$

Разрешив его, получим

$$e_{33} = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}e_{15}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{11}k}{\varepsilon_{33}e_{15}^2}}\right]. \quad (5)$$

Оба решения имеют физический смысл.

Напомним, что сумма $(m + k) = N$, а величина N легко находится по экспериментальным данным при любом угле φ. Поэтому в дальнейшем целесообразно перейти к одной неизвестной и исключить "k", заменив ее разностью $k = (N - m)$. При этом N, как видно из (3а), будет

$$N = \frac{\varepsilon}{n_1^2 n_3^2}\left[S - (c_{11} + c_{55})n_1^2 - \\ - (c_{33}^D + c_{55})n_3^2 - \frac{1}{\varepsilon}e_{15}^2 n_1^4\right]. \quad (6)$$

Рассмотрим ход дальнейших вычислений. Обратим внимание на то, что величина

$$\frac{\Gamma_{13}}{n_1 n_3} - \frac{1}{\varepsilon}(e_{15} + e_{31})(e_{15}n_1^2 + e_{33}n_3^2) = \\ = c_{13} + c_{55} = \text{const}, \quad (7)$$

т.е. от величины угла φ не зависит. Поэтому, составив подобные выражения для двух углов $\varphi = \varphi_1$ ($n_1 \equiv n_{11}$, $n_3 \equiv n_{31}$, $\varepsilon \equiv \varepsilon_1$) и $\varphi = \varphi_2$ ($n_1 \equiv n_{12}$, $n_3 \equiv n_{32}$, $\varepsilon \equiv \varepsilon_2$) и взяв их разность, получим связь между Γ_{13} и пьезоэлектрическими постоянными:

$$\frac{\Gamma_{13}(\varphi_2)}{n_{12}n_{32}} - \frac{\Gamma_{13}(\varphi_1)}{n_{11}n_{31}} = \\ = \frac{(n_{11}^2 n_{32}^2 - n_{12}^2 n_{31}^2)}{\varepsilon_1\varepsilon_2}(e_{15} + e_{31})(e_{33}\varepsilon_{11} - e_{15}\varepsilon_{33}).$$

Подставив сюда значение e_{33} из (5), получим окончательно

$$g\left[\frac{\Gamma_{13}(\varphi_2)}{n_{12}n_{32}} - \frac{\Gamma_{13}(\varphi_1)}{n_{11}n_{31}}\right] = (\pm\sqrt{m})(\pm\sqrt{1 - b(N - m)}). \quad (8)$$

Здесь

$$g = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_{33}e_{15}(n_{11}^2 n_{32}^2 - n_{12}^2 n_{31}^2)};\quad b = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}e_{15}^2}.$$

Значение Γ_{13} находится из соотношений (2)

$$\Gamma_{13} = \frac{1}{2}\sqrt{(y_1 - y_2)^2 - (\Gamma_{11} - \Gamma_{33})^2} \text{ или}$$

$$\Gamma_{13} = \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{33} - y_1 y_2}.$$

Однако, Γ_{11} и Γ_{33} являются функцией неизвестной "m"

$$\Gamma_{11} = G_1 + g_1 m; \quad \Gamma_{33} = G_3 + g_1(N - m).$$

Здесь

$$G_1 = c_{11}n_1^2 + c_{55}n_3^2, \quad G_3 = c_{55}n_1^2 + c_{33}^D n_3^2 + \frac{1}{\varepsilon}e_{15}^2 n_1^4,$$

$$g_1 = \frac{n_1^2 n_3^2}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11}n_1^2 + \varepsilon_{33}n_3^2.$$

Таким образом, (8) является иррациональным уравнением для определения "m". Обозначим его корень через "m_0". Некоторые выводы о знаках перед корнями в правой части уравнения (8) можно сделать и не решая его. Действительно, левая часть (8) имеет вполне определенный знак. Поэтому, чтобы существовало равенство, необходимо, чтобы и его правая часть имела тот же знак. Это попарно определяет два варианта знаков корней, входящих в (8): при положительной левой части это либо (+)(+), либо (–)(–); при отрицательной – это либо (+)(–), либо (–)(+). Оба варианта знаков равноправны.

Определение Γ_{13}, как было отмечено выше, необходимо выполнить при двух ориентациях волновой нормали в плоскости (010): при углах $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$. Для этого нам потребуется образец № 3, повернутый вокруг оси X_2 на угол $\varphi = \varphi_1$. Измерения при $\varphi = \varphi_2$ проводятся на том же образце № 3, но на других гранях, ортогональных первым. При этом $\varphi_2 = 90° - \varphi_1$. Не останавливаясь на соображениях, положенных в основу выбора величины φ_1, сразу скажем, что его приемлемым значением, видимо, будет $\varphi_1 \cong 25°–30°$.

Уравнение (8) удобно решать методом прямой подстановки.

Для этого перепишем его в виде

$$A(m_i) - B(m_i) = \Delta. \tag{8a}$$

Здесь

$$A(m_i) = g\left[\frac{\Gamma_{13}(\varphi_2, m_i)}{n_{12}n_{32}} - \frac{\Gamma_{13}(\varphi_1, m_i)}{n_{11}n_{31}}\right],$$

$$B(m_i) = \pm(\sqrt{m_i})(\sqrt{1 - b(N - m_i)}).$$

Для $B(m_i)$ выбран знак, совпадающий со знаком $A(m_i)$. Задаваясь значениями m_i, рассчитываем $A(m_i)$, $B(m_i)$ и находим такое значение $m_i = m_0$, при котором $A(m_0) = B(m_0)$ и Δ обращается в нуль.

Располагая ЭВМ, несложно выполнить соответствующие расчеты и найти m_0. При выборе начального ориентировочного значения $m = m_1$ можно исходить из величины e_{15}, полагая $m_1 \approx e_{15}^2$.

Найдя m_0 можно приступить к определению e_{33}. К сожалению, свобода выбора знака в (5) остается. Поэтому оба значения e_{33} равноправны.

IV. ИЗМЕРЕНИЯ НА ОБРАЗЦЕ № 4

Для окончательного определения e_{33}, e_{31}, e_{32} и упругих постоянных c_{13}, c_{23}, c_{33} необходимо обратиться к образцу № 4 и измерить скорости квазиволн, распространяющихся в плоскости (100). Направляющие косинусы волновой нормали в этом случае будут: $n_1 = 0$, $n_2 \neq 0$, $n_3 \neq 0$. Измерения необходимо выполнить при двух ориентациях волновой нормали аналогично тому, как это было сделано на образце № 3. Таким образом, образец № 4 должен быть повернут вокруг оси X_1 на угол $\psi = \psi_1$, который мы, как и φ_1, выберем порядка 25°–30°. Измерения скоростей $V_{[0n_2n_3]}^{[1]}$ и $V_{[0n_2n_3]}^{[2]}$, как и раньше, выполним на двух ортогональных гранях образца, т.е. при $\psi_2 = 90° - \psi_1$. Все вычисления полностью эквивалентны выполненным на образце № 3.

Все полученные выше соотношения остаются в силе при замене индекса $_{(1)}$ на индекс $_{(2)}$, т.е. следует заменить: $n_1 \longrightarrow n_2$, $c_{11} \longrightarrow c_{22}$, $c_{55} \longrightarrow c_{44}$, $e_{15} \longrightarrow e_{24}$, $e_{31} \longrightarrow e_{32}$, $\varepsilon_{11} \longrightarrow \varepsilon_{22}$. Как и прежде, из экспериментальных данных определяются y_1', y_2', N' – см. (6). Отметим, что теперь

$$m' = (e_{24} + e_{32})^2; \quad k' = 2e_{24}e_{33} - \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}}e_{33}^2.$$

Затем рассчитываются $\Gamma_{23}(\psi_{1,2})$, устанавливается знак у произведения корней

$$\sqrt{m'}\sqrt{1 - b'(N' - m')},$$

решается уравнение (8'а) и находится его корень m_0'. После того, как установлено значение m_0', вычисляется

$$e_{33} = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{22}}e_{24}\left[1 \pm \sqrt{1 - b'(N' - m_0')}\right].$$

Одно из значений e_{33}, найденных на образце № 4, окажется общим и для образца № 3. Оно и будет истинным значением e_{33}. Это однозначно определит знак корня в (5). Поскольку знак произведения корней в (8) был найден ранее, то это определит и знаки корней $\sqrt{m_0}$ и $\sqrt{m_0'}$, что позволит однозначно найти e_{31} и e_{32} – см. (4), а затем, используя Γ_{13} и Γ_{23},

также c_{13} и c_{23} – см. (7). Напомним, что определение как c_{13}, так и c_{23} следует выполнить дважды: при углах φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2 соответственно, и взять среднее. Последнее, что остается сделать, это подсчитать $c_{33} = c_{33}^D - e_{33}^2/\varepsilon_{33}$. Теперь нам известны все упругие и пьезоэлектрические постоянные.

Напомним, однако, что знак у e_{15} был условно принят положительным. Для того, чтобы убедиться в правильности этого выбора, следует по найденным c_{ijkl}^E рассчитать упругие податливости s_{ijkl}^E, а затем – пьезоэлектрический модуль $d_{33} = e_{31}s_{13}^E + e_{32}s_{23}^E + e_{33}s_{33}^E$. У ромбических кристаллов класса $mm2$ принято [5] считать $d_{33} > 0$. Поэтому, если d_{33} окажется отрицательным, то знаки всех пьезоэлектрических постоянных следует изменить на обратные.

В заключение отметим, что предлагаемый метод является единственным непосредственным методом определения пьезоэлектрических постоянных e_{mpq} как по величине, так и по знаку. Это тем более существенно, что знаки пьезоэлектрических постоянных экспериментально можно определить только у d_{mpq} и g_{mpq} и только статическим методом. Широко распространенный динамический метод [2] определения d_{mpq} не позволяет этого сделать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданов С.В.* Определение упругих и пьезоэлектрических постоянных ряда кристаллов акустическим методом // Акустический журнал. 1995. Т. 41. № 5. С. 751.
2. IRE Standarts of Piesoelectric Crystals // Proc. IRE. 1958. V. 46. P. 764.
3. *Беляев Л.М., Беликова Г.С., Гильварг А.Б., Сильвестрова И.М.* Выращивание кристаллов бифталата калия и их оптические, пьезоэлектрические и упругие свойства // Кристаллография. 1969. Т. 14. № 4. С. 645.
4. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. С. 106, 229.
5. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука,1975. С. 622.

Determination of the Elastic and Piezoelectric Constants of Orthorhombic Crystals by an Acoustical Method

S. V. Bogdanov

An acoustical method is proposed for the determination of the elastic and piezoelectric constants in orthorhombic crystals of class mm^2. The method is based on the measurements of the phase velocities of elastic waves in cube- shaped samples. Only three samples are required to determine all nine elastic and five piezoelectric constants. This is an advantage of the proposed method over the conventional method of resonance and antiresonance frequencies. Another advantage is that the proposed method determs the signs of piezoelectric constants, which is impossible with the resonance–antiresonance method. The disadvantage of the proposed method lies in the fact that it requires high-precision measurements of the phase velocities of elastic waves and a highly accurate sample orientation.