

УДК 534.22

ПОГЛОЩЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТОНКОМ СЛОЕ ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЫ

© 1997 г. В. Г. Быков

Институт тектоники и геофизики ДВО РАН
680037 Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65

Поступила в редакцию 7.12.95 г.

Приведен краткий анализ теорий поглощения упругих волн в зернистых средах. Получено выражение для коэффициента поглощения упругих волн, обусловленного контактной жесткостью и вязким трением в прилегающих слоях зерен. Показано, что поглощение в сухой зернистой среде носит резонансный характер и определяется в основном функцией распределения зерен по размерам. Результаты расчетов зависимости коэффициента поглощения от частоты, размеров зерен и натуральных измерений в осадочных и горных породах хорошо согласуются в широком диапазоне частот.

1. *Введение.* Известно, что почти все осадки и некоторые породы состоят из минеральных частиц несферической формы, соприкасающихся друг с другом при различной степени сцементированности. Поглощение сейсмических волн в таких геоматериалах происходит в основном посредством двух механизмов: 1) потери в матрице; 2) потери при взаимодействии флюида с твердой фазой. Затухание в матрице может быть обусловлено внутренней неупругостью кристаллических зерен и контактным трением на границах соприкасающихся зерен и трещин. Внутренняя неупругость очень мала [1] и поэтому разумно учитывать только поглощение за счет трения. Влияние этого фактора на распространение сейсмических волн рассматривалось в ряде работ [2–9].

М. Био [2] при введении в двухфазные модели эффектов межзернового трения предложил для описания вязкоупругих свойств заменить порупругие коэффициенты на некоторые интегро-дифференциальные операторы. Б. Титтманн с соавторами [3] предложил теорию поглощения сейсмических волн в осадочных породах, которая включала взаимодействие адсорбированного слоя жидкости и поверхности зернистой матрицы породы вследствие диффузии. Учитывалась зависимость поглощения от количества точек активной деформации, т.е. трещин и шероховатостей в контакте зерен. И. Палмер и М. Травиолиа [4], используя уравнения Навье–Стокса, рассчитали поглощение для простой кубической упаковки шаров, частично заполненной смачивающим флюидом. Предполагалось, что под воздействием продольной волны шары сближаются, а жидкость течет в направлении к свободной поверхности. Однако, в диапазоне до 1 кГц модель дает пренебрежимо малые значения коэффициентов поглощения. У. Мерфи с соавторами [5] представ-

или микрофизическую модель поглощения, определяющую реакцию контакта двух зерен на малые синусоидальные нагрузки и учитывающую релаксацию гидродинамического напряжения, адсорбцию молекул на шероховатых и неровных поверхностях зерен. Теория удовлетворительно объясняет лишь некоторые экспериментальные данные для щелей (в контактах зерен) шириной от 5×10^{-9} до 5×10^{-8} м, существование которых до сих пор не наблюдалось. В [6] исследовано поглощение упругих волн за счет объемной и сдвиговой вязкости матрицы, обусловленной наличием мягкого материала в контактах зерен, который служит “смазкой” при движении зерен друг относительно друга. Автором [7] рассмотрено поглощение сейсмических волн, связанное с локальными осцилляциями тонкой пленки жидкости, контактирующей с шероховатыми поверхностями зерен. Модель Дж. Дворкина и А. Нура [8] описывает затухание акустических волн, возникающее при взаимодействии вязкой жидкости с зернами матрицы и циркуляционном движении жидкости внутри пор. В [9] изучено влияние локальной релаксации давления флюида в зернистой насыщенной среде на динамические параметры сейсмических волн.

В настоящей работе рассмотрено поглощение энергии упругих волн в слое зернистой среды, носящее резонансный характер. При этом учитывается контактная жесткость и вязкое трение в прилегающих слоях.

2. *Модель резонансного поглощения в зернистой среде.* Согласно теории Герца–Миндлина–Дигби [10], упругие константы зернистых сред зависят главным образом от контактов между выпуклыми поверхностями зерен, а контакты аппроксимируются круговыми поверхностями различного радиуса. Предполагается, что при внеш-

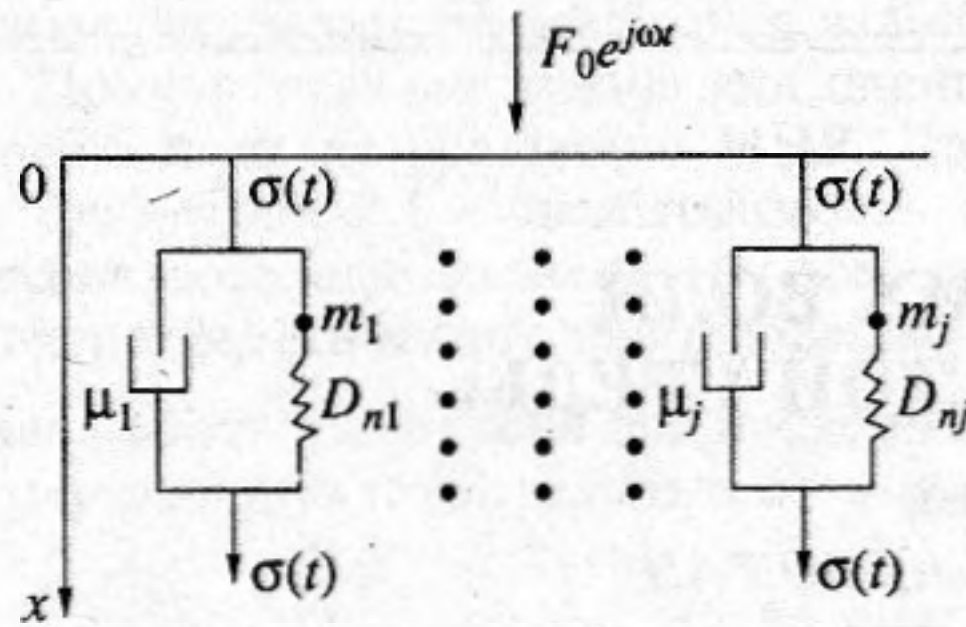


Рис. 1. Реологическая модель зернистой среды. m_j – осциллирующая масса; μ_j – вязкое трение; D_{nj} – жесткость.

нем воздействию зерна в прилегающих друг к другу слоях сближаются, деформация происходит только в зоне контакта, причем рассматриваются только силы, действующие по нормали к сферическим поверхностям в точках контакта. Натурные измерения показали, что выводы из модели сферической упаковки могут быть использованы для описания сейсмических волн в неконсолидированных песках. Из теории следует выражение для нормальной жесткости D_n в контактах между зёрнами

$$D_n = \frac{4Ga}{1-\nu}, \quad (1)$$

где G – модуль сдвига материала зёрн; ν – коэффициент Пуассона; a – радиус контакта, имеющего форму круга.

Для возбуждения упругих волн в геологических средах применяются импульсные, вибрационные и другие источники. При этом часть поверхности среды подвергается механическому напряжению. Активную нагрузку можно принять равной волновому сопротивлению $Z = \rho V_p$ [11], где ρ – плотность; V_p – скорость продольной волны. Используя теперь определение волнового сопротивления как отношение механического напряжения σ , взятого с обратным знаком, к колебательной скорости частиц v , запишем

$$Z = -\frac{\sigma}{v} = \rho V_p, \quad -\frac{f}{v} = \rho V_p S,$$

где f – внешняя сила; S – площадь поперечного сечения ударной плиты источника.

Представим зернистую среду в виде системы элементарных осцилляторов (рис. 1). Если сжатие и растяжение пружин, обозначающих контактную жесткость D_{nj} , сопровождается вязким трением μ_j , то такая модель будет аналогична модели Фойгта. При воздействии на систему частиц внешней гармонической силы $f = F_0 e^{i\omega t}$ возникают вынужденные колебания и частицы массой m_j приобретают колебательную скорость $v = v_0 e^{i\omega t} = i\omega x_0 e^{i\omega t}$, где $x = x_0 e^{i\omega t}$ – продольное смещение ча-

стиц, а $v_0 = i\omega x_0$ – комплексная амплитуда скорости. Система уравнений, описывающая взаимодействие ударной плиты источника с тонким слоем зернистой среды, будет иметь вид

$$f = \sum_j D_{nj}(x - x_j), \quad (2)$$

$$\ddot{x}_j + \mu_j \dot{x}_j + \omega_{0j}^2 x_j = \omega_{0j}^2 x, \quad (3)$$

$$Z_k = -\frac{F_0}{v_{0j}}, \quad (4)$$

где x, x_j – смещение плиты и зёрн; Z_k – импеданс поглощающего k -слоя; $\mu_j/2$ – коэффициент затухания; $\omega_{0j} = \left(\frac{D_{nj}}{m_j}\right)^{1/2}$ – собственная частота колебаний зёрн; суммирование проводится по всем зёрнам слоя. Решая систему уравнений (2)–(4) относительно $(x - x_j)$, получим выражение для импеданса

$$Z_k = -i\omega \sum_j \frac{D_n(1 - i\mu_j/\omega)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\mu_j\omega)}. \quad (5)$$

Если относительное число зёрн, собственная частота которых лежит в интервале полуширины резонансной кривой $\Delta\omega_0 = \omega_0/Q$, велико ($\Phi(\omega_0)\Delta\omega_0 \gg 1$, $Q = \omega_0/\mu$ – добротность осциллятора, $\Phi(\omega_0)$ – закон распределения осцилляторов по собственным частотам), то при больших значениях Q ($\mu/\omega_0 \ll 1$) мнимым слагаемым в числителе (5) можно пренебречь и суммирование заменить интегрированием [12]

$$Z_k = -i\omega \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{D_n(\omega_0)\Phi(\omega_0)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\mu\omega)} d\omega_0, \quad (6)$$

где ω_1, ω_2 – минимальная и максимальная собственные частоты зёрн, составляющих очень тонкий слой геологической среды. Предположение о величине Q вполне обосновано, т.к. из опыта известно [1, 13], что для сухих песков и песчаников, гранитов и известняков $Q \sim 10^2 - 10^3$, т.е. μ/ω для каждого отдельного зёрна во много раз меньше единицы. Для вычисления интеграла (6) воспользуемся правилом обхода Ландау и представим знаменатель в виде [14]

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\mu}{\omega}} \right) = P \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) + i\pi\delta(\omega_0^2 - \omega^2),$$

P – главное значение интеграла; δ – дельта-функция Дирака. Тогда для (6) запишем

$$Z_k = \pi\omega \int_{\omega_1}^{\omega_2} D_n(\omega_0)\Phi(\omega_0)\delta(\omega_0^2 - \omega^2)d\omega_0 + \frac{1}{i\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{D_n(\omega_0)\Phi(\omega_0)}{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)}(d\omega_0). \quad (7)$$

Так как экспериментальное определение граничных частот ω_1 и ω_2 довольно затруднительно, то следует перейти от функции распределения зерен по собственным частотам $\Phi(\omega_0)$ к функции распределения зерен по размерам $f(r)$. При этом знак перед интегралом (7) изменится на противоположный, т.к. согласно формуле $\omega_0 = \left(\frac{3D_n}{4\pi\rho}\right)^{1/2} r^{-3/2}$

минимальная собственная частота ω_1 соответствует максимальному размеру “резонансных” частиц r_{\max} и наоборот. Для функции $f(r)$ воспользуемся выражением [15]:

$$f(r) = \frac{2}{\pi Q} r^{-4}. \quad (8)$$

Подобное распределение $f(r) \sim r^{-4}$ было также предложено для дискретных неоднородностей в коре и мантии Земли [16] и для пузырьков газа в жидкости [17]. Учитывая, что в сухих песках и песчаниках в диапазоне частот вплоть до 10^5 – 10^6 Гц контактная жесткость D_n имеет постоянное значение [5] и Q от частоты не зависит [18], для Z_k получим

$$Z_k = I_1 + I_2 = -\frac{2\omega D_n}{Q} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^{-3} \delta\left(\frac{3D_n}{4\pi\rho} r^{-3} - \omega^2\right) dr - i \frac{2D_n}{\pi Q \omega} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{r^{-3} dr}{\left(\frac{3D_n}{4\pi\rho} r^{-3} - 1\right)}. \quad (9)$$

Введение переобозначений $\frac{3D_n}{4\pi\rho} r^{-3} = y, r^{-3} = x$ и использование свойств δ -функции позволяет вычислить I_1 по частям:

$$I_1 = \frac{32\pi^2 \rho^2 \omega^3}{27 Q D_n} (r_{\max}^4 - r_{\min}^4). \quad (10)$$

Интеграл I_2 является табличным [19, с. 28]:

$$I_2 = -i \frac{2D_n}{\pi Q \omega} \left(\frac{1}{2r^2} + \frac{a}{5r^5} + a^2 \int \frac{r^{-9} dr}{ar^{-3} - 1} \right) \Big|_{r_{\min}}^{r_{\max}}$$

и при $ar^{-3} \gg 1, a = \frac{3D_n}{4\pi\rho\omega^2}$ (что для песков, песчаников, гранитов и др. означает $r = 10^{-5}$ – 10^{-4} м, $f > 10^6$ – 10^7 Гц) оценивается как

$$I_2 \approx i \frac{D_n}{\pi Q \omega} \left(\frac{1}{r_{\min}^2} - \frac{1}{r_{\max}^2} \right). \quad (11)$$

Окончательно выражение (9) для механического импеданса на единицу площади примет вид

$$= \frac{32\pi^2 \rho^2 \omega^3}{27 Q D_n} (r_{\max}^4 - r_{\min}^4) + i \frac{D_n}{\pi Q \omega} \left(\frac{1}{r_{\min}^2} - \frac{1}{r_{\max}^2} \right). \quad (12)$$

Так как $V_p = Z_k/\rho$, то из (12) следует комплексное выражение для скорости $\bar{V}_p = V_1 + iV_2$, а коэффициент поглощения определяется как [20]: $\alpha_p(\omega) = \omega V_2 / (V_1^2 + V_2^2)$. Поэтому при $r_{\max} \gg r_{\min}$, что всегда выполняется в натуральных условиях,

$$\alpha_p(\omega) = \frac{\frac{D_n}{\pi Q \rho r_{\min}^2}}{\left(\frac{D_n}{\pi Q \rho \omega r_{\min}^2}\right)^2 + \left(\frac{32\pi^2 \rho \omega^3 r_{\max}^4}{27 Q D_n}\right)^2}. \quad (13)$$

Если частота падающей волны ω меньше некоторой критической величины $\omega_c = r_{\max}^{-1} \left(\frac{D_n}{\rho}\right)^{1/2} \left(\frac{27}{32\pi^3 r_{\min}^2}\right)^{1/4}$, то $V_2 \gg V_1$ и

$$\alpha_p(\omega) = \frac{\pi Q \rho r_{\min}^2}{D_n} \omega^2. \quad (14)$$

3. Анализ и сравнение зависимостей поглощения от частоты и размера зерен с экспериментальными данными. Из экспериментальных и натуральных измерений известно [18], что нелинейная зависимость поглощения от частоты существует для песков ($r = 10^{-4}$ – 6×10^{-4} м) в диапазоне частот $f = 10$ – 10^2 Гц, для песчаников ($r = 10^{-4}$ – 10^{-3} м) – $f = 10$ – 10^4 Гц, для илов ($r = 5 \times 10^{-6}$ – 2×10^{-5} м) – $f = 10^3$ – 10^4 Гц. В общем случае коэффициенты поглощения для зернистых сред разных типов в различных условиях могут иметь линейную, квадратичную или другую степенную зависимость от частоты. На рис. 2 представлено сравнение вычисленных по формуле (13) значений $\alpha_p(\omega)$ с воз-

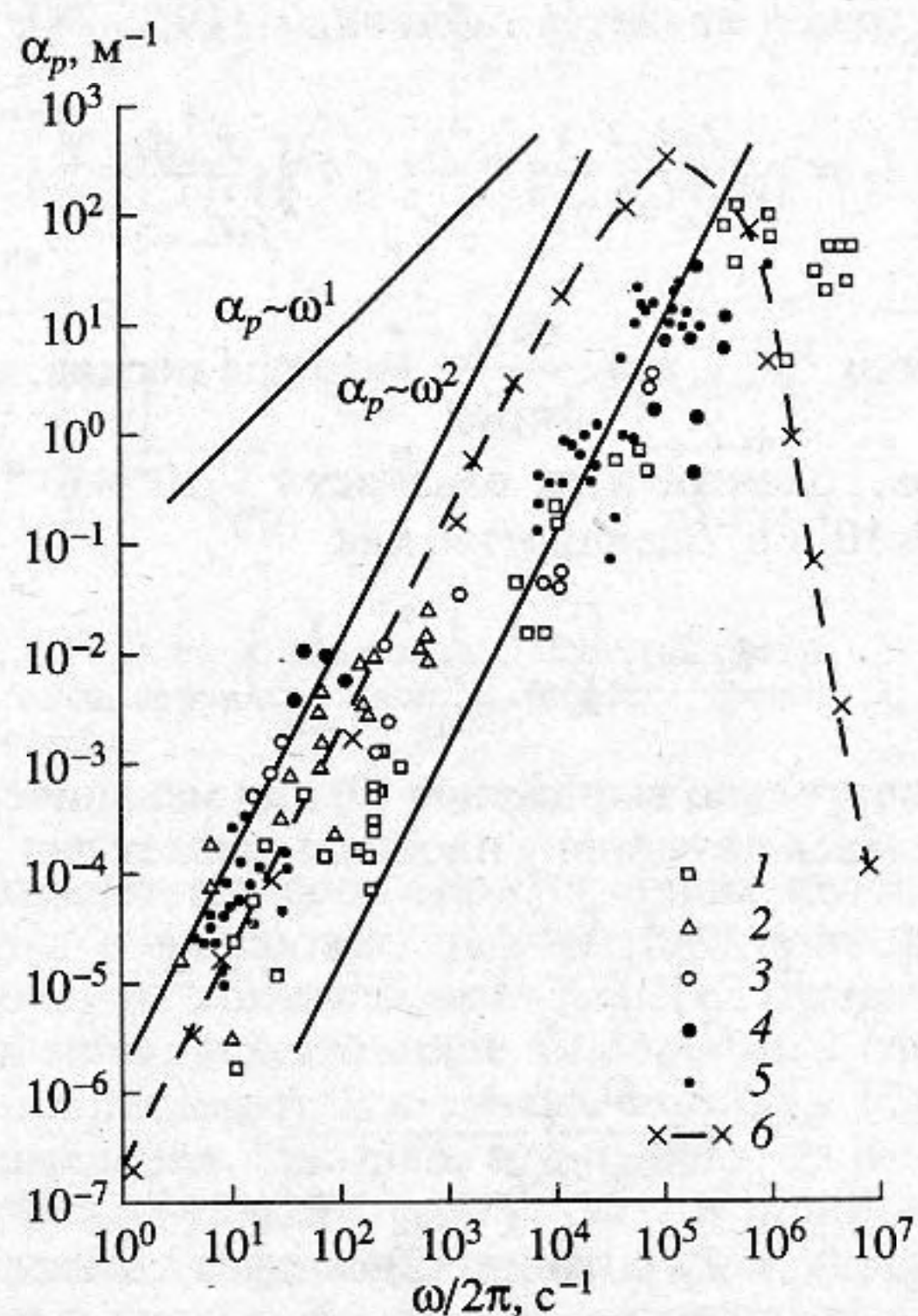


Рис. 2. Зависимость поглощения от частоты. 1 – осадочные плотные породы; 2 – пески и песчаники; 3 – осадочные слабо сцементированные породы; 4 – габбро; 5 – граниты [18, 21]; 6 – расчеты по формуле (13).

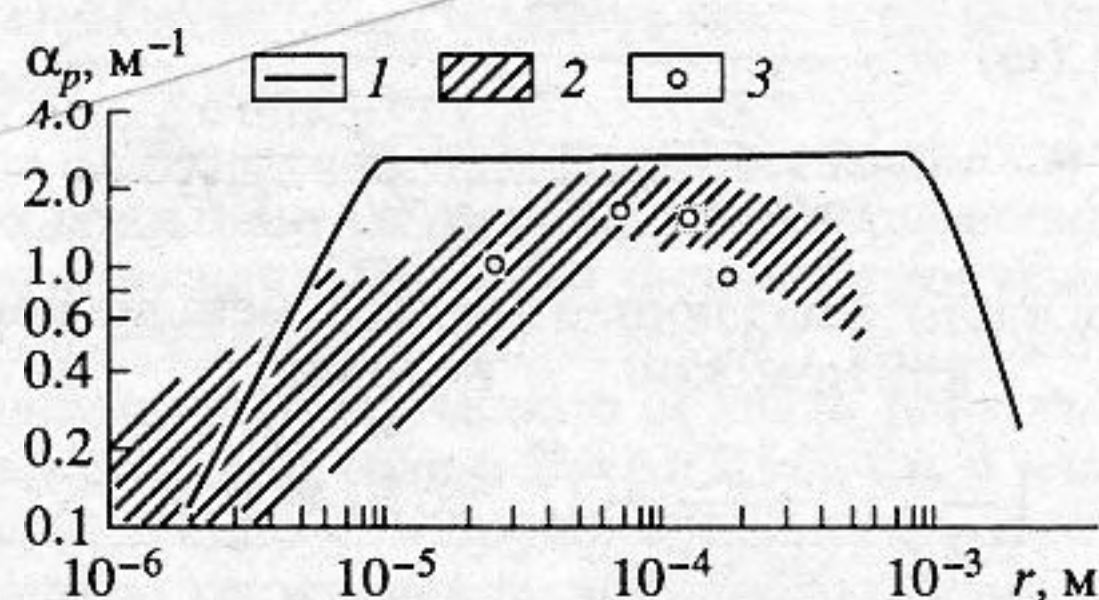


Рис. 3. Зависимость коэффициента поглощения от размера зерен на частоте 30 кГц. 1 – расчеты по формуле (13); 2 – натурные данные [22]; 3 – лабораторные измерения [22].

можными теоретическими зависимостями [1, 21] $\alpha(\omega) \sim \omega^1$ и $\alpha(\omega) \sim \omega^2$ и экспериментальными данными [18, 21], которое показывает хорошее совпадение расчетов с ранее проведенными исследованиями. При вычислениях величина нормальной контактной жесткости зерен песков и песчаников по данным [5, 10] принималась равной $D_n = 5 \times 10^6$ Н/м. Плотность материала зерен $\rho = 2.65 \times 10^3$ кг/м³, $Q = 10^3$, $r_{\min} = 5 \times 10^{-5}$ м, $r_{\max} = 10^{-3}$ м.

С увеличением частоты поглощение изменяется по закону $\alpha_p \sim \omega^2$ в широком диапазоне час-

тот $f = 1-10^5$ Гц (параллельное смещение расчетной кривой достигается варьированием экспериментально определяемой величины D_n). Однако при $r_{\min}\omega > 1$ α_p начинает быстро убывать. Физически это означает отсутствие в среде частиц с “резонансным” размером меньше r_{\min} , а потому резонанс на частоте $f > 2\pi r_{\min}^{-1}$, и, следовательно, поглощение, обусловленное этим механизмом, невозможны. Таким образом, область применимости предложенной модели для расчета поглощения упругих волн в реальных геоматериалах ($r \geq 10^{-6}$ м) определяется условием $f \leq 2\pi r_{\min}^{-1}$.

Из (13) следует, что увеличение размера зерен может привести к существенному изменению коэффициента поглощения. Поэтому исследование зависимости $\alpha_p(r)$ очень важно для выявления наиболее значимых физико-механических параметров геоматериалов при измерениях. Рис. 3 показывает зависимость поглощения (сплошная линия) продольных волн на фиксированной частоте ($f = 30$ кГц) от размера “резонансных” зерен среды при варьировании значений r от 10^{-6} до 2×10^{-3} м, перекрывающих весь диапазон геоматериалов от глин до крупнозернистых песков. Вычисления производились для двух интервалов: I – 10^{-6} м $< r_{\min} \leq 10^{-5}$ м при $r_{\max} = 5 \times 10^{-5}$ м; II – 5×10^{-5} м $< r_{\max} \leq 2 \times 10^{-3}$ м при $r_{\min} = 10^{-5}$ м. Форма кривой $\alpha_p(r)$ обусловлена “конкуренцией” слагаемых в знаменателе (13). В I интервале наибольший вклад дает первое слагаемое и следует воспользоваться формулой (14). Постоянная величина минимального размера частиц и возрастание их наибольшего размера приводят к “размыванию” максимума поглощения. Когда второе слагаемое в знаменателе (13) за счет увеличения r_{\max} становится преобладающим – происходит резкое падение величины $\alpha_p(r)$. Рис. 3 иллюстрирует также качественное, а в некотором интервале r и количественное согласие расчетов $\alpha_p(r)$ с натурными и лабораторными измерениями [22]. Согласно опытам с песками [23], при внешнем воздействии на среду одновременно могут осциллировать от 1 до 10 зерен и тогда максимальный размер осциллирующей отдельности при структурном резонансе может достигать $5 \times 10^{-3}-10^{-2}$ м, что, вероятно, отразится на величине и форме зависимости $\alpha_p(r)$.

4. Заключение. Проведенный на основе предложенной модели анализ поглощения сейсмических волн и сравнение расчетов с экспериментальными данными показали, что поглощение в сухой зернистой среде может носить резонансный характер, не зависящий от коэффициента затухания отдельных зерен, и определяется в основном функцией распределения зерен по размерам. Основной вклад в поглощение вносят группы частиц, радиус r которых связан с частотой ω падающей волны соотношением $\omega = \omega_0 \sim r^{-3/2}$. Расчеты

поглощения в породах различного гранулометрического состава свидетельствуют о степенной зависимости поглощения от частоты $\alpha_p(\omega) \sim \omega^2$ в диапазоне частот до 10^5 Гц. При дальнейшем увеличении частоты резонанс невозможен в связи с отсутствием в геоматериалах зерен соответствующего "резонансного" размера. В некотором интервале r на ультразвуковых частотах (30 кГц) отмечается изменение поглощения по закону $\alpha(r) \sim r^2$.

Описанный механизм поглощения аналогичен линейному затуханию Ландау в плазме [14], затуханию звука в жидкости с пузырьками газа [17] и в звукопоглощающей комбинированной системе [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnston D.H., Toksöz M.N., Timur A. Attenuation of seismic waves in dry and saturated rocks // *Geophysics*. 1979. V. 44. № 4. P. 691–711.
2. Био М.А. Обобщенная теория распространения акустических волн в диссипативных пористых средах // *Механика*. 1963. № 6. С. 135–155.
3. Tittmann B.R., Clark V.A., Richardson J.M., Spenser T.W. Possible mechanism for seismic attenuation in rocks containing small amounts of volatiles // *J. Geophys. Res.* 1980. V. 85. № B10. P. 5199–5208.
4. Palmer I.D., Traviolia M.L. Attenuation by squirt flow in undersaturated gas sands // *Geophysics*. 1980. V. 45. № 12. P. 1780–1792.
5. Murphy W.F., Winkler K.W., Kleinberg R.L. Acoustic relaxation in sedimentary rocks: dependence on grain contacts and fluid saturation // *Geophysics*. 1986. V. 51. № 3. P. 757–766.
6. Быков В.Г., Николаевский В.Н. Сейсмические волны в насыщенных пористых геоматериалах с вязкоупругой матрицей // *Докл. АН*. 1992. Т. 323. № 3. С. 446–451.
7. Rouleau P.M. A theory of seismic dissipation by squeeze-flow of fluid-films // *EOS*. 1992. V. 73. № 43. P. 339–340.
8. Dvorkin J., Nur A. Dynamic poroelasticity: a unified model with the squirt and Biot mechanisms // *Geophysics*. 1993. V. 58. № 4. P. 524–533.
9. Mukerji T., Mavko G. Pore fluid effects on seismic velocity in anisotropic rocks // *Geophysics*. 1994. V. 59. № 2. P. 233–244.
10. Winkler K.W. Contact in granular porous materials: comparison between theory and experiment // *Geophys. Res. Lett.* 1983. V. 10. № 11. P. 1073–1076.
11. Гуцин В.В., Шалашов Г.М. О возможности использования нелинейных сейсмических эффектов в задачах вибрационного просвечивания Земли // *Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками*. М.: Наука, 1981. С. 144–155.
12. Кобелев Ю.А. К вопросу о поглощении звуковых волн в тонком слое // *Акуст. журн.* 1987. Т. 33. № 3. С. 507–509.
13. Tittmann B.R., Ahlberg L., Nadler H., Curnow I., Smith T., Cohen E.R. Internal friction quality-factor Q under confining pressure // *Proc. 8th Lunar Sci. Conf., Houston, Tex., 1977. V. 1. New York, 1977. P. 1209–1224.*
14. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979. 320 с.
15. Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.М. Основы геомеханики. М.: Недра, 1986. 301 с.
16. Файзулин И.С., Шапиро С.А. О затухании упругих волн в горных породах, связанном с рассеянием на дискретных неоднородностях // *Докл. АН СССР*. 1987. Т. 295. № 2. С. 341–344.
17. Рютов Д.Д. Аналог затухания Ландау в жидкости с пузырьками газа // *Письма в ЖЭТФ*. 1975. Т. 22. № 3. С. 46–48.
18. Kibblewhite A.C. Attenuation of sound in marine sediments: A review with emphasis on low-frequency data // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 86. № 2. P. 716–738.
19. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. С. 28.
20. Аверко Е.М., Колесников Ю.И. Об одной модели поглощения сейсмических волн // *Геоакустические исследования по многоволновой сейсморазведке*. Новосибирск, 1987. С. 20–42.
21. Берзон И.С., Епинатьева А.М., Парийская Г.Н., Стародубровская С.П. Динамические характеристики сейсмических волн в реальных средах. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 511 с.
22. McCann C., McCann D.M. The attenuation of compressional waves in marine sediments // *Geophysics*. 1969. V. 34. № 6. P. 882–892.
23. Николаевский В.Н., Вильчинская Н.А., Лисин В.П. Медленные сейсмические волны в песчаных морских грунтах // *Океанология*. 1985. Т. 25. № 4. С. 656–663.

Attenuation of Elastic Waves in a Thin Layer of a Granular Medium

V. G. Bykov

The theories of elastic wave absorption in granular media are briefly reviewed. An expression for attenuation of elastic waves due to the contact stiffness and viscous friction in adjacent grain layers is obtained. It is demonstrated that the attenuation in a dry granular medium is resonant in nature and is mainly defined by the grain-size distribution function. Calculations of the absorption factor as a function of frequency and grain size agree well with the field measurements over a wide frequency range.