АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 3, с. 315–322

УДК 534.2 : 519.24

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ

© 1997 г. **В. А. Буров, Е. Е. Касаткина, О. Д. Румянцева**

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119899 Москва, Воробьевы горы

Поступила в редакцию 18.03.96 г.

Рассмотрены методы получения статистических оценок характеристик рассеивателей в случае зашумленных данных. Первый подход базируется на системе уравнений Липпмана–Швингера (ЛШ). Оценка по методу максимальной апостериорной вероятности основана на минимизации соответствующего неквадратичного функционала, включающего в себя квадратичную форму от невязки между полученными из оценок полями и экспериментальными данными, ограничительные соотношения на внутренние поля и априорную статистическую информацию о рассеивателе. Во втором подходе для оценивания внутреннего поля и корреляционной функции ошибок его восстановления используется уравнение Марченко-Ньютона-Роуза (МНР), предполагающее импульсный режим. Тогда оценка рассеивателя может быть получена непосредственно либо из уравнения ЛШ, либо из волнового уравнения. Анализируется явление "чуда", заключающееся в независимости оценки рассеивателя от параметров внутреннего поля, т.е. от положения точечного источника и момента времени наблюдения, выбираемых после решения уравнения МНР. В этом подходе "чудо" имеет место лишь внутри области коррелированности ошибок восстановления внутреннего поля.

Обратные задачи рассеяния (ОЗР) являются, как и большинство обратных задач, некорректными, т.е. их решения могут быть весьма критичными к неизбежным ошибкам в измерениях. Нелинейность ОЗР относительно неизвестных характеристик рассеивателя усугубляет положение, делая проблему регуляризации значительно более многогранной. Подход к решению обратных задач как к статистической оценке является традиционным в статистической радиофизике. Ниже такой подход используется при решении обратных задач рассеяния.

1. Первый подход. Использование уравнения Липпмана–Швингера (ЛШ). Система уравнений ЛШ [1] для зашумленных монохроматических данных рассеяния имеет вид:

$$U(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = U_0(\mathbf{y}|\mathbf{x}) + \omega^2\int\limits_R G_0(\mathbf{y}-\mathbf{r}')\varepsilon_c(\mathbf{r}')U(\mathbf{r}'|\mathbf{x})d\mathbf{r}' + n(\mathbf{y}|\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$U(\mathbf{r}'|\mathbf{x}) = U_0(\mathbf{r}'|\mathbf{x}) + \omega^2\int\limits_R G_0(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\varepsilon_c(\mathbf{r}'')U(\mathbf{r}''|\mathbf{x})d\mathbf{r}'', \quad (2)$$

$$\mathbf{y}\in Y;\quad \mathbf{x}\in X;\quad \mathbf{r}'\in R;$$

где X – область локализации источников первичного излучения U_0; R – область рассеяния; Y – область приема; G_0 – функция Грина для фоновой среды, считающейся однородной; $\varepsilon_c(\mathbf{r}) = (c_0^{-2} - c^{-2}(\mathbf{r}))$ – неоднородность фазовой скорости звука $c(\mathbf{r})$ относительно фоновой скорости c_0; n – шумовая добавка, т.е. собственно шумы и ошибки измерений. Уравнения (2) – это вспомогательные интегральные уравнения для определения полей внутри области рассеяния. В дальнейшем будут использоваться итерационные процедуры при одновременной или попеременной оценке $\varepsilon(\mathbf{r})$ и $U(\mathbf{r}|\mathbf{x})$.

Статистическая оценка $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ методом максимальной апостериорной вероятности основана на минимизации соответствующего неквадратичного функционала. Он включает в себя квадратичную форму F_0 от невязки с экспериментальными данными. Ядром этого функционала является обратная корреляционная матрица шума. Ограничительные соотношения на внутренние поля, вытекающее из уравнений связи (2), включены в функциональное слагаемое F_r. Оно снабжено функциональными множителями Лагранжа $\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{x})$. Априорная статистическая информация о рассеивателе, добавляющаяся со штрафным множителем β, отражена в слагаемом F_a. Если помеха и искомая случайная неоднородность являются реализациями нормальных процессов с корреляционными матрицами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{E}$ соответственно, то

задача ММП-оценивания сводится к минимизации функционала

$$F \equiv F_0 + F_r + F_a, \tag{3}$$

где

$$F_0 = \iint\limits_{XY} [U^+(\mathbf{y}_1'|\mathbf{x}_1') - U_0^+(\mathbf{y}_1'|\mathbf{x}_1') -$$

$$-\omega^2 \int\limits_R G_0^+(\mathbf{y}_1' - \mathbf{r}_1')\varepsilon_c^+(\mathbf{r}_1')U^+(\mathbf{r}_1'|\mathbf{x}_1')d\mathbf{r}_1'] \times$$

$$\times N^{-1}(\mathbf{y}_1'\mathbf{y}_2', \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2')[U(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}_2') - U_0(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}_2') -$$

$$-\omega^2 \int\limits_R G_0(\mathbf{y}_2' - \mathbf{r}_2')\varepsilon_c(\mathbf{r}_2')U(\mathbf{r}_2'|\mathbf{x}_2')d\mathbf{r}_2']d\mathbf{y}_1'd\mathbf{y}_2'd\mathbf{x}_1'd\mathbf{x}_2',$$

$$F_r = \iint\limits_{XR} \lambda(\mathbf{r}', \mathbf{x}')[U(\mathbf{r}'|\mathbf{x}') - U_0(\mathbf{r}'|\mathbf{x}') -$$

$$-\omega^2 \int\limits_R G_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\varepsilon_c(\mathbf{r}'')U(\mathbf{r}''|\mathbf{x}')d\mathbf{r}'']d\mathbf{r}'d\mathbf{x}' +$$

$$+\iint\limits_{XR} \lambda^+(\mathbf{r}', \mathbf{x}')[U^+(\mathbf{r}'|\mathbf{x}') - U_0^+(\mathbf{r}'|\mathbf{x}') -$$

$$-\omega^2 \int\limits_R G_0^+(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\varepsilon_c^+(\mathbf{r}'')U^+(\mathbf{r}''|\mathbf{x}')d\mathbf{r}'']d\mathbf{r}'d\mathbf{x}',$$

$$F_a = \beta \int\limits_R \varepsilon_c^+(\mathbf{r}_1')E^{-1}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2')\varepsilon_c(\mathbf{r}_2')d\mathbf{r}_1'd\mathbf{r}_2';$$

здесь "+" обозначает операцию эрмитового сопряжения.

Отметим, что в [2] используются ограничения, основанные непосредственно на волновом уравнении для наблюдаемых полей.

Вариация функционала (3) по переменной $\varepsilon_c^+(\mathbf{r})$ и выполнение промежуточных операций приводят к уравнению

$$-\omega^2 \iint\limits_{XY} G_0^+(\mathbf{y}_1' - \mathbf{r})U^+(\mathbf{r}|\mathbf{x}_1')N^{-1}(\mathbf{y}_1', \mathbf{y}_2', \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2') \times$$

$$\times \left[U(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}_2') - U_0(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}_2') - \right.$$

$$\left. -\omega^2 \int\limits_R G_0(\mathbf{y}_2' - \mathbf{r}_2')\varepsilon_c(\mathbf{r}_2')U(\mathbf{r}_2'|\mathbf{x}_2')d\mathbf{r}_2'\right] \times \tag{4}$$

$$\times d\mathbf{y}_1'd\mathbf{y}_2'd\mathbf{x}_1'd\mathbf{x}_2' + \beta \int\limits_R E^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2')\varepsilon_c(\mathbf{r}_2')d\mathbf{r}_2' -$$

$$-\omega^2 \iint\limits_{XR} \lambda^+(\mathbf{r}', \mathbf{x}')G_0^+(\mathbf{r}' - \mathbf{r})U^+(\mathbf{r}|\mathbf{x}')d\mathbf{r}'d\mathbf{x}' = 0.$$

В борновском приближении уравнение (4) переходит в соотношение

$$\hat{\varepsilon}_B(\mathbf{r}) = \left[\omega^4 \iint\limits_{XY} G_0^+(\mathbf{y}_1' - \mathbf{r})U_0^+(\mathbf{r}|\mathbf{x}_1') \times \right.$$

$$\times N^{-1}(\mathbf{y}_1', \mathbf{y}_2', \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2') \int\limits_R G_0(\mathbf{y}_2' - \mathbf{r}_2') \times$$

$$\times U_0(\mathbf{r}_2'|\mathbf{x}_2')d\mathbf{r}_2'd\mathbf{y}_1'd\mathbf{y}_2'd\mathbf{x}_1'd\mathbf{x}_2' + \tag{5}$$

$$\left. +\beta \int\limits_R E^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2')d\mathbf{r}_2'\right]^{-1} \omega^2 \iint\limits_{XY} G_0^+(\mathbf{y}_1' - \mathbf{r})U_0^+(\mathbf{r}|\mathbf{x}_1') \times$$

$$\times N^{-1}(\mathbf{y}_1', \mathbf{y}_2', \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2')u^{sc}(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}_2')d\mathbf{y}_1'd\mathbf{y}_2'd\mathbf{x}_1'd\mathbf{x}_2',$$

где

$$u^{sc}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = U(\mathbf{y}|\mathbf{x}) - U_0(\mathbf{y}|\mathbf{x}).$$

Выражение (5) дает регуляризованную оценку винеровского типа, согласованную с априорной информацией о корреляционных свойствах помехи и искомой неоднородности. При учете перерассеяния уравнение (4) необходимо дополнить результатом варьирования (3) по множителю $\lambda^+(\mathbf{r}, \mathbf{x})$, что приводит к уравнению ЛШ (2), и по вспомогательному неизвестному $U^+(\mathbf{r}|\mathbf{x})$, что дает соотношение

$$-\omega^2 \iint\limits_{XY} G_0^+(\mathbf{y}_1' - \mathbf{r})\varepsilon_c^+(\mathbf{r})N^{-1}(\mathbf{y}_1', \mathbf{y}_2', \mathbf{x}, \mathbf{x}_2') \times$$

$$\times \left[U(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}_2') - U_0(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}_2') - \right.$$

$$\left. -\omega^2 \int\limits_R G_0(\mathbf{y}_2' - \mathbf{r}_2')\varepsilon_c(\mathbf{r}_2')U(\mathbf{r}_2'|\mathbf{x}_2')d\mathbf{r}_2'\right]d\mathbf{y}_1'd\mathbf{y}_2'd\mathbf{x}_2' + \tag{6}$$

$$+\lambda^+(\mathbf{r}, \mathbf{x}) - \omega^2 \int\limits_R \lambda^+(\mathbf{r}', \mathbf{x})G_0^+(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\varepsilon_c^+(\mathbf{r})d\mathbf{r}' = 0.$$

В предположении, что помехи не коррелированы, так что

$$N^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \approx n_0^{-1}\delta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad (7)$$

уравнение (4) преобразуется к виду

$$-n_0^{-1}\omega^2 \iint\limits_{XY} G_0^+(\mathbf{y}_2' - \mathbf{r})U^+(\mathbf{r}|\mathbf{x}_2')[U(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}_2') -$$

$$- U_0(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}_2') - \omega^2 \int\limits_R G_0(\mathbf{y}_2' - \mathbf{r}_2')\varepsilon_c(\mathbf{r}_2') \times \quad (4a)$$

$$\times U(\mathbf{r}_2'|\mathbf{x}_2')d\mathbf{r}_2']d\mathbf{y}_2'd\mathbf{x}_2' + \beta \int\limits_R E^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2')\varepsilon_c(\mathbf{r}_2')d\mathbf{r}_2' -$$

$$- \omega^2 \iint\limits_{XR} \lambda^+(\mathbf{r}', \mathbf{x}')G_0^+(\mathbf{r}' - \mathbf{r})U^+(\mathbf{r}|\mathbf{x}')d\mathbf{r}'d\mathbf{x}' = 0.$$

Первый член в (4а) обращается в нуль точным детерминистическим решением, а при наличии помеховой невязки его роль заключается во взвешенном усреднении последней. Когда плотность мощности помехи достаточно велика, основное регуляризующее влияние приобретают последние два члена в (4а).

При условии (7) уравнение (6) приобретает вид

$$-n_0^{-1}\omega^2 \int\limits_Y G_0^+(\mathbf{y}_2' - \mathbf{r})\varepsilon_c^+(\mathbf{r})[U(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}) -$$

$$- U_0(\mathbf{y}_2'|\mathbf{x}) - \omega^2 \int\limits_R G_0(\mathbf{y}_2' - \mathbf{r}_2')\varepsilon_c(\mathbf{r}_2') \times \quad (6a)$$

$$\times U(\mathbf{r}_2'|\mathbf{x})d\mathbf{r}_2']d\mathbf{y}_2' + \lambda^+(\mathbf{r}, \mathbf{x}) -$$

$$- \omega^2 \int\limits_R \lambda^+(\mathbf{r}', \mathbf{x})G_0^+(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\varepsilon_c^+(\mathbf{r})d\mathbf{r}' = 0.$$

Полученная система нелинейных уравнений (4а), (2) и (6а) может быть решена методом последовательных итераций. Начальной оценкой в итерационной процедуре служит сглаженная борновская оценка (5), а постепенное "включение" процесса перерассеяния осуществляется путем изменения от 0 до 1 дополнительного множителя в выражениях, порожденных интегральным членом уравнения (2), учитывающим эти эффекты [3]. Таким образом обеспечивается сходимость всего процесса итераций для сильных рассеивателей. Решение ОЗР в статистической постановке по схеме, изображенной на рис. 1, приводит к регуляризованной оценке рассеивателя, учитывающей процессы многократного рассеяния. При восстановлении сильных рассеивателей сравнительно небольшой сложности полезен градиентно-итерационный метод решения. В этом случае решается линеаризованная система, получаемая из (2), (4а) и (6а) путем подстановки $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + \Delta\varepsilon$, $U_n = U_{n-1} + \Delta U$, $\lambda_n = \lambda_{n-1} + \Delta\lambda$ для рассеивателя, внутреннего поля и функционального множителя Лагранжа соответственно. Отбрасывая члены второго порядка малости и регулируя величину итерационного шага, можно добиться сходимости при восстановлении рассеивателей большой силы.

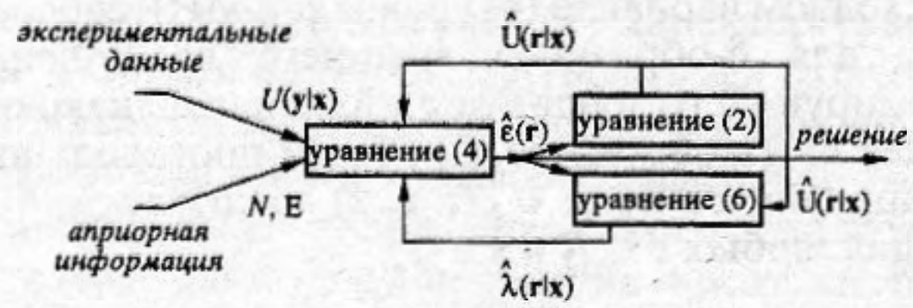

Рис. 1. Схема итерационной процедуры.

К достоинствам итерационной схемы, основанной только на уравнениях ЛШ (1), (2), относится возможность использования фрагментарных данных рассеяния и простота учета априорной информации. Метод достаточно универсален, т.е. он может быть применен для первичного облучения импульсом любой формы или сигналом с любым спектром. При этом для каждой частоты строится своя процедура оценки $\hat{U}(\mathbf{r}|\mathbf{x})$ и $\hat{\lambda}(\mathbf{r}, \mathbf{x})$, но оценка $\hat{\varepsilon}_c(\mathbf{r})$ формируется общая.

Слабая сторона метода – введение большого количества дополнительных неизвестных функций, описывающих внутренние поля в каждом из экспериментов, и решение нелинейных уравнений для их нахождения, что делает процесс очень громоздким. При этом необходимо заботиться о сходимости итерационной процедуры, регулируя темп включения в процесс эффектов перерассеяния.

2. Второй подход. Использование уравнения Марченко–Ньютона–Роуза (МНР). Если первый подход базируется исключительно на уравнении ЛШ, то во втором для нахождения внутреннего поля используется уравнение МНР. Оно устанавливает *непосредственную* (т.е. без вовлечения функции рассеивателя) связь между данными рассеяния, измеряемыми вне области рассеяния, и значениями внутреннего поля, позволяя восстановить последние из *полного* набора данных рассеяния. Это уравнение предполагает импульсный режим зондирования при точечных источниках с координатами $\mathbf{x} \in S_x$ и приемниках с координатами $\mathbf{y} \in S_y$, где S_x и S_y – поверхности, окружающие область рассеяния R, причем S_x лежит внутри S_y.

В исходном варианте [4] уравнение МНР справедливо для δ-образного внешнего возмущения, формирующего зондирующий сигнал, однако оно может быть обобщено на случай произвольного зондирующего поля $U_A^0(t, \mathbf{r}, \mathbf{x})$ со спектром $A(\omega)$ [5]: для любых $\mathbf{r} \in R$ и $\mathbf{x} \in S_x$

$$u_{AA}^{sc}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = \int\limits_{S_y} dS_y \int dt' L(t-t', \mathbf{y}, \mathbf{x}) u_A^{sc}(t', \mathbf{r}, \mathbf{y}) + \tag{8}$$

$$+ f(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) \text{ при } t \geq |\mathbf{r}-\mathbf{x}|/c_m + t_2;$$

$$U_A(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0, \; u_A^{sc}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0 \tag{8а}$$

$$\text{при } t < |\mathbf{r}-\mathbf{x}|/c_m + t_1 \text{ и}$$

$$U_{AA}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0, \; u_{AA}^{sc}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0$$

$$\text{при } t < |\mathbf{r}-\mathbf{x}|/c_m + t_2;$$

$$U_A^-(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0, \; u_A^{sc-}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0 \tag{8б}$$

$$\text{при } t > -|\mathbf{r}-\mathbf{x}|/c_m + t_1 + \tau_1 \text{ и}$$

$$U_{AA}^-(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0, \; u_{AA}^{sc-}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0$$

$$\text{при } t > -|\mathbf{r}-\mathbf{x}|/c_m + t_2 + \tau_2.$$

Здесь dS_y – элемент поверхности S_y (в двумерии – контур); c_m – максимальное значение фазовой скорости $c(\mathbf{r})$ внутри S_y. Неизвестными являются внутренние рассеянные поля $u_A^{sc}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = U_A - U_A^0$ со спектром $A(\omega)$ и соответствующие падающему полю U_{AA}^0 со спектром $A^2(\omega)$ поля $u_{AA}^{sc}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = U_{AA} - U_{AA}^0$. Необходимость введения двух типов спектра вызвана тем, что левая и правая части уравнения (8) соответственно линейна и квадратична по полю. Внешние возмущения $A_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int A(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega$ и $A_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int A^2(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega$ характеризуются моментами начала действия t_1 и t_2 и длительностью действия τ_1 и τ_2 соответственно. Обобщенное ядро L и свободный член f задаются соотношениями:

$$L(t-t', \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial n_y} U_A^-(t-t', \mathbf{y}, \mathbf{x}) -$$

$$- U_A^-(t-t', \mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_y};$$

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = -\int\limits_{S_y} dS_y \int dt' \Big(u_A^{sc-}(t-t', \mathbf{y}, \mathbf{x}) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial n_y} U_A^0(t', \mathbf{y}, \mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial n_y} u_A^{sc-}(t-t', \mathbf{y}, \mathbf{x}) U_A^0(t', \mathbf{y}, \mathbf{r}) \Big).$$

Функция $U_A^-(t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = u_A^{sc-} + U_A^{0-}$, фигурирующая в L, является волновым полем с опережающим потенциалом со спектром $A(\omega)$ (аналогично вводится U_{AA}^- для $A^2(\omega)$). Как нефизическая величина, это поле не может быть непосредственно определено в эксперименте, допускающем измерение лишь поля с запаздывающим потенциалом $U_A(t, \mathbf{y}, \mathbf{x})$. В случае, когда рассеиватель и фоновая среда не обладают поглощением, пересчет поля $U_A^-(t, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ из поля $U_A(t, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ не представляет затруднения, поскольку монохроматические составляющие этих полей комплексно сопряжены. В частности, если функция $A_1(t)$ симметрична относительно "центрального" момента времени t_0, то $U_A^-(t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = U_A(-t + 2t_0, \mathbf{y}, \mathbf{x})$. В случае же присутствия поглощения проблема нахождения $U_A^-(t, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ нетривиальна и нуждается в дополнительном исследовании.

Полное внутреннее поле $U_{\text{in}} \equiv U_A(t, \mathbf{r}, \mathbf{x})$ однозначным образом связано с функциями неоднородности скорости $\varepsilon_c(\mathbf{r})$, плотности $\varepsilon_\rho(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}\,\Delta(1/\sqrt{\rho(\mathbf{r})})$ (Δ – оператор Лапласа) и поглощения $\varepsilon_\alpha(\mathbf{r}) = 2\alpha(\mathbf{r})/c(\mathbf{r})$ (амплитудный коэффициент поглощения для частоты ω имеет вид $\beta(\mathbf{r}, \omega) = \omega^2\alpha(\mathbf{r})$) посредством волнового уравнения:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} - \left(\frac{1}{c_0^2} - \varepsilon_c(\mathbf{r})\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varepsilon_\rho(\mathbf{r}) + \varepsilon_\alpha(\mathbf{r})\frac{\partial^3}{\partial t^3}\right] \times \tag{9}$$

$$\times U_A(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = A_1(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}).$$

Уравнение (8) предполагает, что $u_{AA}^{sc-}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0$ при $t \geq |\mathbf{r}-\mathbf{x}|/c_m + t_2$ [4]. В силу (8б) это ограничивает [5] длительность возмущения $A_2(t)$:

$$\tau_2 < 2|\mathbf{r}-\mathbf{x}|/c_m \text{ для любых } \mathbf{r} \in R \text{ и } \mathbf{x} \in S_x. \tag{10}$$

Рабочая полоса частот должна обеспечивать такую длительность.

Если поверхности S_x и S_y не совпадают, то при решении уравнения (8) следует использовать операцию обращения искомых значений внутренних полей с внешней поверхности S_y на внутреннюю S_x. Это нужно для использования в (8) одного типа неизвестных. Разделение поверхностей позволяет снять слабую сингулярность ядра L, присутствующую в стандартной форме уравнения МНР. Линейный оператор обращения определяется соотношением:

$$\hat{P}(\mathbf{x}, t''; \mathbf{y}, t') u_A^{sc}(t', \mathbf{r}, \mathbf{y}) \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{S_y} dS_y \int\limits_{T'}^{\infty} dt' P(\mathbf{x}, t''; \mathbf{y}, t') u_A^{sc}(t', \mathbf{r}, \mathbf{y}) = u_A^{sc}(t'', \mathbf{r}, \mathbf{x}),$$

где в силу принципа причинности $T' = t'' + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|/c_0$. Учитывая, что

$$u_{AA}^{sc}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = \int_{T_1}^{T_2} dt'' A_1(t - t'') u_A^{sc}(t'', \mathbf{r}, \mathbf{x}),$$

$$T_1 = t - t_1 - \tau_1, \quad T_2 = t - t_1,$$

уравнение (8) приводится к виду

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) - \int_{T_1}^{T_2} dt'' A_1(t - t'') \hat{P}(\mathbf{x}, t''; \mathbf{y}, t') u_A^{sc}(t', \mathbf{r}, \mathbf{y}) + \\ + \int_{T}^{\infty} dt' \int_{S_y} dS_y L(t - t', \mathbf{y}, \mathbf{x}) u_A^{sc}(t', \mathbf{r}, \mathbf{y}) = 0. \tag{11}$$

Из (8б) следует, что $T = t - t_1 - \tau_1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|/c_0$. При условии ограниченности значений t_1 и τ_1 уравнение (11) является уравнение Вольтерра первого рода по переменной времени t'. (Замена обращения поля на его продление с S_x на S_y вольтерровости не обеспечивает.)

Уравнение (8) решается наиболее просто для сигнала с прямоугольным спектром: $A(\omega) = \exp(i\omega t_0)$, $\omega \in \Omega$, и $A(\omega) = 0$, $\omega \notin \Omega$, где Ω – рабочая полоса. В этом случае $u_{AA}^{sc}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = u_A^{sc}(t - t_0, \mathbf{r}, \mathbf{x})$, однако соотношение (8) становится приближенным из-за невозможности строго удовлетворить условию (10). Тем не менее, с определенной точностью можно говорить о конечной длительности возмущения $\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau$ и принять, что $t_1 \approx t_0 - \tau/2$, $t_2 \approx 2t_0 - \tau/2$. Тогда (8) или (11) преобразуется к виду

$$\hat{P}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, t') u_A^{sc}(t', \mathbf{r}, \mathbf{y}) = \\ = \int_{S_y} dS_y \int_{p}^{\infty} dt' L(t + t_0 - t', \mathbf{y}, \mathbf{x}) \times \\ \times u_A^{sc}(t', \mathbf{r}, \mathbf{y}) + f(t + t_0, \mathbf{r}, \mathbf{x}) \tag{12}$$

при $t \geq |\mathbf{r} - \mathbf{x}|/c_m + t_1$, а условия (8а, 8б) остаются без изменения. Нижний временной предел в принятом приближении конечен: $p = t - \tau/2 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|/c_0$. При неограниченном расширении рабочей полосы, т.е. при приближении возмущения к δ-образному, уравнения (8), (11), (12) становятся строгими, поскольку $\tau = 0$. Если, кроме того, поверхности S_y и S_x совпадают, то (12) становится уравнением Вольтерра второго рода по переменной времени.

Надо заметить, что имеющая место в предельном случае вольтерровская форма (11), (12) придается уравнению МНР в определенном смысле искусственно за счет отбрасывания члена u_{AA}^{sc-} и ограничения пределов интегрирования. Приближающийся к вольтерровскому характер уравнения (12) позволяет рассчитывать на хорошую стабильность и единственность решения для достаточно широкого класса рассеивателей. Более категорическое утверждение такого рода затруднительно, поскольку уравнение носит смешанный характер, и в нем присутствует сингулярный оператор дифференцирования неизвестных полей. Кроме того, соотношение (12) отличается от стандартных обратных задач линейной фильтрации, поскольку его ядро является "антипричинным".

В экспериментальных данных рассеяния от квазиточечных приемников присутствует определенная ошибка. Она переходит на значения рассеянного внутреннего поля $u_{\text{in}}^{sc} \equiv u_A^{sc}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x})$, восстановленные из (8). Статистику ошибок можно оценить из (8), записывая его для краткости в операторном виде:

$$\hat{B} u_{\text{in}}^{sc} = f. \tag{13}$$

Ошибки в данных порождают ошибку $\Delta\hat{B}$ в матрице $\hat{B}$ и ошибку Δf в правой части f, так что

$$(\hat{B} + \Delta\hat{B})(u_{\text{in}}^{sc} + \Delta u_{\text{in}}^{sc}) = f + \Delta f. \tag{14}$$

Предполагая, что $\hat{B}^{-1}$ существует, в линейном приближении по ошибкам из (13), (14) имеем (процесс дискретизации уравнений (13), (14) требует дополнительного исследования):

$$\Delta u_{\text{in}}^{sc} \approx \hat{B}^{-1} \Delta f - \hat{B}^{-1} \Delta\hat{B} \hat{B}^{-1} f.$$

При известных корреляционных свойствах ошибок Δf и $\Delta\hat{B}$ рассчитывается корреляционная матрица ошибок восстановления внутреннего поля $W = \langle (\Delta u_{\text{in}}^{sc})^{+} (\Delta u_{\text{in}}^{sc}) \rangle$.

Итак, пусть из (8) найдена регуляризованная оценка U_{in}^{est} полного поля $U_{\text{in}} \equiv U_A(t, \mathbf{r}, \mathbf{x})$, и известна матрица W. Далее эта оценка может быть использована по-разному.

2.1. Оценка рассеивателя из уравнения ЛШ. Поле U_{in}^{est} вводится в уравнение ЛШ, записанное для данных рассеяния $u_{obs}^{sc} = u_A^{sc}(t, \mathbf{y}, \mathbf{x})$. Получаемая система решается как система уравнений Фредгольма первого рода с неточной правой частью (из-за ошибок измерения) и неточным интег-

ральным ядром (из-за погрешности восстановления U_{in}^{est}):

$$\int_{R} d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} dt' g_0(t-t'; \mathbf{y}, \mathbf{r}') \left[-\varepsilon_c(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{(\partial t')^2} + \right. \tag{15}$$

$$\left. + \varepsilon_\rho(\mathbf{r}') - \varepsilon_\alpha(\mathbf{r}') \frac{\partial^3}{(\partial t')^3} \right] U_{\text{in}}^{est}(t', \mathbf{r}', \mathbf{x}) = u_{obs}^{sc}(t, \mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

где g_0 – импульсная функция Грина однородной среды. Система (15) в операторном виде такова:

$$\hat{\Gamma} U_{\text{in}}^{est} \varepsilon' \equiv \hat{D} \varepsilon' = u_{obs}^{sc}, \tag{16}$$

где $\varepsilon'(\mathbf{r})$ – вектор-столбец, составленный из функций $\varepsilon_i(\mathbf{r})$, $i = c, \rho, \alpha$, $\hat{\Gamma}$ – обобщенный оператор, составленный из оператора функции Грина и операторов дифференцирования по времени соответствующего порядка, действующий в пространстве ε-параметров. "Наивное" решение системы (16) имеет вид

$$\varepsilon'^{est} = (\mu \hat{I} + \hat{D}^+ \hat{D})^{-1} \hat{D}^+ u_{obs}^{sc}, \tag{17}$$

где $\hat{I}$ – единичный оператор, μ – регуляризующий множитель. Более точная оценка получается при обобщении (17) на случай известной статистики ошибок для $\hat{D}$, u_{obs}^{sc} (корреляционная матрица ошибок N) и ε' (корреляционная матрица отклонения характеристик рассеивателя – E').

"Оптимальная" оценка формируется из функционала, учитывающего статистику ошибок измерения и априорную информацию о характере рассеивателя. Основная часть функционала строится аналогично слагаемым $F_0 + F_a$ в (3), но для импульсного режима:

$$\mathcal{F}(\varepsilon', U_{\text{in}}) = (\hat{\Gamma} U_{\text{in}} \varepsilon' - u_{obs}^{sc})^+ N^{-1} \times$$

$$\times (\hat{\Gamma} U_{\text{in}} \varepsilon' - u_{obs}^{sc}) + (\varepsilon' - \varepsilon_0')^+ (E')^{-1} (\varepsilon' - \varepsilon_0').$$

В первом варианте поле U_{in} фиксируется: $U_{\text{in}} = U_{\text{in}}^{est}$. При этом функционал

$$F_1(\varepsilon') = \mathcal{F}(\varepsilon', U_{\text{in}} = U_{\text{in}}^{est})$$

минимизируется только по ε'. В других двух вариантах учитывается статистика оценки U_{in}^{est}, согласно (13):

$$F_2(\varepsilon', U_{\text{in}}) = \mathcal{F}(\varepsilon', U_{\text{in}}) +$$

$$+ (U_{\text{in}}^{est} - U_{\text{in}})^+ W^{-1} (U_{\text{in}}^{est} - U_{\text{in}}),$$

$$F_3(\varepsilon', U_{\text{in}}) = \mathcal{F}(\varepsilon', U_{\text{in}}) +$$

$$+ (\hat{B}(U_{\text{in}} - U_A^0) - f)^+ W^{-1} (\hat{B}(U_{\text{in}} - U_A^0) - f).$$

Функционалы F_2 и F_3 варьируются как по ε', так и по U_{in}. Из-за присутствия в (15) как самого внутреннего поля, так и его высших производных, вариационная задача становится чрезвычайно громоздкой.

Вариант с функционалом F_3 близок к функционалу первого подхода, но задействованные в нем уравнения МНР варьируются лишь по U_{in}.

2.2. Оценка рассеивателя из волнового уравнения. Внутри рассеивателя ($\mathbf{r} \in R$) полное поле удовлетворяет однородному уравнению (9). Нахождение из (9) функций $\varepsilon_i(\mathbf{r})$ использует знание восстановленного поля U_{in}^{est} и его производных при трех различных моментах времени или положениях излучателя. Если рассеиватель представлен только неоднородностью скорости, функция $\varepsilon_c(\mathbf{r})$ вычисляется непосредственно:

$$\varepsilon_c(\mathbf{r}) = c_0^{-2} -$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} U_{\text{in}}^{est}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) \right) \Big/ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} U_{\text{in}}^{est}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x}) \right). \tag{18}$$

При точных данных рассеяния восстановление рассеивателя из (18) возможно для любого выбранного момента времени t и любого положения излучателя $\mathbf{x}$. Это явление известно как "чудо" [6, 7]. В случае экспериментальных ошибок $\Delta U_A(t, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ полезность значений U_{in}^{est} для различных t и $\mathbf{x}$ зависит от корреляционных свойств ошибок восстановления ε_c. В линейном приближении по ошибкам эти корреляционные свойства подобны корреляционным свойствам ошибок восстановления внутреннего поля $\Delta U_{\text{in}}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x})$. Для несильных рассеивателей была оценена корреляционная функция K ошибок восстановления внутренних полей в фиксированной точке $\mathbf{r} = 0$:

$$K(\mathbf{r} = 0; t, t_1; \mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \equiv$$

$$\equiv \langle \Delta U_{\text{in}}^*(t, \mathbf{r} = 0, \mathbf{x}) \Delta U_{\text{in}}(t_1, \mathbf{r} = 0, \mathbf{x}_1) \rangle \sim$$

$$\sim \int_{S_y} dS_y \int_{S_y} \left(dS_{y_1} \frac{1}{y y_1} \frac{\partial y}{\partial n_y} \frac{\partial y_1}{\partial n_{y_1}} \right) \times \tag{19}$$

$$\times \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta U_A^* \left(t + \frac{y}{c_0}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\Delta U_A \left(t_1 + \frac{y_1}{c_0}, \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1 \right) \right) \right\rangle;$$

$$|\mathbf{y}| = y, \ |\mathbf{y}_1| = y_1.$$

Здесь звездочка означает комплексное сопряжение. Из (19) следует, что K определяется домини-

рующим механизмом ошибок эксперимента. В случае ошибок $\Delta U_A(t, \mathbf{y}, \mathbf{x})$, некоррелированных для различных позиций излучателя или (и) различных моментов времени, ошибки восстановления полей в фиксированной точке $\mathbf{r} \in R$ также некоррелированы. Если же область корреляции функций $\partial(\Delta U_A(t + y/c_0, \mathbf{y}, \mathbf{x}))/\partial y$ имеет линейные размеры l_x в $\mathbf{x}$-пространстве и l_t в t-пространстве, то носитель корреляционной функции $K(\mathbf{r}; t, t_1; \mathbf{x}, \mathbf{x}_1)$ имеет следующие линейные размеры: $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| \cong l_x$, а $|t - t_1| \cong l_t + \max\limits_{\mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \in S_y} |y - y_1|/c_0$ за счет соответствующего запаздывания по времени значений $\partial(\Delta U_A)/\partial y$. Отсюда следует, что временная область корреляции для ошибок восстановления полей может быть несколько шире, чем для ошибок эксперимента. Однако нормированная функция корреляци для ошибок восстановления полей оказывается, вообще говоря, слабее нормированной функции корреляции (в соответствующем пространстве) для величин $\partial(\Delta U_A)/\partial y$ вследствие усреднения в (19). Более того, с увеличением силы рассеивателя коррелированность ошибок в оценках внутренних полей ослабевает благодаря процессам многократного рассеяния.

Таким образом, если ошибки в наблюдаемых полях некоррелированы или имеют ограниченную область корреляции в t- и $\mathbf{x}$-пространствах, то и ошибки восстановления полей будут, соответственно, некоррелированы или иметь ограниченную область корреляции, внутри которой имеет место "чудо". Вне этой области ошибки восстановления внутренних полей становятся взаимонезависимыми, а "чудо" выполняется лишь с точностью до этих ошибок. Поэтому все восстановленные значения поля являются статистически информативными, так что рассеиватель ε_c может быть оценен как

$$\varepsilon_c^{est}(\mathbf{r}) = c_0^{-2} - \\ -\frac{1}{M}\sum_{\{t,\mathbf{x}\}}\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}U_{\text{in}}^{est}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x})\right)\Big/\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_{\text{in}}^{est}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x})\right), \tag{20}$$

где M – общее количество усредняемых слагаемых. Усреднение в (20) проводится по тем t и $\mathbf{x}$, для которых ошибки восстановления мало коррелированы между собой. Тогда ε_c^{est} будет близка к оценке, получаемой методом наименьших квадратов. Для сильных же корреляций оценку рассеивателя целесообразно получать методом 2.1, который эффективен независимо от степени корреляции ошибок.

Совместную оценку функций $\varepsilon_i(\mathbf{r})$, $i = c, \rho, \alpha$, можно получить методом наименьших квадратов, записывая уравнение (9) для всей совокупности параметров t и $\mathbf{x}$ при каждом фиксированном $\mathbf{r}$. При этом соотношение (19) и выводы о коррелированности ошибок остаются в силе.

Подход 1 и метод 2.1 похожи и должны давать близкие, с точки зрения точности восстановления рассеивателя, результаты. Во-первых, эти подходы используют всю экспериментальную информацию для *глобальной* (т.е. во всей области рассеяния одновременно) оценки $\varepsilon_i(\mathbf{r})$ с учетом статистики рассеивателя. Во-вторых, оба уравнения (ЛШ и МНР) получены из одного и того же волнового уравнения. Метод же 2.2 может иметь бóльшую дисперсию ошибок в оценке $\varepsilon_i(\mathbf{r})$ в силу ее *локальности*. Такую оценку можно улучшить, проведя вторичную пространственную фильтрацию винеровского типа, учитывающую статистику рассеивателя и ошибку в его оценке:

$$\varepsilon_i^{est2} = \Phi^{-1}(\tilde{\varepsilon}_i^{est}\tilde{S}_i/(\tilde{S}_i + \tilde{N}_i)), \quad i = c, \rho, \alpha. \tag{21}$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}_i^{est}$ – пространственный спектр функции ε_i^{est}; $\tilde{S}_i$ и $\tilde{N}_i$ – средние энергетические спектры рассеивателя и ошибок его реконструкции соответственно; Φ^{-1} – обратное преобразование Фурье. Результат (21) уже весьма близок к оптимальному. Однако, если уравнение МНР (8) далеко от строгого из-за нарушения условия (10), то значение ε_i^{est2} может быть использовано в качестве начального в итерационных процедурах.

Достоинства и недостатки подхода 2. Общее достоинство всех вариантов подхода 2 – использование уравнения МНР. Во-первых, это уравнение подразумевает импульсный режим, являющийся традиционным в эхоскопических системах. Во-вторых, оно обеспечивает автономность вспомогательной задачи, т.е. возможность получения оценки внутреннего поля независимо от оценки рассеивателя. Размерность вспомогательной задачи нахождения $U_{\text{in}}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x})$ при фиксированном $\mathbf{r} \in R$ определяется произведением числа положений излучателей и размерности дискретизации во времени.

Оценивание рассеивателя по методу 2.1 на основе (17) или функционала $F_1(\varepsilon')$, а также по методу 2.2 имеет то достоинство, что решение получается, фактически, в явном виде (т.к. внутреннее поле уже оценено и фиксировано), причем с учетом статистики. К достоинствам метода 2.2 следует также отнести: 1) пространственную локальность получаемой оценки; 2) возможность варьировать характер усреднения типа (20) в зависимости от степени достоверности данной оценки $U_{\text{in}}^{est}(t, \mathbf{r}, \mathbf{x})$; 3) то, что метод 2.2 дает оценку не намного хуже оценки метода 2.1, но значительно упрощает вычислительные процедуры.

Общий недостаток подхода 2 – необходимость полной совокупности исходных эксперименталь-

ных данных рассеяния для всех точек излучения и приема. Полные данные нужны для оценивания внутреннего поля из уравнения МНР. Частный недостаток метода 2.1 – необходимость оценивать рассеиватель одновременно во всей области рассеяния; разделить задачу на подобласти нельзя.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буров В.А., Горюнов А.А., Сасковец А.В., Тихонова Т.А.* Обратные задачи рассеяния в акустике // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 433–449.
2. *Longji Tang*. Iterative method for acoustical wave inversion with sparse data // Acoustical Imaging. 1993. V. 20. P. 141–144.
3. *Буров В.А., Сасковец А.В., Фаткуллина И.О.* Локальная сходимость итерационных решений обратных задач рассеяния при постепенном учете перерассеяния // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 1. С. 30–35.
4. *Budreck D., Rose J.H.* Three-dimensional inverse scattering in anisotropic elastic media // Inverse Problems. 1990. V. 6. P. 331–348.
5. *Burov V.A., Rumiantseva O.D.* Exact inverse scattering solutions in multi-dimensions (perspective of using in acoustical imaging) // Acoustical Imaging. 1995. V. 21. P. 101–111.
6. *Rose J.H., Cheney M., DeFacio B.* The connection between time- and frequency-domain three-dimensional inverse scattering methods // J. Math. Phys. 1984. V. 25. № 10. P. 2995–3000.
7. *Cheney M., Beylkin G., Somersalo E., Burridge R.* Three-dimensional inverse scattering for the wave equation with variable speed: near-far formulae using point sources // Inverse Problems. 1989. V. 5. P. 1–6.

STATISTICAL ESTIMATIONS IN INVERSE SCATTERING PROBLEMS

V. A. Burov, E. E. Kasatkina, O. D. Rumyantseva

Methods to obtain the statistical estimations of scatterer characteristics are considered in the case of the data with interference. First apporoach is based on system of the Lippmann–Schwinger (LS) integral equations. The estimation has been made according to the maximum a posteriori probability method and based on minimization of the corresponding nonquadratic functional. This functional includes quadratic form from discrepancy between filds obtained from estimations and experimental data, restictions that follow from the LS equations for the inner fields, and *a priori* scatterer statistics.

The second approach uses the Marchenko–Newton–Rose (MNR) equation supposing pulse regime to estimate inner field and correlation function of errors of its reconstruction. Then scatterer estimation can be obtained both by the LS equation and by the wave equation. Phenomenon of "miracle" consisting in the fact that the scatterer estimation non depends from parameters of the inner fiels, (i.e. from position of point source and time moment of observation choosing after the MNR equation is solved) is analyzed. In this approach "miracle" takes place only within domain where errors of reconstruction of the inner field are correlative.