АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 3, с. 310–314

УДК 534.2:539.2

ОБРАТНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНАХ КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

© 1997 г. П. В. Бурлий, П. П. Ильин, И. Я. Кучеров

Киевский университет им. Тараса Шевченко
Украина, 252017 Киев, ул. Владимирская, 64

Поступила в редакцию 12.03.96 г.

Теоретически исследовано распространение поперечных акустических волн в пластинах пьезоэлектрических кубических кристаллов в направлении [110] в плоскости $(\bar{1}10)$. Дисперсионные уравнения были получены путем решения системы уравнений теории упругости и электродинамики совместно со стандартными граничными условиями на свободных поверхностях. Показана возможность существования в пластинах пьезоэлектрических кубических кристаллов поперечных обратных волн (с противоположно направленными фазовой и групповой скоростями) и волн с комплексными волновыми числами. Проанализировано влияние наличия проводящих слоев на поверхностях пластины.

Акустические волны в ограниченных твердых телах характеризуются большим разнообразием свойств. Одной из интересных особенностей является возможность существования обратных волн, в частности, в пластинах и цилиндрах при определенных условиях. Термин "обратная волна" используется для обозначения волнового движения, в котором фазовая и групповая скорости направлены в противоположные стороны. В изотропных пластинах обратные волны изучены достаточно подробно [1–5]. Что касается обратных волн в пластинах пьезоэлектрических кристаллов, то они практически не изучены, имеются лишь отдельные работы [6, 7]. Вопрос этот интересен прежде всего тем, что пьезоэффект в некоторых случаях оказывает довольно сильное влияние на характеристики акустических волн, например, делает возможным существование поперечных поверхностных [8, 9] и поперечных обратных акустических волн [7].

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию распространения обратных поперечных волн в пластинах пьезоэлектрических кубических кристаллов со свободными поверхностями.

Задача о распространении акустических волн сводится к нахождению дисперсионных уравнений. Геометрия рассматриваемой задачи представлена на рис. 1. Волны распространяются в плоскости $(\bar{1}10)$ в направлении [110], со смещениями, направленными вдоль [001]. Пластина окружена диэлектрической средой, например вакуумом.

Для получения дисперсионных уравнений, которые описывают распространение поперечных акустических волн в пластинах пьезоэлектрических кубических кристаллов, необходимо решить систему уравнений движения теории упругости и электродинамики совместно с соответствующими граничными условиями. Задачу будем решать в электростатическом приближении.

Исходные уравнения для линейной пьезоэлектрической среды имеют вид:

$$\rho\partial^2 U_i/\partial t^2 = c_{ijml}\partial^2 U_l/\partial x_j\partial x_m - e_{kij}\partial E_k/\partial x_j, \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 0, \quad D_i = \varepsilon_{ij}E_j + e_{iml}U_{ml}, \quad (2)$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

где U_i, E_i и D_i – компоненты векторов механических смещений, электрического поля и электрического смещения, U_{ml} – тензор деформации, c_{ijml}, e_{kij} и ε_{ij} – упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные, ρ – плотность, t – время.

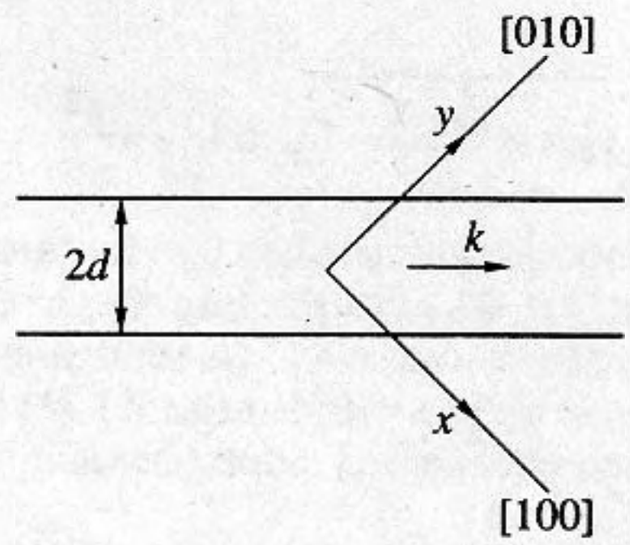

Рис. 1.

Уравнения для электрического поля в вакууме за пределами пластины имеют вид:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}^0 = 0,\ \ \mathbf{D}^0 = \varepsilon_0\mathbf{E}^0, \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^0 = 0, \tag{5}$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная вакуума.

Граничные условия на свободных поверхностях пластины ($x - y = \pm\sqrt{2}\,d$) включают отсутствие механических напряжений и непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля и нормальной компоненты электрического смещения:

$$T_{ij}n_j = 0,\quad T_{ij} = c_{ijml}U_{ml} - e_{kij}E_k, \tag{6}$$

$$E_t = E_t^0, \tag{7}$$

$$D_n = D_n^0, \tag{8}$$

где n_j – компоненты единичного вектора нормали к поверхностям пластины, d – полутолщина пластины.

Решения для электрического поля и упругих смещений будем искать в виде

$$f = f_0\exp\{ik[vt - (x+y)/\sqrt{2} - \beta(x-y)/\sqrt{2}]\}, \tag{9}$$

где $v = \omega/k$ – фазовая скорость, k – волновое число, ω – круговая частота акустических волн. Наличие границ учитывается параметром β, который описывает изменение амплитуд в направлении нормали к поверхностям пластины.

Анализ уравнений (1)–(3) и (6)–(8) показывает, что в кубических кристаллах акустические волны, распространяющиеся в этом направлении, распадаются на волны Лэмба и пьезоактивные поперечные волны.

Из уравнений (1)–(3) с учетом (9) и вида матриц упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных для кристаллов кубической симметрии получаем уравнение для определения параметра β поперечных волн:

$$(\kappa^2 - 1 - \beta^2)(1 + \beta^2) = K^2(1 - \beta^2)^2, \tag{10}$$

где $K^2 = e_{14}^2/\varepsilon_{11}c_{44}$ – коэффициент электромеханической связи, $\kappa^2 = \omega^2\rho/k^2c_{44}$. Поскольку уравнение (10) биквадратное, то решения для всех величин в пластине будет иметь вид:

$$f = \sum_{n=1}^{4} f_{n0}\times \tag{11}$$
$$\times\exp\{ik[vt - (x+y)/\sqrt{2} - \beta_n(x-y)/\sqrt{2}]\}$$

Из (4), (5) и (9) находим значения β^0 для электрического поля, сопровождающего поперечные акустические волны за пределами пластины: $\beta_{1,2}^0 = \pm i$. Выбирая решения, не расходящиеся на бесконечности, для компонент электрического поля E_i^0 в вакууме получаем:

$$E_{i\pm}^0 = E_{i\pm0}^0\exp\{ik[vt - (x+y)/\sqrt{2}]\}\times \tag{12}$$
$$\times\exp[\pm k(x-y)/\sqrt{2}],$$

где "+" для $(x - y) < 0$, "–" для $(x - y) > 0$.

Подставляя решения (11) и (12) в граничные условия (6)–(8), получаем систему уравнений, описывающих распространение нормальных поперечных волн:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{4} A_nE_{tn0}\exp(i\beta_nkd) = 0,\\
&\sum_{n=1}^{4} A_nE_{tn0}\exp(-i\beta_nkd) = 0,\\
&\sum_{n=1}^{4} (B_n - i\varepsilon_0/\varepsilon_{11})E_{tn0}\exp(i\beta_nkd) = 0,\\
&\sum_{n=1}^{4} (B_n + i\varepsilon_0/\varepsilon_{11})E_{tn0}\exp(-i\beta_nkd) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где

$$A_n = \beta_n[(1+\beta_n^2)/(1-\beta_n^2) - K^2],$$

$$B_n = 2\beta_n/(1-\beta_n^2),\quad E_{tn0} = (E_{xn0} + E_{yn0})/\sqrt{2}.$$

Приравняв к нулю детерминант системы (13), получаем дисперсионное уравнение. Оно распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned}
&A_1[B_2 + (\varepsilon_0/\varepsilon_{11})\operatorname{tg}(\beta_2kd)] =\\
&= A_2[B_1 + (\varepsilon_0/\varepsilon_{11})\operatorname{tg}(\beta_1kd)],
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&A_1[B_2 - (\varepsilon_0/\varepsilon_{11})\operatorname{ctg}(\beta_2kd)] =\\
&= A_2[B_1 - (\varepsilon_0/\varepsilon_{11})\operatorname{ctg}(\beta_1kd)].
\end{aligned} \tag{15}$$

При выводе уравнений (14) и (15) учитывалось, что $\beta_3 = -\beta_1$ и $\beta_4 = -\beta_2$.

Анализ распределения упругих смещений по сечению пластины для волн, описываемых этими уравнениями, показывает, что уравнение (14) описывает антисимметричные (*sa*), а уравнение (15) симметричные (*ss*) волны.

Уравнения (14) и (15) являются трансцендентными и их решение в общем случае возможно только численными методами. Поскольку обратные волны могут существовать вблизи критических частот, то для проведения аналитического анализа рассмотрим приближенные дисперсионные уравнения, которые описывают поперечные

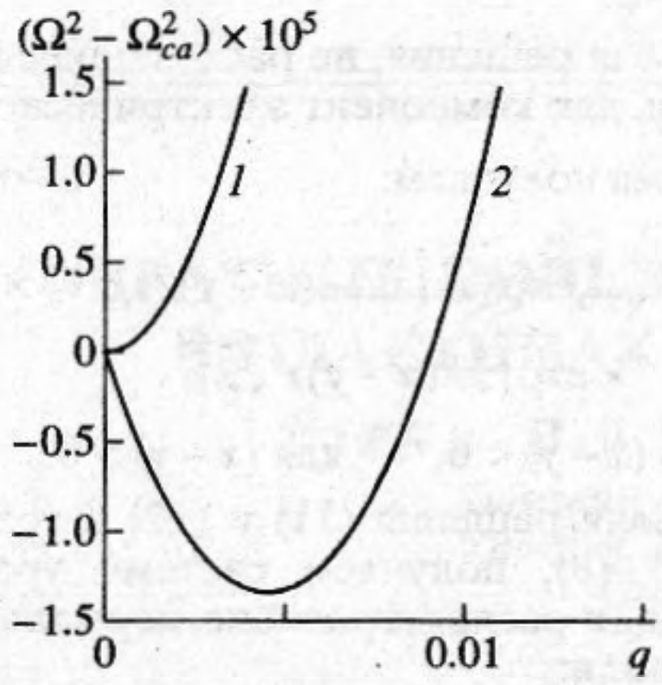

Рис. 2. Дисперсионная зависимость антисимметричных мод поперечных волн в пластинах из материала без пьезоэффекта (1) и из германата висмута (2).

волны вблизи критических частот, где $k \longrightarrow 0$ и $\kappa \longrightarrow \infty$.

Вблизи критических частот при больших κ величины A_n и B_n можно представить в сравнительно простом виде. При $\kappa \gg 1$ корни уравнения (10) асимптотически стремятся к следующим значениям:

$$\beta_1^2 = -1 + 4K^2/\kappa^2;$$
$$\beta_2^2 = (\kappa^2 - 1 - 3K^2)/((1 + K^2). \tag{16}$$

С использованием (16) для A_n и B_n получаем:

$$A_1 \approx -iK^2; \quad A_2 \approx -\beta_2(1 + K^2);$$
$$B_1 \approx i; \quad B_2 \approx -2/\beta_2. \tag{17}$$

Для приближенного решения уравнений (14) и (15) в качестве малого параметра выберем величину

$$\delta = (\varepsilon_0/\varepsilon_{11})K^2/(1 + K^2)\beta_2.$$

Поскольку обычно $K^2 \ll 1$ и $\varepsilon_{11} \gg \varepsilon_0$, поэтому $\delta \ll 1$ при изменении β_2 в широких пределах. Если $K^2 \sim 1$ и $\varepsilon_{11} \sim \varepsilon_0$, то величина δ мала при $\beta_2 \gg 1$, что выполняется вблизи критических частот, где проводится анализ. В дальнейшем решение дисперсионных уравнений будем искать с точностью до членов, пропорциональных δ.

Рассматривая антисимметричные моды при $\kappa \gg 1$ и используя (17), запишем уравнение (14) в виде

$$\beta_2 kd = (n - 1)\pi + \operatorname{arcctg}\{\delta/[1 + (\varepsilon_0/\varepsilon_{11})\operatorname{th}(kd)]\}, \tag{18}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Разлагая функцию arcctg в ряд и возводя обе части уравнения (18) в квадрат, получаем приближенное дисперсионное уравнение для *sa* мод, которое в безразмерных параметрах имеет вид:

$$\Omega^2 - \Omega_{ca}^2 = (1 - 3K^2)q^2 - 2K^2(\varepsilon_0/\varepsilon_{11})q, \tag{19}$$

где $\Omega = \omega d/v_t$ – безразмерная частота, $v_t = (c_{44}/\rho)^{1/2}$, $\Omega_{ca} = (n - 1/2)\pi(1 + K^2)^{1/2}$ – безразмерная критическая частота антисимметричных мод, $q = kd$ – безразмерный волновой вектор.

Аналогичным образом получаем приближенное уравнение, которое вблизи критических частот описывает *ss* моды:

$$\Omega^2 - \Omega_{cs}^2 = (1 - 5K^2)q^2, \tag{20}$$

где $\Omega_{cs} = n\pi(1 + K^2)^{1/2}$ – безразмерная критическая частота симметричных мод.

При $K = 0$ уравнения (19) и (20) переходят в известные дисперсионные уравнения для поперечных волн в пластинах непьезоэлектрических кубических кристаллов [10].

Как видно из (19), *sa* моды при наличии пьезоэффекта могут существовать в некоторой области частот, меньших критической. Из (19) найдем выражение для групповой скорости v_g. Поскольку

$$v_g = \partial\omega/\partial k = v_t\partial\Omega/\partial q, \tag{21}$$

то вблизи критических частот ($\Omega \approx \Omega_{ca}$)

$$v_{ga}/v_t = [(1 - 3K^2)q - K^2(\varepsilon_0/\varepsilon_{11})]/\Omega_{ca}. \tag{22}$$

Как видно из (19) и (22), если $K^2 > 1/3$, то во всей области частот, где справедливо приближенное дисперсионное уравнение (19), групповая скорость *sa* мод отрицательна при положительной фазовой скорости, т.е. волны являются обратными. При $K^2 < 1/3$ обратные волны могут существовать в области частот $\Omega_* < \Omega < \Omega_{ca}$, где Ω_* – минимальная частота, на которой существует распространяющаяся волна конкретной *sa* моды (частотный минимум):

$$\Omega_* = [\Omega_{ca}^2 - (\varepsilon_0/\varepsilon_{11})^2 K^4/(1 - 3k^2)]^{1/2}. \tag{23}$$

Аналогично из (20) следует, что *ss* моды также могут быть обратными при $K^2 > 0.2$.

Таким образом, в отличие от пластин кристаллов класса 6mm, в которых обратными могут быть только *sa* моды [7], в пластинах кубических кристаллов обратными могут быть также и *ss* моды.

Следует отметить, что приближенное дисперсионное уравнение (19) для *sa* мод при $\Omega > \Omega_*$ имеет решения при действительных значения q, а при $\Omega < \Omega_*$ имеет решения при комплексных значениях q. Комплексные ветви дисперсионных зависимостей стыкуются с действительными ветвями при $\Omega = \Omega_*$ в точках, разделяющих их на участки с одинаковыми и противоположными направлениями фазовой и групповой скоростей.

Подобнаяситуация имеет место для действительных и комплексных ветвей дисперсионных зависимостей волн Лэмба в изотропных пластинах [3]. Однако в изотропных пластинах дисперсионные уравнения для поперечных волн не имеют решений с комплексными q.

Полученные результаты иллюстрирует рис. 2, на котором представлены дисперсионные зависимости *sa* мод в пластине германата висмута $Bi_{12}GeO_{20}$ ($K^2 = 0.113$, $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 38$ [11]), рассчитанные по уравнению (14) (сплошные линии) и приближенному уравнению (19) (штриховые линии). Видно, что результаты, полученные путем решения точного и приближенного дисперсионных уравнений, хорошо согласуются между собой.

Следует отметить, что полученные дисперсионные уравнения и численные результаты справедливы только в той области значений q, где справедливо использованное электростатическое приближение, т.е. скорость упругих волн намного меньше скорости электромагнитных волн. Однако, например для моды sa_1 в пластине германата висмута, фазовая скорость упругой волны равна скорости электромагнитной волны при $q = 5.7 \times 10^{-5}$, а обратные волны существуют при $q < 4.5 \times 10^{-3}$. Поэтому вывод о возможности существования обратных поперечных волн в таких пластинах является справедливым.

Как видно из уравнения (19), ширина области существования обратных волн зависит от коэффициента электромеханической связи и параметра $\varepsilon_0/\varepsilon_{11}$. Для количественной оценки этого влияния по уравнениям (14) и (15) были рассчитаны дисперсионные зависимости мод sa_1 и ss_1 в материалах с $K^2 = 0.35$ и $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 38$, и с $K^2 = 0.113$ и $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 1$, которые приведены на рис. 3. Из сравнения этих данных с рис. 2 видно, что увеличение K^2 и уменьшение ε_{11} приводят к увеличению области существования обратной волны моды sa_1 (в данных конкретных случаях примерно на два порядка).

В связи с рассмотренным представляет интерес случай влияния металлизации поверхностей пластины. Из результатов работ [12, 13] следует, что для случая, когда обе поверхности пластины покрыты невесомыми идеально проводящими электродами, закороченными между собой, дисперсионные уравнений поперечных волн можно получить из соответствующих уравнений для случая диэлектрического окружения пластины, полагая $\varepsilon_0 = \infty$. Из уравнений (14) и (15) при $\varepsilon_0 = \infty$ получаем: для антисимметричных мод

$$A_1 \mathrm{tg}(\beta_2 kd) = A_2 \mathrm{tg}(\beta_1 kd), \qquad (24)$$

для симметричных мод

$$A_1 \mathrm{ctg}(\beta_2 kd) = A_2 \mathrm{ctg}(\beta_1 kd). \qquad (25)$$

Численное решение уравнений (24) и (25) показало, что *sa* моды не могут быть обратными

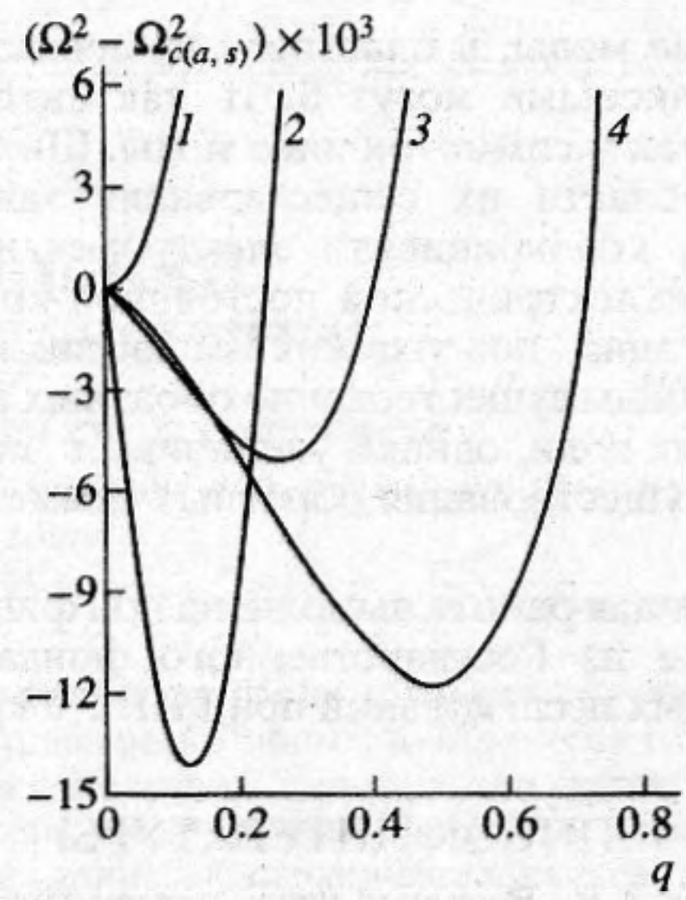

Рис. 3. Дисперсионные зависимости мод sa_1 (2 и 3) и ss_1 (1 и 4) в пластине кубического кристалла при $K^2 = 0.113$, $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 1$ (*1* и *2*) и при $K^2 = 0.35$, $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 38$ (*3* и *4*).

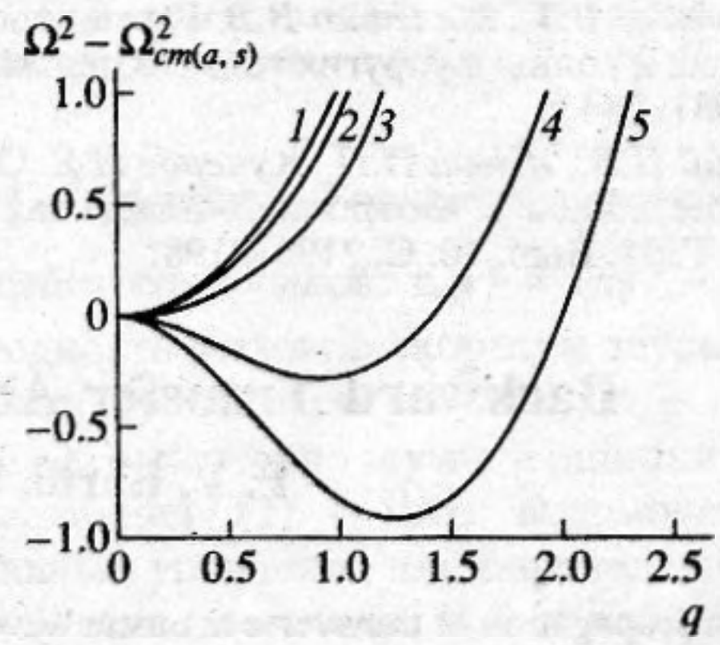

Рис. 4. Дисперсионные зависимости мод sa_1 (*1* и *2*) и ss_1 (*1*, *3–5*) в металлизированной пластине кубического кристалла при $K^2 = 0$ (*1*); 0.113 (*3*); 0.35 (*4*); 0.5 (*5*); 1.0 (*2*).

при любых значениях K^2, а *ss* моды являются обратными при $K^2 > 0.2$. В качестве примера на рис. 4 приведены дисперсионные зависимости мод sa_1 и ss_1 в металлизированной пластине из материалов с различными значениями K^2. Критические частоты Ω_{cm} рассчитывались путем численного решения уравнений (24) и (25) при $k = 0$. Сравнивая кривую *4* на рис. 4 с кривой *4* на рис. 3, можно видеть, что область существования обратной волны моды ss_1 при металлизации поверхностей пластины возрастает примерно на два порядка.

Таким образом, в пластинах пьезоэлектрических кристаллов кубической симметрии возможно существование обратных поперечных волн. В отличие от пластин гексагональных кристаллов, в которых обратными могут быть только антисим-

метричные моды, в пластинах кубических кристаллов таковыми могут быть как антисимметричные, так и симметричные моды. Ширина частотной области их существования зависит от величины коэффициента электромеханической связи и диэлектрической постоянной кристалла. Металлизация поверхностей пластины делает невозможным существование обратных антисимметричных волн, однако увеличивает частотные области существования обратных симметричных волн.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке из Государственного фонда фундаментальных исследований при ГКНТ Украины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meitzler A.H.* Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates // J. Acoust. Soc. Amer. 1965. V. 38. № 5. P. 835–842.
2. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1967. 168 с.
3. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
4. *Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я.* Обратные упругие волны в изотропных пластинах // ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 10. С. 2196–2198.
5. *Бырдин В.М., Дюдин Б.В., Лепендин Л.Ф.* Обратная симметричная волна Лэмба первого порядка // Письма в ЖТФ. 1978. Т. 4. Вып. 13. С. 781–785.
6. *Бурлий П.В., Кучеров И.Я.* Обратные упругие волны в пластинах // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. Вып. 9. С. 644–647.
7. *Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я.* О возможности существования поперечных обратных волн в пластинах // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. Вып. 9. С. 568–571.
8. *Гуляев Ю.В.* Поверхностные электрозвуковые волны в твердых телах // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. Вып. 1. С. 644–647.
9. *Bleustein J.L.* A new surface ware in piezoelectric materials // Appl. Phys. Lett. 1968. V. 13. № 12. P. 412–413.
10. *Турсунов Д.А.* Поперечные нормальные волны в пластине кубического кристалла // Акуст. журн. 1969. Т. 15. Вып. 1. С. 136–138.
11. *Slobodnic A.J., Sezhares J.C.* Elastic, piezoelectric and dielectric constant of $Bi_{12}GeO_{20}$ // J. Appl. Phys. 1972. V. 43. № 1. P. 247–248.
12. *Bleustein J.L.* Some simple modes of wave propagation in an infinite piezoelectric plate // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 38. № 5. P. 835–842.
13. *Бурлій П.В., Кучеров І.Я., Левченко О.О.* Частотна залежність ефектів керування акустоелектронною взаємодією у шаруватій структурі п'єзоелектрична пластина – напівпровідник // Укр. фіз. журн. 1995. Т. 40. № 9. С. 1011–1015.

Backward Transfer Acoustic Waves in Cubic Crystal Plates

P. V. Burlii, P. P. Il'in, and I. Ya. Kucherov

The propagation of transverse acoustic waves in the direction [110] and in the plane $(\bar{1}10)$ of cubic piezoelectric crystals is theoretically analyzed. Dispersion equations were derived by solving the system of equations of elasticity theory and electrodynamics subject to standard boundary conditions at free surfaces. It is demonstrated that plates of piezoelectric cubic crystals can carry transverse backward waves (with opposite phase and group velocities) and waves with complex wave numbers. The effect of conducting layers occurring on plate surfaces is analyzed.