АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 3, с. 367–375

УДК 550.34+534.222

К АНАЛИТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ДИНАМИКИ КОРОТКОГО ИМПУЛЬСА, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В РЕЛАКСАЦИОННОЙ СРЕДЕ

© 1997 г. **В. А. Ларичев, Г. А. Максимов**

Московский инженерно-физический институт
115409 Москва, Каширское ш., 31

Поступила в редакцию 29.11.95 г.

В работе получено аппроксимирующее аналитическое выражение, описывающее динамику профиля короткого импульса, распространяющегося по релаксационной среде. Параметры аппроксимации выражены через несколько первых моментов спектра времен релаксации (СВР) $\langle\tau^n\rangle$, $n = -2 \ldots 2$, которые могут быть определены экспериментально. В основе аппроксимации лежит ранее предложенный подход [1], однако учтен ряд функциональных соотношений и дополнительных условий, что обеспечивает более точное воспроизведение особенностей динамики профиля импульса в окрестности его фронта.

Распространение акустических импульсов в реальных средах сопровождается изменением их амплитуды и формы. Эти изменения несут информацию о релаксационных процессах, происходящих в среде. Поэтому выявление закономерностей, связанных с особенностями динамики импульса, проявляющимися при его распространении в релаксационной среде, представляет интерес с точки зрения диагностики свойств такой среды акустическими методами. В этой связи важно иметь возможность рассчитывать эволюцию импульса на основе простых аналитических соотношений, связывающих параметры среды с особенностями динамики импульса.

В большинстве тех случаев, когда среду можно рассматривать как сплошную и однородную, ее дисперсионно-диссипативные свойства могут быть описаны на языке релаксационных процессов, происходящих в среде [2–5], а главным параметром, ответственным за многообразие этих свойств, является спектр времен релаксации (СВР). При этом даже в простейших случаях, когда релаксационный механизм в среде является единственным, СВР может быть распределенным вследствие флуктуаций параметров, характеризующих состояние среды. Поэтому для адекватного описания распространения акустических импульсов в реальных средах необходима разработка подходов, сформулированных в терминах распределенного СВР.

Такой подход был предложен в работе [1], где было получено аналитическое выражение, описывающее динамику профиля короткого акустического импульса в релаксационной среде для произвольного вида СВР. При этом динамика импульса описывалась через три первых момента СВР: $\langle\tau\rangle$, $\langle\tau^2\rangle$, $\langle\tau^3\rangle$. Однако только два из них – первый $\langle\tau\rangle$ и второй $\langle\tau^2\rangle$ – могли быть экспериментально определены по особенностям динамики профиля импульса.

Недавно было показано [6, 7], что в динамике профиля импульса содержится экспериментально измеримая информация о четырех моментах СВР, а именно о моментах: $\langle\tau^{-2}\rangle$, $\langle\tau^{-1}\rangle$, $\langle\tau\rangle$ и $\langle\tau^2\rangle$. В связи с этим возникает необходимость модифицировать подход работы [1] с тем, чтобы получить аналитическое описание динамики импульса, содержащее лишь экспериментально определяемые параметры СВР. Кроме того, как показано в работе [8], динамика короткого импульса, распространяющегося в неоднородной релаксационной среде, описывается теми же выражениями, что и для однородной среды, только с заменой моментов СВР на эффективные моменты СВР, зависящие от трассы распространения. В таких случаях даже при простейшей реологии среды непосредственный расчет профиля импульса является весьма трудоемкой задачей, и, следовательно, существование аналитического описания представляется весьма полезным.

Распространение импульса в релаксационной среде в случае одной пространственной переменной описывается уравнением волнового типа [9]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - \int_0^t dt'\kappa(t-t')\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0, \qquad (1)$$

где релаксационное ядро $\kappa(t)$ выражается через СВР $g(\tau) \geq 0$ следующим образом:

$$\kappa(t) = c_\infty^2\left(\delta(t) - \frac{\Delta}{\langle\tau\rangle}\int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} d\tau g(\tau)e^{-t/\tau}\right). \qquad (2)$$

Здесь $\Delta = 1 - c_0^2/c_\infty^2$ – дисперсия фазовой скорости звука в среде; c_0, c_∞ – минимальная и максимальная фазовые скорости в ней, $\langle\tau^n\rangle = \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} d\tau\, g(\tau)\tau^n$ – момент СВР степени n ($\langle\tau^0\rangle = 1$), τ_{min} и τ_{max} – минимальное и максимальное времена релаксации.

Решение уравнения (1) с функцией источника, расположенного в точке $x = 0$: $Q(x, t) = Q(t)\delta(x)$, имеет вид

$$u(x, t) = \int_0^t dt' Q(t') I(t - t', x), \tag{3}$$

где функция Грина $I(x, t)$ – фундаментальное решение плоской задачи в полубесконечной дисперсионно-диссипативной среде – имеет вид интеграла Меллина:

$$I(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp \exp(pt - xK(p)), \tag{4}$$
$$\gamma = (\delta - i\infty, \delta + i\infty).$$

В случае малой дисперсии фазовой скорости $\Delta \ll 1$ волновое число $K(p) = p/\sqrt{\kappa(p)}$ в (4) можно разложить в ряд по Δ и представить в виде

$$K(p) = \frac{p}{c_\infty}\left(1 + \frac{\Delta}{2\langle\tau\rangle}\int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} d\tau \frac{g(\tau)}{p + 1/\tau} + \ldots\right). \tag{5}$$

Если длительность начального импульса $Q(t)$ мала по сравнению с характерным временным масштабом изменения функции Грина, то последнюю можно вынести из под интеграла и переписать выражение (3) в виде

$$u(x, t) = I_b(t, x)\int_0^t dt' Q(t') + I_s(t, x)Q(t), \tag{6}$$

где через $I_s(t, x)$ обозначена сингулярная часть функции Грина. Из (6) следует, что в этом случае особенности динамики импульса определяются исключительно особенностями его функции Грина.

Анализ функции Грина, приведенный в [1], позволяет представить следующую картину распространения импульса: в окрестности фронта (точка $x = c_\infty t$), движущегося со скоростью c_∞, имеется экспоненциально затухающий с расстоянием упругий предвестник, за которым распространяется тело импульса, затухающее степенным образом. Максимум тела импульса движется со скоростью c_0. Эта картина находится в полном соответствии с точным решением для случая единственного времени релаксации $g(\tau) = \delta(\tau - \tau_1)$, которое имеет вид [10, 11]

$$I(x, t) = e^{-\beta}\left(\delta(t') + e^{-\frac{t'}{\tau_1}}\left(\frac{\beta}{t'\tau_1}\right)^{1/2} I_1(2\sqrt{\beta t'/\tau_1})\theta(t')\right). \tag{7}$$

Не учитывая конкретного вида спектра $g(\tau)$, можно определить характер поведения $I(x, t)$ в окрестности фронта и максимума тела импульса.

В окрестности фронта структура $I(x, t)$ определяется разложением $K(p)$ при $p \longrightarrow \infty$.

$$I(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp \exp\left(pt' - \beta + \frac{\langle\tau^{-1}\rangle}{p}\beta - \right.$$
$$\left. - \frac{\langle\tau^{-2}\rangle}{p^2}\beta + \ldots\right) = e^{-\beta}\left(\delta(t') + \beta\langle\tau^{-1}\rangle - \right. \tag{8}$$
$$\left. - \left(\langle\tau^{-2}\rangle\beta - \frac{1}{2}\langle\tau^{-1}\rangle^2\beta^2\right)t' + \ldots\right),$$

где введены следующие обозначения:

$$t' = t - \frac{x}{c_\infty}, \quad \beta = \frac{\Delta}{2\langle\tau\rangle}\frac{x}{c_\infty}. \tag{9}$$

Заметим, что если учесть только два первых члена в разложении волнового числа $K(p)$ при $p \longrightarrow \infty$, то будет иметь место прифронтовое представление [10]

$$I(x, t) = e^{-\beta}\left(\delta(t') + \sqrt{\frac{\beta}{t'}\langle\tau^{-1}\rangle} I_1(2\sqrt{\beta t'\langle\tau^{-1}\rangle})\theta(t')\right). \tag{10}$$

В окрестности точки, движущийся со скоростью c_0, структура $I(x, t)$ определяется разложением $K(p)$ при $p \longrightarrow 0$:

$$I(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\beta\langle\tau^2\rangle)^{-1/2}\exp\left(-\frac{t^{*2}}{4\beta\langle\tau^2\rangle}\right), \tag{11}$$

где $t^* = t' - \beta\langle\tau\rangle \approx t - \dfrac{x}{c_0}$.

Заметим, что решение (7) удовлетворяет в области фронта и главной части соответствующим асимптотикам (8) и (10), (11). Также подчеркнем, что все моменты СВР, входящие в асимптотики (8), (11), могут быть экспериментально определены по динамике импульса [6, 7].

Для построения аналитической аппроксимации величины $I(x, t)$ воспользуемся тем же подходом, который был предложен в работе [1]. На больших расстояниях от источника при $\beta \gg 1$ для

оценки $I(x, t)$ можно воспользоваться методом перевала. Для этого представим $I(x, t)$ в виде:

$$I(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} dp \exp(\beta S(\xi, p)), \qquad (12)$$

где

$$\xi = \frac{t'}{\beta}, \quad S(\xi, p) = p(\xi - f(p)) \qquad (13)$$

и

$$f(p) = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} d\tau \frac{g(\tau)}{p + 1/\tau}. \qquad (14)$$

Перевальная точка p_n определяется из условия:

$$S'_p(p_n) = 0. \qquad (15)$$

При заданном значении $\xi \in [0, \infty)$, как показано в [1], уравнение (15) имеет единственное решение $p_n \in (-1/\tau_{\max}, \infty)$ в области $\mathrm{Re}\, p_n > -1/\tau_{\max}$. В окрестности точки p_n перевальный контур проходит перпендикулярно действительной оси. Решение в этом случае записывается в виде:

$$I(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta S''(p_n)}} \exp(\beta S(p_n)). \qquad (16)$$

Фундаментальное решение $I(x, t)$ в представлении (16) является функцией перевальной точки p_n, которая в свою очередь есть функция параметра ξ, неявно определяемая уравнением (15). В [1] показано, что $\xi(p_n)$ является монотонно убывающей от ∞ до 0 функцией переменной p_n при возрастании последней от $-1/\tau_{\max}$ до ∞, и, следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между всеми допустимыми значениями ξ и перевальной точкой p_n. Фронту волны $\xi \longrightarrow 0$ соответствует значение $p_n \longrightarrow \infty$. Максимуму тела импульса соответствует перевальная точка $p_n = 0$.

Рассмотрим более подробно функциональные зависимости $S(p_n)$, $S'(p_n)$ и $S''(p_n)$, которые входят в выражения (15), (16). Начнем с функции $S'(p_n)$, которую представим в виде $S'(p_n) = \xi - f(p) - pf'(p)$. Заметим, что имеет место соотношение

$$-f(p) - pf'(p) = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} d\tau \frac{g(\tau)\tau^{-1}}{(p + 1/\tau)^2},$$

которое, если формально заменить $g(\tau)$ на $g(\tau)/\tau$, совпадает по виду с $-f'(p)$. Введем обозначение для f-интегралов, в которых произведена замена $g(\tau)$ на $g(\tau)/\tau$. Будем обозначать их через $\tilde{f}$. Тогда $S'_p(p) = \xi - \tilde{f}'(p_n)$, а уравнение (15) примет вид

$$\xi = \tilde{f}'(p_n). \qquad (17)$$

Аналогично можно записать $S''_{pp} = -2f'(p) - pf''(p)$ или $S''_{pp} = \tilde{f}''(p)$.

Далее, если выполнено условие (17), то функцию $S(p_n)$ можно представить в виде $S(p_n) = p_n^2 f'(p_n)$. С учетом приведенных выше соотношений выражение (16) можно переписать в виде

$$I(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta \tilde{f}''(p_n)}} \exp(\beta p_n^2 f'(p_n)). \qquad (18)$$

Таким образом, из (17) и (18) следует, что для получения выражения $I(x, t)$ в элементарных функциях необходимо аппроксимировать функции $f'(p_n)$, $\tilde{f}'(p_n)$ и $\tilde{f}''(p_n)$.

При аппроксимации функций $f'(p_n)$, $\tilde{f}'(p_n)$ и $\tilde{f}''(p_n)$ необходимо учитывать следующие условия: аппроксимация $\tilde{f}'(p_n)$ должна быть достаточно простой, чтобы можно было разрешить (17) относительно p_n, а аппроксимация функций $f'(p_n)$ и $\tilde{f}''(p_n)$ должна соответствовать асимптотике (11). Функциональный вид аппроксимации может быть определен по аналогии с частными случаями, для которых имеются точные решения. Так, для СВР $g(\tau) = \delta(\tau - \tau_1)$ соотношение (18) приводится к виду $\xi = \dfrac{\tau_1^{-1}}{(p_n + \tau_1^{-1})^2}$, а для СВР $g(\tau) = (\tau \ln(\tau_{\max}/\tau_{\min}))^{-1}$ оно запишется в виде $\xi = \ln(\tau_{\max}/\tau_{\min})((p_n + \tau_{\max}^{-1})^{-1} - (p_n + \tau_{\min}^{-1})^{-1})$. В обоих этих случаях соотношение (17), рассматриваемое относительно переменной p_n, сводится к квадратному уравнению, допускающему простое аналитическое решение. Исходя из этого, аппроксимирующие выражения для $f'(p_n)$, $\tilde{f}'(p_n)$ и $\tilde{f}''(p_n)$ запишем в следующим виде:

$$f'(p_n) = -\lambda\left(\frac{1}{p_n + \nu} - \frac{1}{p_n + \mu}\right), \qquad (19)$$

$$\tilde{f}'(p_n) = -\tilde{\lambda}\left(\frac{1}{p_n + \tilde{\nu}} - \frac{1}{p_n + \tilde{\mu}}\right), \qquad (20)$$

$$\tilde{f}''(p_n) = \hat{\lambda}\left(\frac{1}{(p_n + \hat{\nu})^2} - \frac{1}{(p_n + \hat{\mu})^2}\right), \qquad (21)$$

где λ, ν, μ, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ – параметры аппроксимации, подлежащие определению. При этом в

случае точной аппроксимации параметры, помеченные значками $\tilde{}$ и $\hat{}$, должны совпадать. Заметим также, что аппроксимация $f'(p_n)$ в виде (19) отличается от той, которая соответствовала бы СВР $g(\tau) = (\tau \ln(\tau_{max}/\tau_{min}))^{-1}$, из-за отсутствия логарифмического слагаемого. Однако более простой вид (19) представляется более предпочтительным.

Подставив (20) в (17) и разрешив это уравнение относительно переменной p_n, получим:

$$p_n = -\tilde{\rho}_0 + \sqrt{\tilde{\rho}_1^2 + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi}}, \tag{22}$$

где введены обозначения $2\tilde{\rho}_0 = \tilde{\mu} + \tilde{\nu}$, $2\tilde{\rho}_1 = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$, $\tilde{\varphi} = 2\tilde{\lambda}\tilde{\rho}_1$. Аналогично введем $2\rho_0 = \mu + \nu$, $2\rho_1 = \mu - \nu$, $\varphi = 2\lambda\rho_1$, $\hat{\rho}_0 = \hat{\mu} + \hat{\nu}$, $2\hat{\rho}_1 = \hat{\mu} - \hat{\nu}$, $\hat{\varphi} = 2\hat{\lambda}\hat{\rho}_1$.

Далее, подставив (22), (19) и (21) в (18), получим аппроксимацию $I(x, t)$ при $\beta \gg 1$. В области максимума тела импульса $p_n \longrightarrow 0$ эта аппроксимация должна совпадать с асимптотикой (11), что позволяет получить ряд условий на имеющиеся свободные параметры. При $p_n \longrightarrow 0$ выражение (18) может быть приведено к виду

$$I(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \dfrac{\beta\hat{\varphi}\hat{\rho}_0}{(\hat{\rho}_0^2 - \hat{\rho}_1^2)^2}}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\dfrac{(\tilde{\rho}_0^2 - \tilde{\rho}_1^2)^4}{\tilde{\varphi}^2\tilde{\rho}_0^2}\left(t' - \dfrac{\beta\tilde{\varphi}}{\tilde{\rho}_0^2 - \tilde{\rho}_1^2}\right)^2}{\dfrac{\rho_0^2 - \rho_1^2}{4\beta}}\right).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты в этом выражении и в (11), легко видеть, что должны выполняться условия:

$$\frac{(\tilde{\rho}_0^2 - \tilde{\rho}_1^2)^4}{\tilde{\varphi}^2\tilde{\rho}_0^2}\frac{1}{\rho_0^2 - \rho_1^2} = \frac{1}{\langle\tau^2\rangle}, \tag{23}$$

$$\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{\rho}_0^2 - \tilde{\rho}_1^2} = \langle\tau\rangle, \tag{24}$$

$$\frac{\hat{\varphi}\hat{\rho}_0}{(\hat{\rho}_0^2 - \hat{\rho}_1^2)^2} = \langle\tau^2\rangle. \tag{25}$$

Выражение (18), полученное методом перевала при $\beta \gg 1$, описывает тело импульса. Однако в окрестности фронта импульса при $p_n \longrightarrow \infty$ метод перевала не работает и, соответственно, в этой области выражение (18) не является корректным. Чтобы устранить этот недостаток, модифицируем (18) таким образом, чтобы оно удовлетворяло прифронтовым асимптотикам (8), (10) и в случае единственного времени релаксации переходило бы в (7). Для этого, используя (22), перепишем (18) в тождественном виде

$$I(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta\tilde{f}''(p_n)}} \times$$

$$\times \exp\left(\beta f'(p_n)\left(\tilde{\rho}_0^2 + \tilde{\rho}_1^2 + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi} + A + B\sqrt{C + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi}}\right)\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\beta f'(p_n)\left(2\tilde{\rho}_0\sqrt{\tilde{\rho}_1^2 + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi}} + A + B\sqrt{C + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi}}\right)\right),$$

где в экспоненте добавлены и вычтены слагаемые с коэффициентами A, B, C – того же функционального вида, которые там присутствовали. Наличие этих дополнительных слагаемых позволит в дальнейшем непротиворечиво удовлетворить условиям прифронтовой асимптотики. Будем далее считать последнюю экспоненту асимптотикой модифицированной функции Бесселя I_1 при стремлении ее аргумента к ∞, что выполняется при $p_n \longrightarrow \infty$ ($\xi \longrightarrow 0$). Тогда можно записать

$$I(x, t) = \theta(t') \times$$

$$\times \sqrt{\frac{-f'(p_n)\left(2\tilde{\rho}_0\sqrt{\tilde{\rho}_1^2 + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi}} + A + B\sqrt{C + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi}}\right)}{\tilde{f}''(p_n)}} \times$$

$$\times \exp\left(\beta f'(p_n)\left(\tilde{\rho}_0^2 + \tilde{\rho}_1^2 + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi} + A + B\sqrt{C + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi}}\right)\right) \times \tag{26}$$

$$\times I_1\left(-\beta f'(p_n)\left(2\tilde{\rho}_0\sqrt{\tilde{\rho}_1^2 + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi}} + A + B\sqrt{C + \frac{\tilde{\varphi}}{\xi}}\right)\right) +$$

$$+ \delta(t')e^{-\beta},$$

где также добавлена сингулярная часть функции Грина, соответствующая предвестнику, которая не учитывается в методе перевала.

Подберем свободные параметры выражения (26) таким образом, чтобы при $p_n \longrightarrow \infty$ ($\xi \longrightarrow 0$) оно переходило в асимптотику (8). Для этого разложим (26) в ряд по ξ с точностью до линейных слагаемых. В результате получим

$$I(x, t) = e^{-\beta}\left(\beta\sqrt{\frac{\rho_0^3}{\hat{\varphi}}}\left(1 - \left(\frac{3\rho_0^2 + \rho_1^2 - 2\hat{\rho}_0\rho_0}{\tilde{\varphi}} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \beta\frac{\rho_0^2}{2\tilde{\varphi}}\right)t' + \ldots\right)\theta(t') + \delta(t')\right),$$

где с помощью коэффициентов A, B, C исключены посторонние члены с дробными степенями t', что приводит к условиям

$$\varphi = 1, \quad B = 2(\rho_0 - \tilde{\rho}_0),$$

$$A = 2\rho_0(2\rho_0 - \tilde{\rho}_0 - \hat{\rho}_0), \tag{27}$$

$$C = \frac{2\rho_0(\rho_0 - \hat{\rho}_0)^2 - \rho_0^2\rho_1 + \tilde{\rho}_1^2(\rho_0 - \tilde{\rho}_0) + \frac{4}{3}\hat{\rho}_1^2\rho_0}{\rho_0 - \tilde{\rho}_0}.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты в асимптотике (8) и полученном разложении аппроксимационной функции (26), получим следующие соотношения для свободных параметров аппроксимации:

$$\sqrt{\frac{\rho_0^3}{\hat{\varphi}}} = \langle\tau^{-1}\rangle, \tag{28}$$

$$\frac{\rho_0^2}{\tilde{\varphi}} = \langle\tau^{-1}\rangle, \tag{29}$$

$$\frac{3\rho_0^2 + \rho_1^2 - 2\hat{\rho}_0\rho_0}{\tilde{\varphi}} = \frac{\langle\tau^{-2}\rangle}{\langle\tau^{-1}\rangle}. \tag{30}$$

В результате получено, что на 12 свободных параметров аппроксимирующей функции (26), а именно ρ_1, ρ_0, φ, $\tilde{\rho}_1$, $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{\varphi}$, $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_0$, $\hat{\varphi}$, A, B и C, имеется 10 условий: шесть уравнений (23), (24), (25), (28), (29), (30) и четыре уравнения (27). Таким образом, осталось еще два свободных условия для того, чтобы удовлетворить соотношению между параметрами, отмеченными значками $\tilde{}$ и $\hat{}$, в той области, где работает метод перевала. В этой области аппроксимационное выражение (21) должно совпадать с производной от (20) по крайней мере в пределе $p_n \longrightarrow 0$. Вычисляя соответствующие пределы в этих выражениях получим еще два условия:

$$\frac{\hat{\varphi}\hat{\rho}_0}{(\hat{\rho}_0^2 - \hat{\rho}_1^2)^2} = \frac{\tilde{\varphi}\tilde{\rho}_0}{(\tilde{\rho}_0^2 - \tilde{\rho}_1^2)^2}, \tag{31}$$

$$\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{\rho}_0^2 - \tilde{\rho}_1^2} = \frac{\hat{\varphi}}{\hat{\rho}_0^2 - \hat{\rho}_1^2}. \tag{32}$$

Теперь необходимо разрешить полученную алгебраическую систему из 12 уравнений с 12 неизвестными, четыре из которых – группа (27) – тривиально выражаются через решения остальных восьми. В результате решения системы, состоящей из уравнений (23)–(25), (28)–(32), получим:

$$\rho_0^2 = \frac{\left(4 - \frac{\langle\tau^{-2}\rangle}{\langle\tau^{-1}\rangle^2}\right) + \sqrt{\left(4 - \frac{\langle\tau^{-2}\rangle}{\langle\tau^{-1}\rangle^2}\right)^2 - \frac{8}{\langle\tau^{-1}\rangle^2\langle\tau\rangle^2}}}{4\frac{\langle\tau^2\rangle}{\langle\tau\rangle^2\langle\tau^{-1}\rangle^2}}, \tag{33}$$

$$\hat{\rho}_0 = \frac{\langle\tau^2\rangle}{\langle\tau\rangle^2\langle\tau^{-1}\rangle^2}\rho_0^3, \tag{34}$$

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{\langle\tau^2\rangle}{\langle\tau\rangle^2\langle\tau^{-1}\rangle^2}\rho_0^2, \tag{35}$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{\rho_0^2}{\langle\tau^{-1}\rangle}, \tag{36}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\rho_0^3}{\langle\tau^{-1}\rangle^2}, \tag{37}$$

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_0^2 - \frac{1}{\langle\tau^2\rangle}}, \tag{38}$$

$$\tilde{\rho}_1 = \sqrt{\tilde{\rho}_0^2 - \frac{\tilde{\varphi}}{\langle\tau\rangle}}, \tag{39}$$

$$\hat{\rho}_1 = \sqrt{\hat{\rho}_0^2 - \frac{\hat{\varphi}}{\langle\tau\rangle}}. \tag{40}$$

Отметим, что в случае единственного механизма $g(\tau) = \delta(\tau - \tau_1)$ из (33)–(40) получаем $\rho_0 = \hat{\rho}_0 = \tilde{\rho}_0 = \tilde{\varphi} = \hat{\varphi} = \tau_1^{-1}$, $\rho_1 = \hat{\rho}_1 = \tilde{\rho}_1 = 0$ а из (27) – соответственно – $\varphi = 1$, $A = B = C = 0$. Подстановка этих значений в (26) приводит к выражению, полностью совпадающему с точным решением (7).

Поскольку подкоренные выражения в соотношениях (33), (38)–(40) должны быть неотрицательны, то это накладывает определенные ограничения на соотношения между моментами СВР, используемыми для аппроксимации, и, тем самым, на вид СВР. Если ввести обозначения

$$r = \frac{\langle\tau^{-2}\rangle}{\langle\tau^{-1}\rangle^2}; \quad q = \frac{\langle\tau\rangle^2}{\langle\tau^2\rangle}; \quad h = 1/\langle\tau\rangle\langle\tau^{-1}\rangle,$$

то ограничения, накладываемые на соотношения между моментами СВР, можно записать в виде

$$\begin{gathered} 4 \geq r + 2h^2 + 1, \quad 4 \geq r + h/q + 2hq, \\ 4 \geq r + h((h/q)^{1/3} + 2(q/h)^{1/3}). \end{gathered} \tag{41}$$

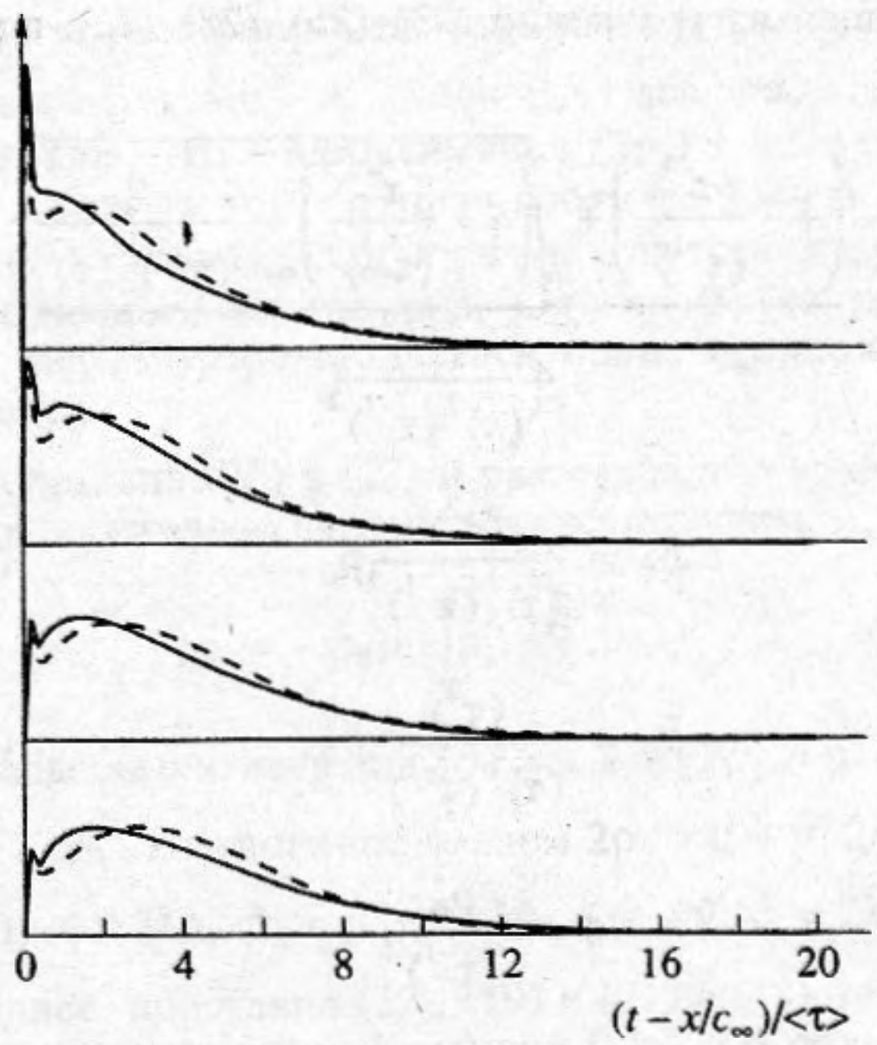

Рис. 1. Профили импульса в средах с СВР вида $\delta(\tau - \tau_1)$ (пунктир) и $g(\tau) = (\tau_{min}^{-1} - \tau_{max}^{-1})^{-1}\tau^{-2}$ (сплошная линия) на различных безразмерных расстояниях расстояниях $\beta = 3.0$; 3.5; 4.0; 4.5 при $\langle\tau\rangle = \tau_1$, $(\langle\tau^2\rangle)^{1/2}/\langle\tau\rangle = 1.22$. Длительность начального импульса составляет $T_0 = 0.1\tau_1$.

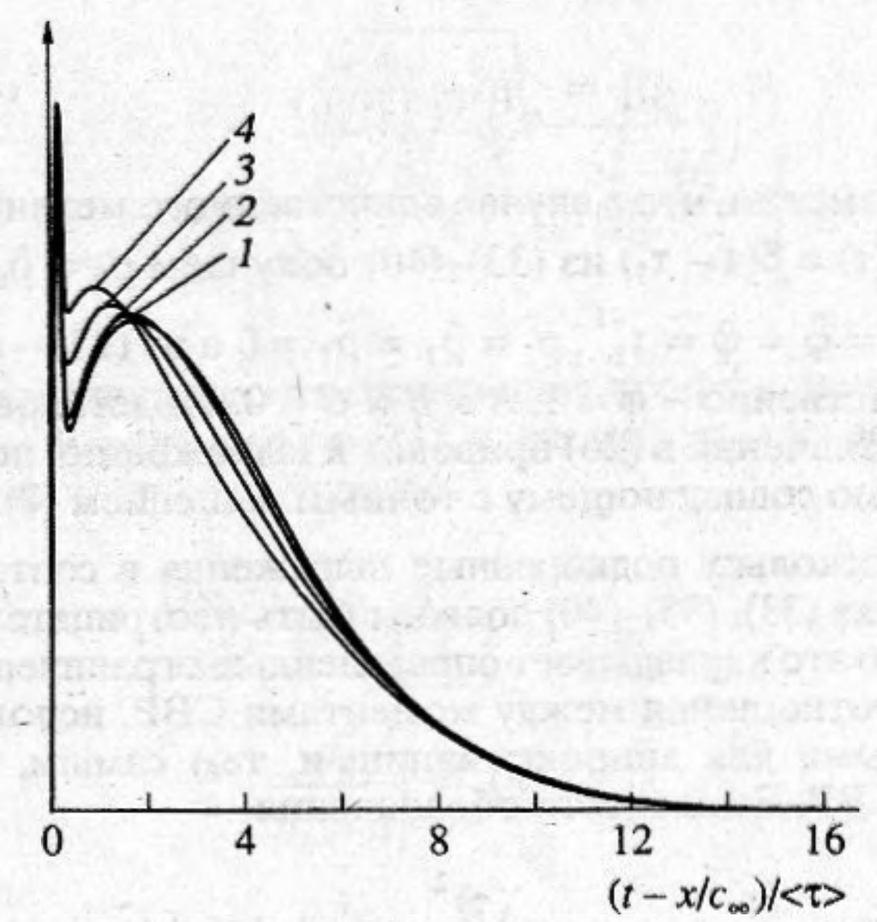

Рис. 2. Профили импульса в среде с СВР вида $g(\tau) = (\tau_{min}^{-1} - \tau_{max}^{-1})^{-1}\tau^{-2}$ на безразмерном расстоянии $\beta = 3.5$ при различной безразмерной ширине спектра $\Delta\tau = \frac{\sqrt{\langle\tau^2\rangle}}{\langle\tau\rangle}$, равной соответственно: *1* – 1.00, *2* – 1.02, *3* – 1.11, *4* – 1.22.

Эти ограничения связаны с приближенным характером аппроксимирующих выражений, и, естественно, отсутствовали бы в точных решениях.

Несложные оценки, тем не менее, показывают применимость предложенного подхода, например, для всех достаточно узких спектров в случае $(\tau_{max} - \tau_{min})/\tau_{max} \ll 1$, а также для широких степенных спектров $g(\tau) \sim \tau^n$, если $|n| > 1$ и $\tau_{max} \gg \tau_{min}$. Особый интерес представляет применимость полученной аппроксимации (26) для широко используемого в акустике логнормального СВР $g(\tau) = \frac{1}{\tau\sigma\sqrt{\pi}}\exp(-(\ln(\tau/\tau_0)/\sigma)^2)$. В этом случае, как показывают численные оценки условий (40), область применимости аппроксимации (26) простирается от нуля вплоть до значений ширины спектра, соответствующих параметру $\sigma \le 1.4$.

Таким образом, полученная аппроксимация фундаментального решения (26) имеет достаточно широкую область применимости, ее параметры выражены через экспериментально определяемые моменты СВР, и она адекватно отражает особенности динамики импульса.

Отметим также, что в отличие от работы [1], где в качестве прифронтовой асимптотики использовалось представление (8), в настоящей работе используется более полное представление (7), которое позволяет корректно описывать наклон тела импульса на фронте. Именно для непротиворечивого учета этого обстоятельства в выражение (26) были введены члены с коэффициентами *A*, *B*, *C*. Кроме того, в данной работе более полно учтено функциональное соотношение между функциями $\tilde{f}'(p_n)$ и $\tilde{f}''(p_n)$, которое в [1] полностью игнорировалось.

Для иллюстрации полученных результатов ниже приводятся примеры некоторых численных расчетов динамики импульса с использованием соотношений (26). Для расчетов использовался начальный импульс вида:

$$Q(t) = \frac{t}{T_0}\exp\left(-\frac{t^2}{T_0^2}\right).$$

На рис. 1 показаны расчетные профили импульса на безразмерных расстояниях β, равных 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, распространяющегося по среде с единственным релаксационным процессом (сплошная линия) и по среде с распределенным СВР вида $g(\tau) = (\tau_{min}^{-1} - \tau_{max}^{-1})^{-1}\tau^{-2}$ (пунктир) при $\langle\tau\rangle = \tau_1$, $\langle\tau^2\rangle^{1/2} = 1.22\tau_1$. В этом случае амплитуды предвестников совпадают. Длительность начального импульса составляет $T_0 = 0.1\tau_1$. На рисунке хорошо просматривается эволюция импульса, формирование тела импульса и затухание упругого пред-

вестника. Из рис. 1 также видно, что динамика импульса в среде с распределенным СВР, даже при незначительной ширине спектра, отличается от аналогичной картины в среде с единственным релаксационным процессом. Именно этот факт может быть использован для импульсной акустодиагностики сред [6, 7].

На рис. 2 и рис. 3 показано, как зависит форма импульса от ширины спектра на некотором фиксированном расстоянии. На рис. 2 приведены расчетные профили импульса для СВР вида $g(\tau) = (\tau_{\min}^{-1} - \tau_{\max}^{-1})^{-1}\tau^{-2}$, а на рис. 3 – для СВР вида $g(\tau) = \frac{1}{\tau\sigma\sqrt{\pi}}\exp(-(\ln(\tau/\tau_0)/\sigma)^2)$. Расчеты иллюстрируют существенное отличие в длительности и амплитуде тела импульса для однотипных спектров различной ширины.

Как уже отмечалось в начале статьи, одной из наиболее эффективных областей применения аналитической аппроксимации (26) является моделирование динамики короткого импульса, распространяющегося в неоднородной релаксационной среде. В работе [8] показано, что в этом случае фундаментальное решение может быть представлено в виде

$$I(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp \exp\left(pt - \int_0^x dx \frac{p}{c_\infty(x)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \frac{\Delta(x)}{2\langle\tau(x)\rangle}\int_0^\infty d\tau \frac{g(\tau,x)}{p+1/\tau}\right)\right),$$

$$\gamma = (\delta - i\infty, \delta + i\infty), \quad g(\tau,x) \geq 0.$$

Пусть теперь $\alpha(x) = \frac{\Delta(x)\langle\tau(0)\rangle c_\infty(0)}{\Delta(0)\langle\tau(x)\rangle c_\infty(x)}$, $t_X' = t - \int_0^x \frac{dx'}{c_\infty(x')}$, $\beta = \frac{\Delta(0)}{2\langle\tau(0)\rangle c_\infty(0)}$, и введено обозначение $\hat{g}_X(\tau) = \int_0^x dx\, g(\tau,x)\alpha(x)$. Тогда фундаментальное решение $I(x,t)$ можно переписать в виде

$$I(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp e^{-pt_X'} \exp\left(-p\beta\int_0^\infty d\tau \frac{\hat{g}_X(\tau)}{p+\tau^{-1}}\right),$$

который формально соответствует однородному случаю (4), (5). Таким образом, описанный выше метод применим и для неоднородной среды при замене $g(\tau)$ на $\hat{g}_X(\tau)$ с учетом того, что полученные в результате такой замены аналоги моментов СВР становятся интегральными характеристиками трассы распространения.

На рис. 4 приведен модельный пример влияния температурной неоднородности среды на форму

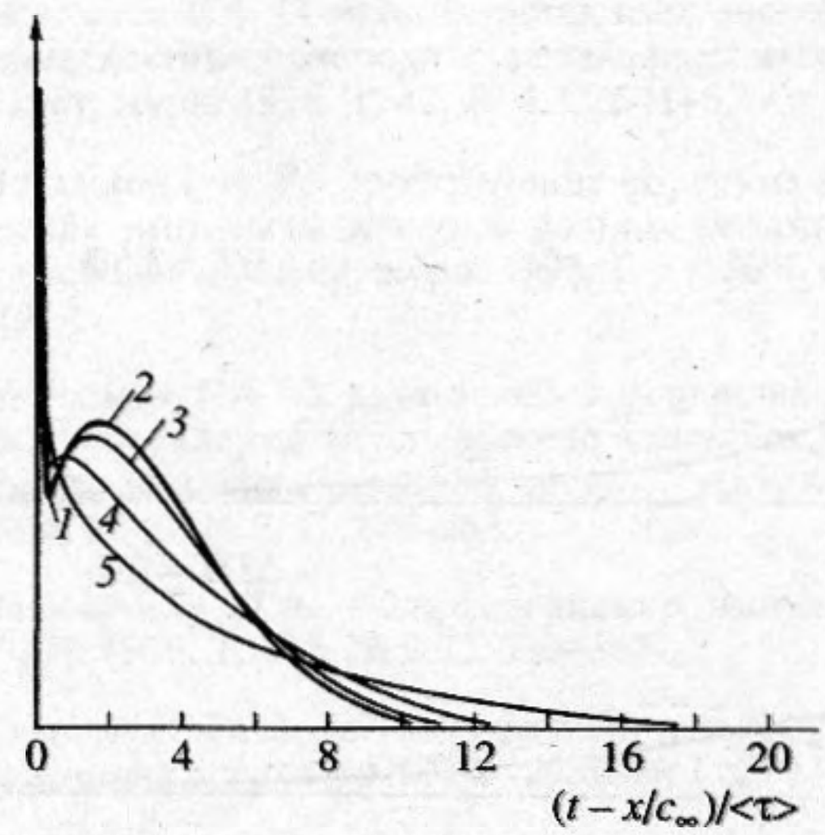

Рис. 3. Профили импульса в среде с СВР вида $g(\tau) = \frac{1}{\tau\sigma\sqrt{\pi}}\exp(-(\ln(\tau/\tau_0)/\sigma)^2)$ на безразмерном расстоянии $\beta = 3.5$ при различной ширине спектра σ, равной *1* – 10^{-6}, *2* – 0.1, *3* – 0.5, *4* – 1, *5* – 1.14. Безразмерная ширина $\frac{\sqrt{\langle\tau^2\rangle}}{\langle\tau\rangle}$ равна соответственно: 1.0025, 1.063, 1.28, 1.63.

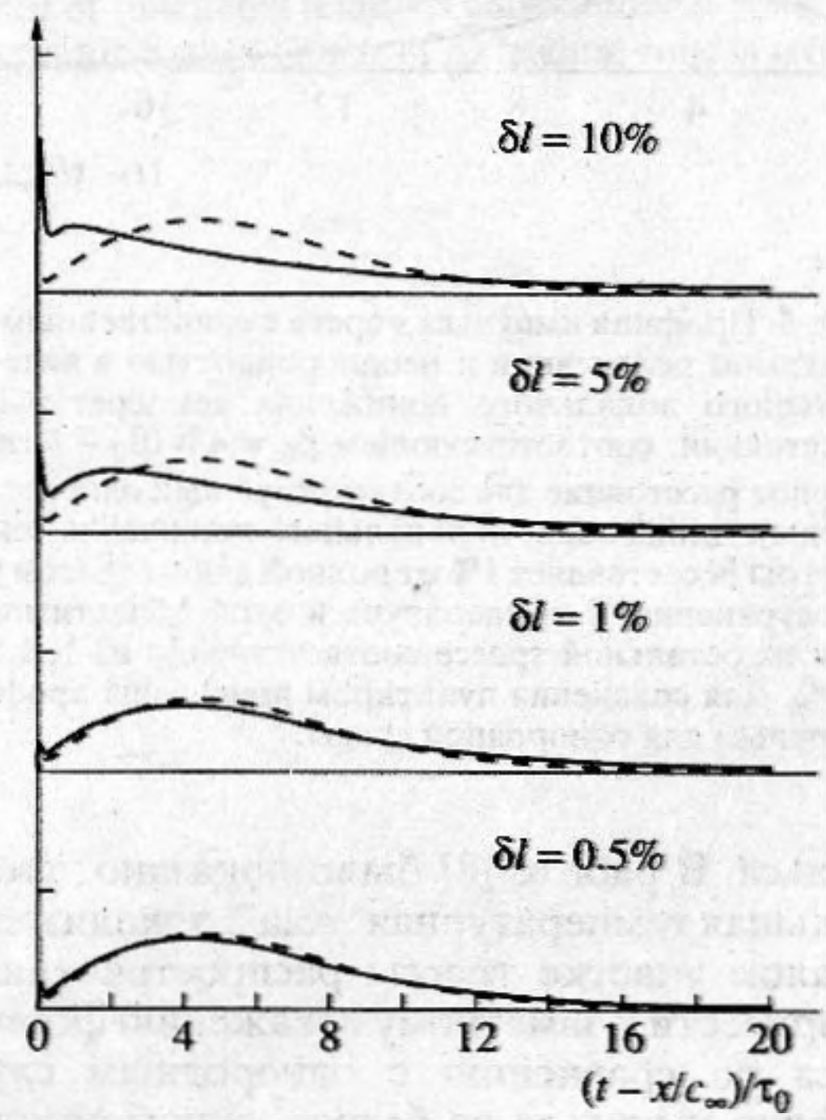

Рис. 4. Профили импульса в среде с единственным механизмом релаксации и с неоднородностью в виде небольшого локального понижения температуры на расстоянии, соответствующем $\beta_0 = 4.0$ (β_0 – безразмерное расстояние соответствующей однородной среды). Длина области локального понижения температуры δl составляет, соответственно, 0.5, 1, 5, 10% от полной длины трассы распространения, а температура в этой области на 2% ниже, чем на остальной трассе. Для сравнения пунктиром приведены профили импульса для однородной среды.

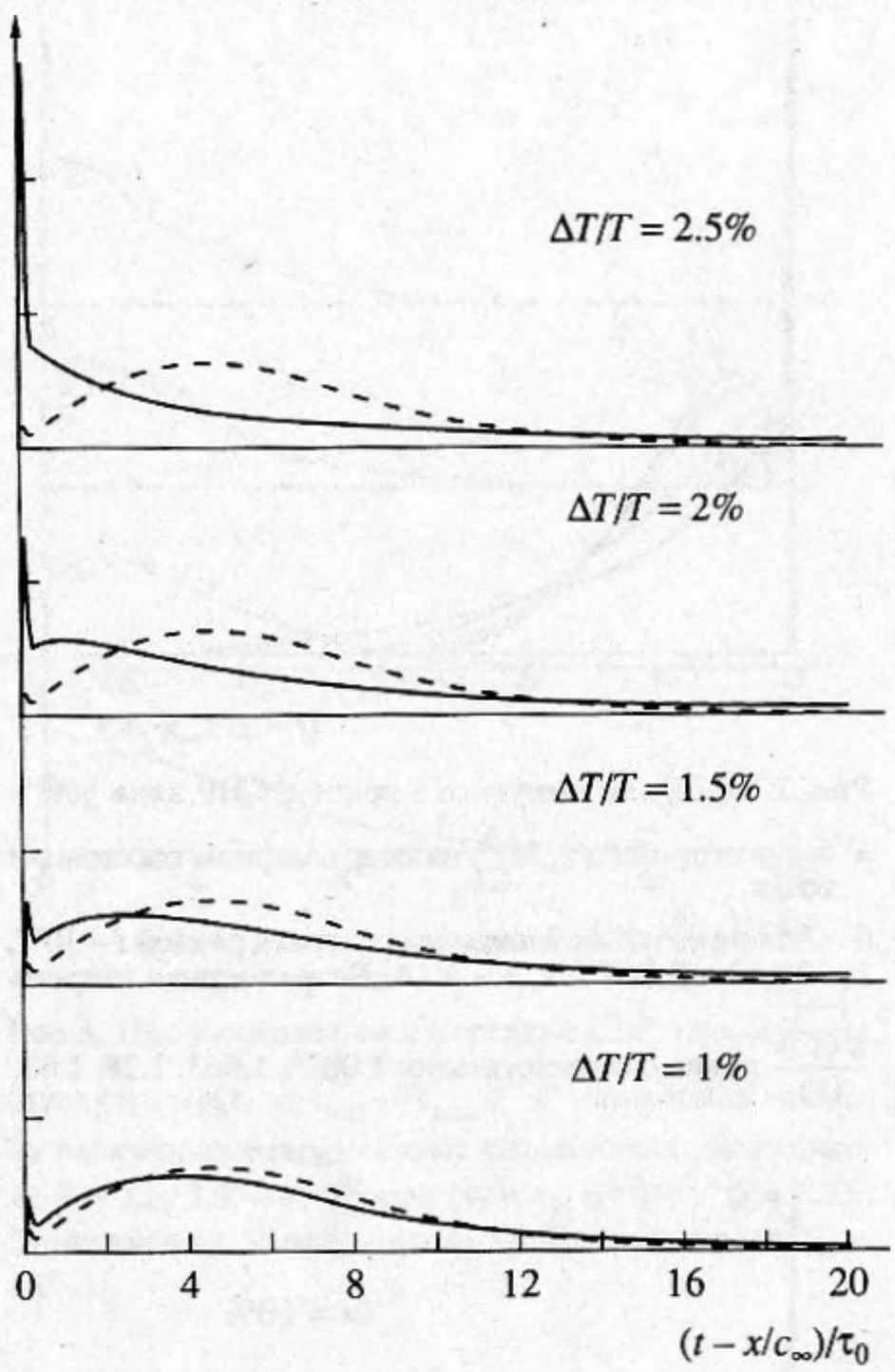

Рис. 5. Профили импульса в среде с единственным механизмом релаксации и неоднородностью в виде небольшого локального понижения температуры на расстоянии, соответствующем $\beta_0 = 4.0$ (β_0 – безразмерное расстояние для соответствующей однородной среды). Длина области локального понижения температуры δl составляет 1% от полной длины трассы распространения, а температура в этой области ниже, чем на остальной трассе соответственно на 1, 1.5, 2, 2.5%. Для сравнения пунктиром приведены профили импульса для однородной среды.

импульса. В работе [8] было показано, что даже небольшая температурная "яма", локализованная на малом участке трассы распространения, может привести к заметному искажению формы импульса по сравнению с однородным случаем. Профили импульса на безразмерном расстоянии $\beta = 4.0$ в среде с единственным механизмом релаксации при температурной неоднородности среды в виде небольшого локального понижения температуры показаны на рис. 4. При этом зависимость времени релаксации от координаты – $\tau_1(x) = \tau_0 \exp\left(\frac{U}{T(x)}\right)$, где T – температура, U – энергия активации. СВР имеет вид $g(\tau, x) = \delta(\tau - \tau_1(x))$, а температура равна $T(x) = T$ на всей длине трассы, кроме отрезка Δx, на котором $T(x) = T + \Delta T$. Длина области локального понижения температуры Δx составляет, соответственно, 0.5%, 1%, 5%, 10% от полной длины трассы распространения (рис. 4), а температура в этой области на 2% ниже, чем на остальной трассе. При этом отношение температуры к энергии активации $\frac{T}{U}$ составляет 1%. Видно, что уже начиная с размера неоднородности порядка 1%, можно говорить о существенном отличии импульса, распространяющегося в неоднородной (сплошная линия) и однородной (пунктир) среде. Из рис. 4 следует, что различия в форме импульса, прошедшего температурную неоднородность разного масштаба, имеют качественный характер и должны быть легко доступны наблюдениям. Аналогичный вывод следует и из рис. 5, на котором приведены импульсы при одной и той же длине температурной неоднородности (10% от длины трассы), но для различных величин $\frac{\Delta T}{T}$. Отношение температуры к энергии активации $\frac{T}{U}$ составляет 1%. Так же как и на рисунке 4, для сравнения пунктиром приведены импульсы в однородной среде.

В заключение еще раз отметим, что в работе предложена новая аппроксимация профиля короткого импульса, описывающая динамику его распространения по релаксационной среде (26). В отличие от работы [1] учтены основные функциональные соотношения точного решения, а параметры аппроксимации выражены через экспериментально определяемые моменты СВР ($\langle\tau^n\rangle = -2 \ldots 2$). Полученная аппроксимация правильно описывает поведение точного решения на фронте импульса в области упругого предвестника и в области максимума тела импульса. Она может быть использована для эффективного расчета динамики акустического импульса в релаксационных средах сложного реологического строения. При этом зависимость параметров аппроксимации только от экспериментально определяемых моментов СВР позволяет использовать ее для целей импульсной акустодиагностики сред. Эта аппроксимация также может быть применена для моделирования динамики акустических импульсов в пространственно неоднородных релаксационных средах, для которых получение точных решений представляет принципиальную сложность, а численные методы расчета недостаточно эффективны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дунин С.З., Максимов Г.А.* Распространение импульсов в средах, обладающих спектром времен

релаксации // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 6. С. 1048–1055.

2. *Новик А., Берри Б.* Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975.
3. *Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П.* Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964.
4. *Leander Johan L.* Acoustic pulse propagation in Maxwell fluids // J. Acoust. Soc. Am. V. 94. № 3. Pt. 1. September 1993.
5. *Leander Johan L.* A note on acoustic pulse distortion in liquids exhibiting a continuous distribution of Maxwell relaxation processes // J. Acoust. Soc. Am. V. 89. № 3. March 1991.
6. *Максимов Г.А., Ларичев В.А.* О возможностях импульсной акустодиагностики релаксационных сред // Труды IV сессии РАО. Акустические измерения. Методы и средства. М., 1995. С. 60–62.
7. *Максимов Г.А.* О возможностях импульсной акустодиагностики однородных релаксационных сред // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 4. С. 541–550.
8. *Максимов Г.А.* Распространение коротких акустических импульсов в неоднородных релаксационных средах // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 4. С. 703–714.
9. *Максимов Г.А.* О двух точных решениях задачи распространения акустического импульса в неоднородной максвелловской среде // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 279–283.
10. *Вайнштейн Л.А.* Распространение импульсов // УФН. 1976. Т. 118. № 2. С. 339–367.
11. *Дунин С.З.* Распространение волн в слабо диспергирующих средах // ПМТФ. 1986. № 1. С. 138–141.

Analytical Description Short Pulse Propagating Dynamics in a Relaxation Medium

V. A. Larichev and G. A. Maksimov

An approximating analytical expression is derived to describe the dynamic profile of a short pulse propagating in a relaxation medium. The approximating parameters are expressed in terms of several experimentally measurable first moments of the relaxation time spectra, $\langle\tau^n\rangle$, $n = -2$ to 2. At its basis, the approximation has an approach proposed earlier [1], but it takes into account a number of functional relations and additional conditions. This modification assures that the dynamics of the pulse profile in the vicinity of its leading edge is rendered more faithfully.