АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 3, с. 396–401

УДК 534.222

# ПОЛНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ В ДВИЖУЩИХСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕДАХ

© 1997 г. О. В. Руденко, А. К. Сухорукова, А. П. Сухоруков

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет*
*119899 Москва, Воробьевы горы*

Поступила в редакцию 06.02.96 г.

Дан последовательный вывод в высокочастотном приближении уравнений эйконала и переноса, описывающих распространение звуковых волн в неоднородных движущихся нелинейных средах. Впервые получены точные решения этих уравнений при произвольном распределении фазы (волнового фронта) и амплитуды (профиля пучка и временнóго импульса) на поверхности источника звука произвольной формы. Рассчитана картина лучей и уровни равного давления в плоскослоистой среде при наличии ветра, скорость которого возрастает с высотой.

Исследование распространения интенсивных акустических волн в атмосфере и океане представляет интерес в связи с решением многих фундаментальных и прикладных задач. В частности, речь может идти о звуковых волнах, рождающихся при взрывах или исходящих от летательных аппаратов и других источников. На распространение звука, как известно, большое влияние оказывает изменение в пространстве акустических свойств воздуха. Для описания неоднородности атмосферы с учетом конвективных потоков используется, как правило, модель стратифицированной по высоте движущейся среды. Хотя такое предположение сильно упрощает волновое уравнение, нахождение его аналитического решения в общем случае, по-видимому, не представляется возможным. Ситуация еще более усложняется при анализе формирования и распространения ударных волн в неоднородной движущейся атмосфере. Поэтому в данной статье теория распространения интенсивных звуковых волн рассматривается в приближении высокочастотной (геометрической) акустики. Именно в этом приближении удается получить достаточно общие выражения, описывающие не только ход лучей, но и изменение интенсивности звука вдоль лучевых траекторий.

Основы геометрической акустики движущихся сред были заложены в [1]. В [2] можно найти обзор работ, выполненных по этой проблеме к концу 1980-х годов. Анализ этих работ показывает, что наибольшие трудности представляет нахождение решения уравнения переноса энергии. Именно поэтому в подавляющем числе публикаций представлены методы и результаты расчета лучевых траекторий. Исследованию хода лучей посвящены также недавно опубликованные работы [3, 4]. Уравнение переноса для некоторых частных случае решается в [4–6].

Последовательный подход к решению задач нелинейной акустики неоднородных сред в высокочастотном приближении изложен в нашей работе [7]. Предложенная методика нахождения общего аналитического решения уравнений эйконала и переноса была далее развита в [8] применительно к анализу распространения двумерных волн в стратифицированных нелинейных средах. Эти две статьи относятся к случаю неподвижных сред. Поэтому представляет большой интерес обобщение метода нахождения точных решений на высокочастотную нелинейную акустику движущихся сред.

*1. Вывод уравнений нелинейной высокочастотной акустики движущихся сред*

Распространение звуковых волн описывается известными уравнениями гидродинамики для давления $p$ и плотности среды $\rho$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{w} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\nabla p + (\mathbf{w}\nabla)\mathbf{w} = 0. \tag{1.2}$$

Скорость движения частиц $\mathbf{w}$ складывается из колебательной скорости $\mathbf{u}$ и скорости движения среды $\mathbf{v}$. В поле стационарного ветра или потока имеем

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}), \tag{2}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор в декартовой системе координат. Под действием звуковой волны давление и плотность также меняются на малые величины.

Поэтому их можно представить в следующем виде:

$$p(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) + p'(\mathbf{r}, t), \tag{3.1}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) + \rho'(\mathbf{r}, t) + \rho''(\mathbf{r}, t). \tag{3.2}$$

Здесь $p(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r})$ характеризуют стационарное состояние среды, величины с одним штрихом имеют первый порядок малости, $p' \sim \rho' \sim \mathbf{u}$, а с двумя штрихами – второй порядок малости.

Адиабатическому процессу распространения волн отвечает материальное уравнение

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})[p(\mathbf{r}, t)/p(\mathbf{r})]^{1/\gamma}, \tag{4}$$

которое замыкает систему уравнений (1.1)–(1.2), $\gamma$ – константа адиабаты. Скорость звука выражается известной формулой

$$c(\mathbf{r}) = [\gamma p(\mathbf{r})/\rho(\mathbf{r})]^{1/2}. \tag{5}$$

Разложим функцию $\rho(\mathbf{r}, t)$ (4) с учетом (5) в ряд, ограничиваясь первыми тремя членами

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) + \frac{p'}{c^2} - \frac{(\gamma - 1)p'^2}{2c^4\rho}. \tag{6}$$

Формула (6) дает связь между возмущениями давления и плотности, введенными в (3),

$$\rho' = p'/c^2, \quad \rho'' = -(\gamma - 1)p'^2/[2c^4\rho(\mathbf{r})]. \tag{7}$$

Для разделения быстрых и медленных процессов перейдем в уравнениях (1.1)–(1.2) к новым независимым переменным

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}, \quad \tau = t - \psi(\mathbf{r})/c_0, \tag{8}$$

где $\psi(\mathbf{r})$ – эйконал, $c_0$ – скорость звука в некоторой выбранной точке пространства. Тогда дифференциальные операторы заменятся согласно (8) на следующие:

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \tau}; \quad \nabla \longrightarrow \nabla - \frac{1}{c_0}\nabla\psi\frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{9}$$

С учетом (2) и (9) исходную систему уравнений можно записать в новых переменных следующим образом:

$$\left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c_0}\nabla\psi\right)\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \nabla[\rho(\mathbf{u} + \mathbf{v})] - \frac{1}{c_0}\nabla\psi\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial\tau} = 0, \tag{10.1}$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau} + \nabla p - \frac{1}{c_0}\nabla\psi\frac{\partial p}{\partial\tau} + \rho[(\mathbf{u} + \mathbf{v})\nabla](\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \frac{\rho}{c_0}[(\mathbf{u} + \mathbf{v})\nabla\psi]\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau} = 0. \tag{10.2}$$

Подставим теперь разложения (3) с учетом (7) в (10) и выделим сначала члены первого порядка. Ими оказываются слагаемые, содержащие производные по сопровождающей переменной $\tau$, а именно:

$$(1 - \bar{\gamma}\nabla\psi)\frac{\partial\rho'}{\partial\tau} - \frac{\rho}{c_0}\nabla\psi\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau} = 0, \tag{11.1}$$

$$-\frac{c^2}{c_0}\nabla\psi\frac{\partial\rho'}{\partial\tau} + (1 - \bar{\gamma}\nabla\psi)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau} = 0. \tag{11.2}$$

Здесь введено обозначение $\bar{\gamma} = \mathbf{v}/c_0$. Необходимым условием совместимости уравнений (11.1) и (11.2) является равенство нулю детерминанта, из чего следует уравнение эйконала

$$(\nabla\psi)^2 = n^2(1 - \bar{\gamma}\nabla\psi)^2, \tag{12}$$

где $n \doteq c_0/c$ – показатель преломления. При выполнении (12) из (11) находим связь колебательной скорости $\mathbf{u}$ с изменением плотности $\rho'$ и, следовательно, с изменением давления $p'$ (см. (7.1)):

$$\mathbf{u} = p'\nabla\psi/(c\rho|\nabla\psi|). \tag{13}$$

Уравнение переноса получим из (10.1)–(10.2), собирая производные второго порядка по "быстрой" переменной $\tau$ и производные первого порядка по "медленным" пространственным переменным с учетом соотношений (7.2) и (13). С этой целью уравнение (10.2) помножим на $(\nabla\psi/c|\nabla\psi|)$ и сложим с (10.1). В результате получаем уравнение переноса для акустического давления в неоднородной нелинейной среде (далее снимаем индекс штрих у акустического давления $p'$):

$$2\mathbf{u}_{\text{гр}}\nabla p + p\nabla\mathbf{u}_{\text{гр}} - p\mathbf{u}_{\text{гр}}\nabla\ln\left[\frac{\rho c(1 - 2\bar{\gamma}\nabla\psi)}{|\nabla\psi|}\right] - \frac{2\varepsilon|\nabla\psi|}{c_0 c\rho}p\frac{\partial p}{\partial\tau} = 0, \tag{14}$$

где вектор локальной групповой скорости определяется выражением

$$\mathbf{u}_{\text{гр}} = \mathbf{v} + c\nabla\psi/|\nabla\psi|. \tag{15}$$

Таким образом, распространение нелинейных звуковых волн в неоднородной среде описывается в высокочастотном приближении уравнениями (12) и (14). Уравнение эйконала (12), не зависящее от квадратичной нелинейности, было получено в давней работе [1]. Оно широко используется для нахождения хода лучей в средах с различной неоднородностью, см. например, [2]–[4].

Уравнение переноса (14) для нелинейной движущейся среды впервые выведено нами в данной работе. Уравнение (14) переходит в рассмотренные ранее уравнения переноса, с одной стороны, для слабых акустических сигналов ($\varepsilon = 0$) в линейных движущихся средах [1, 2] и, с другой стороны,

при отсутствии ветра ($\mathbf{v} = 0$) в покоящихся нелинейных средах [7, 8]. Перейдем теперь к последовательному нахождению аналитических решений уравнений (12), а затем (14) с произвольными условиями на границе акустического излучателя.

*2. Общее решение уравнений эйконала и переноса для нелинейной движущейся среды*

Движение среды вносит своеобразную анизотропию, вследствие чего направления фазовой $\bar{u}_{\text{фаз}} = c\nabla\psi/|\nabla\psi|$ и групповой (15) скоростей не совпадают. Это обстоятельство значительно затрудняет построение аналитических решений уравнений эйконала и переноса. Задача сильно упрощается при рассмотрении распространения звуковых волн в стратифицированных средах, когда скорость звука $c(z)$, равновесная плотность $\rho(z)$, коэффициент нелинейности $\varepsilon(z)$ зависят от одной координаты $z$ (высоты). При этом скорость ветра имеет горизонтальное направление:

$$\mathbf{v}(z) = v_x(z)\mathbf{e}_x + v_y(z)\mathbf{e}_y. \tag{16}$$

Здесь $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ – единичные векторы вдоль осей $x$ и $y$, $v_x$ и $v_y$ – проекции скорости ветра на эти оси.

Общее решение уравнения эйконала (12) можно представить в следующем виде:

$$\psi(x, y, z) = \psi_0(\eta, \xi) + a(\eta, \xi)(x - \eta) + \\ + b(\eta, \xi)(y - \xi) + \int_0^z dz_1 \sqrt{\tilde{n}^2 - a^2 - b^2}, \tag{17}$$

где $\tilde{n} = n(1 - \gamma_x a - \gamma_y b)$, координаты $(\eta, \xi)$ на плоскости $z = 0$ определяют точки выхода лучей. Дифференцирование (17) по $x$ и $y$ дает закон Снелиуса для стратифицированной среды

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = a(\eta, \xi), \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = b(\eta, \xi), \tag{18}$$

согласно которому проекции градиента фазы $\psi$ на горизонтальную плоскость $(x, y)$ остаются неизменными при движении по траектории луча и определяются только граничными условиями. Из (12) с учетом (18) нетрудно получить выражение для вертикальной составляющей градиента фазы $\dfrac{\partial\psi}{\partial z} = \sqrt{\tilde{n}^2 - a^2 - b^2}$.

Дифференцирование (17) по параметрам луча $a$ и $b$, дает выражение для координат луча в движущейся среде

$$x = \eta + \int_0^z dz_1 \frac{a + n\tilde{n}\gamma_x}{\sqrt{\tilde{n}^2 - a^2 - b^2}}, \tag{19.1}$$

$$y = \xi + \int_0^z dz_1 \frac{b + n\tilde{n}\gamma_y}{\sqrt{\tilde{n}^2 - a^2 - b^2}}. \tag{19.2}$$

Для решения уравнения переноса (14) необходимо перейти к лучевым координатам. Двумя из них являются введенные ранее величины $\eta$, $\xi$. Третья координата, отсчитываемая вдоль траектории луча, определяется формулой

$$s = \int_0^z dz_1 [\tilde{n}^2(z_1) - a^2 - b^2]^{-1/2}. \tag{20}$$

Теперь групповую скорость (15) можно представить как производную от радиус-вектора $\mathbf{r}$ по параметру $s$ (20):

$$\mathbf{u}_{\text{гр}} = \frac{c}{\tilde{n}}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}. \tag{21}$$

С учетом (21) оператор дифференцирования вдоль вектора групповой скорости сводится к производной по переменной $s$:

$$\mathbf{u}_{\text{гр}}\nabla = \frac{c}{\tilde{n}}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\frac{\partial}{\partial\bar{r}} = \frac{c}{\tilde{n}}\frac{\partial}{\partial s}. \tag{22}$$

Далее, входящую в (14) дивергенцию групповой скорости можно записать, пользуясь формулами тензорного анализа [9], следующим образом:

$$\nabla\mathbf{u}_{\text{гр}} = \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial s}(Dc/\tilde{n}), \tag{23}$$

где $D$ является якобианом преобразования декартовых координат к криволинейным:

$$D = \frac{\partial(z, x, y)}{\partial(s, \eta, \xi)}. \tag{24}$$

С учетом полученных выражений (21)–(24) уравнение переноса (14) преобразуется к достаточно простому виду

$$\frac{\partial p}{\partial s} + p\frac{\partial}{\partial s}\ln\sqrt{\frac{nD}{\rho(2\tilde{n} - n)}} - \frac{\varepsilon\tilde{n}^2}{nc^3\rho}p\frac{\partial p}{\partial\tau} = 0. \tag{25}$$

Для интегрирования полученного уравнения (25) необходимо знать якобиан $D$. Вычисление якобиана представляет достаточно громоздкую процедуру. Опуская выкладки, приведем конечную аналитическую формулу

$$D = M\sqrt{\tilde{n}^2 - a^2 - b^2},$$

$$M = \left(1 + \frac{\partial f}{\partial\eta}\right)\left(1 + \frac{\partial g}{\partial\xi}\right) - \frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\eta}, \tag{26}$$

$$f = \int_0^z dz_1 \frac{a + n\tilde{n}\gamma_x}{\sqrt{\tilde{n}^2 - a^2 - b^2}}; \quad g = \int_0^z dz_1 \frac{b + n\tilde{n}\gamma_y}{\sqrt{\tilde{n}^2 - a^2 - b^2}}.$$

Так как свойства среды зависят от одной вертикальной координаты $z$, то уравнение переноса можно записать с учетом (20) также в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + p\frac{\partial}{\partial z}\ln\sqrt{\frac{nD}{\rho(2\tilde{n}-n)}} - \\ -\frac{\varepsilon\tilde{n}^2}{n\rho c^3\sqrt{\tilde{n}^2-a^2-b^2}}p\frac{\partial p}{\partial\tau} = 0. \quad (27)$$

Таким образом, исходное уравнение переноса (14) для давления в звуковой волне удалось максимально упростить, оставив в нем производные первого порядка только по одной пространственной переменной $s$ или $z$. При этом в любом из двух вариантов (25) или (27) уравнение переноса описывает изменение давления при движении вдоль траектории с координатами $\eta$, $\xi$. В такой форме уравнения (25), (27) аналогичны уравнению переноса для неподвижной среды [7]. Однако при наличии стратифицированного ветра якобиан (26) имеет более сложный вид, чем в случае его отсутствия.

Приведем решение уравнения (27), задавая, например, на горизонтальной плоскости $z = 0$ следующие параметры среды и акустической волны: $\rho_0$, $D_0$, $n_0$, $\tilde{n}_0$ и профиль давления в виде функции $p = \phi(\tau, \eta, \xi)$, где $\eta = x|_{z=0}$, $\xi = y|_{z=0}$. С этими граничными условиями находим решение уравнения (27) в неявной форме:

$$p = \alpha\phi[\eta, \xi, \tau + p(\beta/\alpha)], \quad (28)$$

где

$$\alpha = \left[\frac{\rho(2\tilde{n}-n)}{\rho_0(2\tilde{n}_0-n_0)}\frac{n_0D_0}{nD}\right]^{1/2}; \quad \beta = \int_0^z\frac{\varepsilon\alpha\tilde{n}^2dz_1}{n\sqrt{\tilde{n}^2-a^2-b^2}}.$$

Полученное аналитическое решение (28) позволяет проследить за изменением временнóго профиля волны вдоль любого выбранного луча с начальными координатами точки выхода $\eta$, $\xi$.

*3. Распространение ударных волн в неоднородных движущихся средах*

Воспользуемся решением (28) для анализа распространения пилообразных волн и одиночных импульсов $N$-типа [8]. Поведение амплитуд этих возмущений (пиковых значений давления на ударном фронте) описывается формулами

$$A(z, \eta, \xi) = \alpha A_0(\eta, \xi)[1 + 2f_0\beta A_0(\eta, \xi)]^{-1}, \\ A(z, \eta, \xi) = \alpha A_0(\eta, \xi)[1 + T_0^{-1}\beta A_0(\eta, \xi)]^{-1/2}. \quad (29)$$

Здесь $A_0(\eta, \xi)$ – пространственное распределение амплитуды акустического пучка на границе $z = 0$; $f_0$ – частота следования фронтов в пилообразной волне, $T_0$ – начальная длительность фазы сжатия (разряжения) в симметричном биполярном $N$-импульсе.

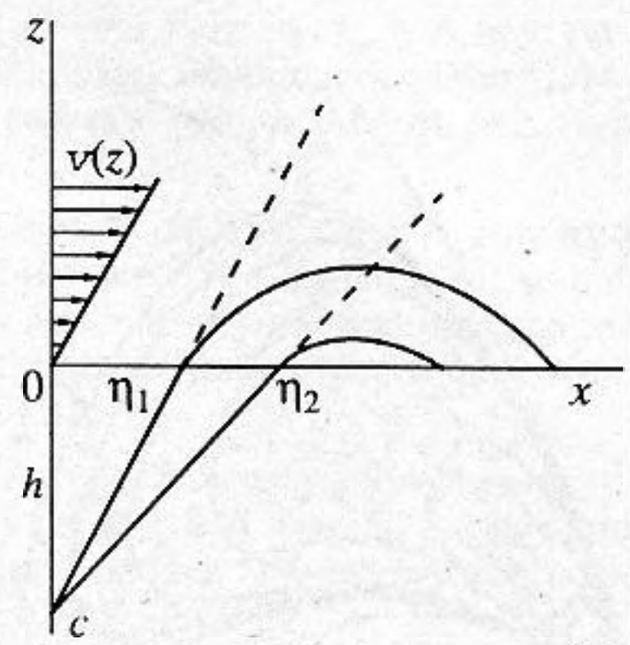


**Рис. 1.** Падение на границу среды расходящейся волны с мнимым фокусом в точке $C$. Ширина пучка ограничена крайними точками $\eta_1$, $\eta_2$. Лучи, выходящие из этих точек, искривляются вследствие горизонтального ветра, скорость которого растет с высотой.

Следует подчеркнуть, что решения (28)–(29) получены для произвольной заданной на границе фазы волны, включая случаи плоского, сферического и цилиндрического волнового фронта. Начальные профили пучка $A_0(\eta, \xi)$ и импульса давления $\phi(\tau, \eta, \xi)$ также могут описываться произвольными функциями.

*4. Анализ одного конкретного случая распространения N-волны*

В качестве примера рассмотрим распространение ударной волны при горизонтальном ветре, величина скорости которого растет пропорционально высоте,

$$v(z) = kc_0(z/z_0); \quad (30)$$

при этом будем считать, что скорость звука и плотность среды не меняются с высотой: $c = c_0$, $\rho = \rho_0$.

Пусть на границе $z = 0$ задана ударная волна, имеющая цилиндрический расходящийся волновой фронт и параболический профиль распределения амплитуды по апертуре (рис. 1):

$$\psi_0(\eta) = \sqrt{\eta^2 + h^2}, \\ A_0 = p_0\sqrt{1 - [(\eta/h) - 2]^2}. \quad (31)$$

Из (31) и рис. 1 видно, что наклонные крайние лучи, ограничивающие пучок, выходят из точек $\eta_1 = h$ и $\eta_2 = 3h$, причем $h$ равно расстоянию от плоскости $z = 0$ до точки мнимого фокуса, $h = OC$.

Лучи, выходящие из апертуры излучателя в точке $x = \eta$, имеют параметры $a = \partial\psi_0(\eta)/\partial\eta = y(1 + y^2)^{-1/2}$ и $b = \sqrt{1 - a^2} = (1 + y^2)^{-1/2}$, где $y = \eta/h$.

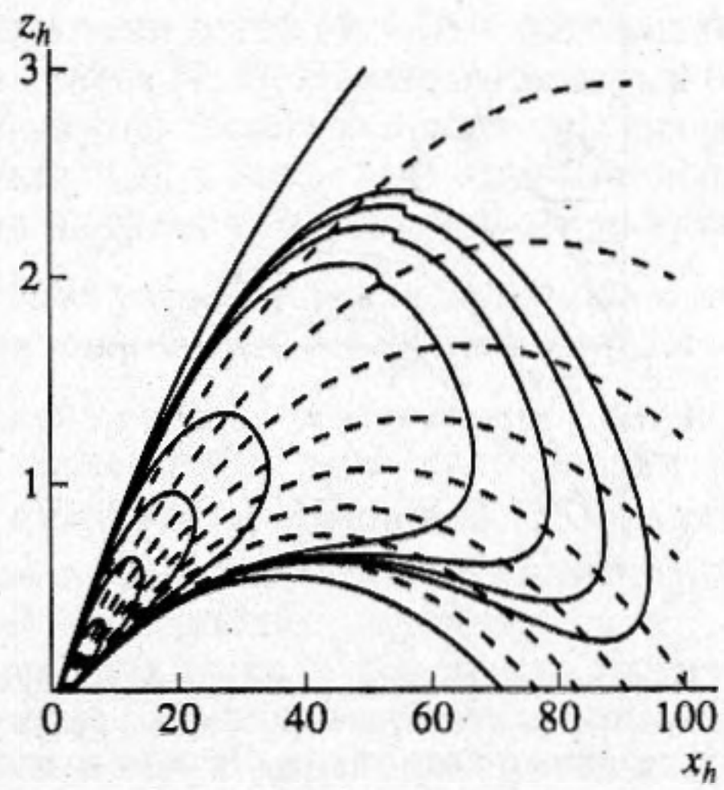


**Рис. 2.** На плоскости $(x, z)$ изображены сплошными линиями уровни равного давления $B(x, z)$ = const и пунктирными линиями лучи внутри расходящегося пучка.

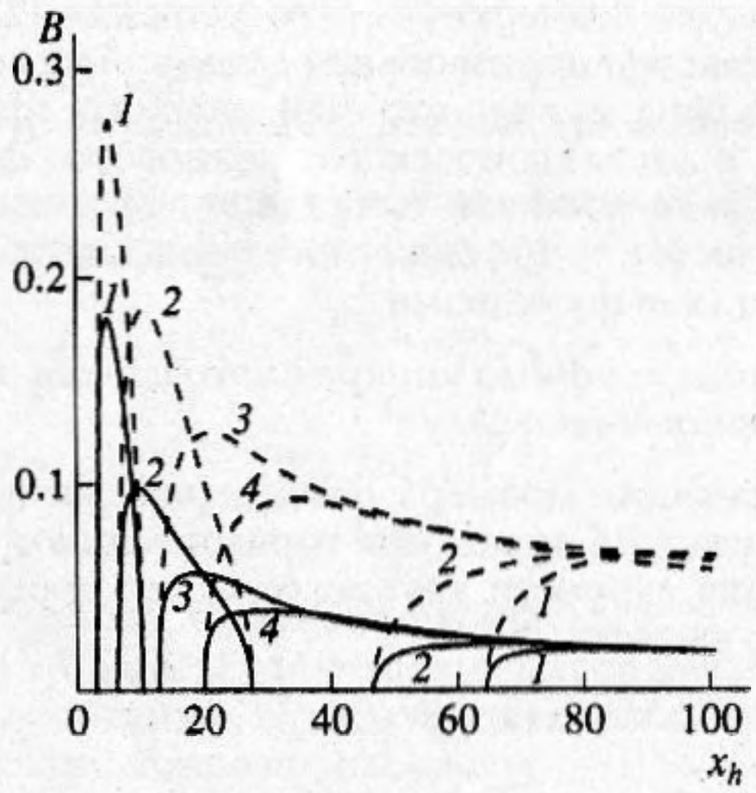


**Рис. 3.** По оси ординат отложено нормированное давление $B(x_h)$ на разных высотах: $z_h$ = 0.2 (1), 0.5 (2), 1 (3), 1.5 (4). Сплошными линиями показаны давления для $N$-импульса, пунктиром – давление в линейной среде, $\varepsilon = 0$.

С учетом этих данных можно вычислить траектории лучей, воспользовавшись выражением (20.1) (лучи лежат в одной плоскости):

$$x_h = y + \frac{z_0}{2kh} \times \left[\frac{b - \varphi - kaz_h\varphi}{a^2} + \ln\left(\frac{1+b}{1 - kaz_h + \varphi}\right)\right]. \quad (32)$$

Здесь $x_h = x/h$, $z_h = z/z_0$; $\varphi = \sqrt{(1 - kaz_h)^2 - a^2}$. Нетрудно показать, что луч достигает максимальной высоты в точке с координатами

$$z_m = (1 - a)/ka;$$
$$x_m = y + (z_0/2kh)\{b/a^2 + \ln[(1+b)/a]\}. \quad (33)$$

В рассматриваемом примере удается вычислить зависимость якобиана от высоты $D(z_h)$ в следующем явном виде:

$$D = \varphi + \left(\frac{z_0}{h}\right)\frac{b^2 z_h(2 - kaz_h)}{\varphi + b(1 - kaz_h)}. \quad (34)$$

Из (34) следует, что на границе $z = 0$ якобиан равен $D(0) = b$, а в верхней точке лучевой траектории – $D(z_m) = z_0 b^3/hka^2$. На луче, выходящем из начала координат, $\eta = y = 0$, функция $D$ возрастает линейно с высотой: $|D(z_h) = 1 + z_0 z_h/h$.

Нормированные уровни давления $N$-импульса определяются формулой

$$B(z_h, x_h) = \alpha\beta B_0(y)\left[1 + \frac{z_0}{x_p} pbB_0(y)\beta\right]^{-1/2}, \quad (35)$$

где $B = A/p_0$, $p_0$ – пиковое давление начального импульса, $\alpha = [bD^{-1}(1 - kaz_h)^2]^{1/2}$, $\beta = \int_0^{z_h} dz_1 \alpha(1 - kaz_1)^2 \varphi^{-1}$, $x_p = c_0^3 \rho_0 T_0/\varepsilon p_0$ – длина разрыва, $T_0$ – длительность импульса.

На рис. 2 показан ход лучей (пунктир) и линии равного давления $B(x, z)$ = const (сплошные линии). Расчет проводился при следующих значениях параметров: $k = 0.1$, $z_0/h = 10$, $z_0/x_p = 1$. Пучок ограничен крайними лучами. Все лучи на рисунке имеют максимум. Под крайним правым лучом образуется зона звуковой тени. Видно, что пучок вследствие движения среды и стратификации ветра искажается.

На рис. 3 изображены значения нормированных давлений $B(x)$ (35) на различных высотах: $z_h$ = = 0.2 (1), 0.5 (2), 1 (3), 1.5 (4). Сплошными линиями показаны давления $N$-импульса, пунктиром – в линейной среде при $z_0/x_p = 0$. Зона тени наблюдается на высотах $z_h = 0.2$ и $z_h = 0.5$. Существует интервал по $x_h$, где давление равно нулю. При поднятии выше вследствие расширения пучка (расходимости лучей) зоны тени нет.

Рассмотренный пример позволяет проследить не только за ходом лучей, которые в данном случае удалось рассчитать аналитически (32, 33) и функцией $D$, также вычисленной аналитически (34), но и определить звуковое давление в нелинейной движущейся среде в произвольной точке (35), а затем построить линии уровня (рис. 2).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выведены уравнения нелинейной высокочастотной акустики для страти-

фицированных движущихся сред. При переходе к лучевым координатам вычислен якобиан, характеризующий изменение амплитуды лучевой амплитуды из-за сужения (расширения)лучевой трубки как вследствие неоднородности среды, так и благодаря начальной фокусировке (расфокусировке) акустического пучка. Получено точное аналитическое решение уравнения переноса, описывающее распространение нелинейных волн при произвольной стратификации свойств среды и произвольных начальных распределениях амплитуды и фазы давления по апертуре источника интенсивного звука. Применение общих выражений проиллюстрировано на конкретном примере распространения ударных волн $N$-типа при линейном росте скорости горизонтального ветра с высотой.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.
2. *Осташев В.Е.* Распространение звука в движущихся средах. М.: Наука, 1992.
3. *Boon M.M. and Vermaos E.A.* A new ray-traving algorithm for arbitary inhomogeneous and moving media, including caustics // Journ. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 90. P. 2109–2117.
4. *Lamancusa J.S. and Daroux P.A.* Ray tracing in a moving medium with two-dimentional sound-speed variation and application to sound propagation over termal discontinuities // Journ. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 93. P. 1716–1726.
5. *Li K.M.* A high-frequency approximation of sound propagation in a stratified moving atmosphere above a porous ground surface // Journ. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 95. P. 1840–1852.
6. *Li K.M.* Theory of high-frequency sound propagation in a spatially inhomogeneous medium // Journ. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99. P. 2006–2012.
7. *Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П.* Уравнения высокочастотной нелинейной акустики неоднородных сред // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 290–294.
8. *Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П.* Двумерные нелинейные волны с разрывами в стратифицированных средах // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 2. С. 291–295.
9. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. М.: Наука, 1971.

# Full Solutions of Geometrical Acoustics Equations in Stratified Moving Media

**O. V. Rudenko, A. K. Sukhorukova, and A. P. Sukhorukov**

Eikonal and transport equations describing acoustic propagation in inhomogeneous nonlinear moving media are successively derived in the high-frequency approximation. For the fist time exact solutions to these equations have been obtained for an arbitrary distributions of the phase (wave front) and amplitude (beam profile and temporal pulse) on the surface of a sound source of arbitrary geomentry. Ray patterns and isobar levels are calculated in a plane-layered medium in the presence of a wind whose speed increases with altitude.