АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 3, с. 402–408

УДК 8.2

ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ КЛИНОВОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОМ КЛИНЕ С УГЛОМ РАСКРЫВА, БЛИЗКИМ К 180°

© 1997 г. А. В. Шанин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119899 Москва, Воробьевы горы

Поступила в редакцию 12.02.96 г.

ВВЕДЕНИЕ

Клиновые симметричные моды, локализованные вблизи ребра тупоугольного (с углом раскрыва, близким к 180°) клина исследованы достаточно полно [1, 2]. Однако, насколько известно автору, не предпринимались попытки решения задач возбуждения клиновой волны силами, приложенными к граням клина, а также рассеяния на дефекте ребра (выемке). Между тем, именно эти задачи интересны для практического использования клиновых волн. Предлагаемая работа решает поставленные задачи.

К задаче о возбуждении клиновой волны силой, приложенной к граням клина, неприменимы традиционные для исследования волн в тупоугольном клине методы геометрической акустики и первого борновского приближения (поле вблизи ребра не имеет выраженной лучевой структуры, а борновский ряд не сходится). Поэтому в предлагаемой работе выбран метод функциональных уравнений, позволяющий построить асимптотику, используя отклонение угла раскрыва клина от 180° как малый параметр.

В первом разделе работы с помощью теоремы взаимности формулируются функциональные уравнения, необходимые для решения задачи. Во втором разделе анализируются асимптотические свойства уравнений и строится решение задачи возбуждения для произвольного фиксированного волнового числа вдоль ребра клина. Полученное разложение оказывается неравномерным вблизи волнового числа, равного волновому числу рэлеевской волны. В третьем разделе строится внутреннее разложение вблизи этой точки, описывающее поведение клиновой моды. В четвертом разделе решается задача о рассеянии клиновой волны на дефекте ребра клина.

1. ВЫВОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем считать, что клин представляет собой упругое тело, имеющее форму, показанную на рис. 1. Отклонение θ угла раскрыва клина от 180° будем предполагать малым и строить по θ асимптотическое разложение решения.

В объеме, занятом клином, выполняются уравнения движения изотропного твердого тела:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0,$$
$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{1}$$

где i, j – индексы 1, 2, 3, соответствующие координатам x, y, z, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ρ – плотность материала, λ, μ – коэффициенты Ламэ, δ_{ij} – символ Кронекера. Как обычно, символ "$,i$" обозначает дифференцирование по соответствующей координате. Зависимость от времени выберем в виде множителя $\exp\{-i\omega t\}$.

На поверхности клина выполняются граничные условия

$$\sigma_{ij}n_j = -T_i, \tag{2}$$

где n_j – компоненты внутренней нормали к поверхности клина, T_i – компоненты внешних сил, приложенных к граням клина.

К уравнениям (1) и (2) необходимо добавить условия, накладываемые на поведение поля на бесконечности, т.е. при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow \infty$. Эти условия в данном случае удобно представить в виде принципа предельного поглощения, т.е. считать, что волновые числа продольной и поперечной волн имеют малую добавку. Кроме того, исходя из того, что клиновая волна в тупоугольном клине является симметричной, разумно рассматривать симметричную задачу, т.е. считать, что внешние силы T_i, а также переменные поля u_i

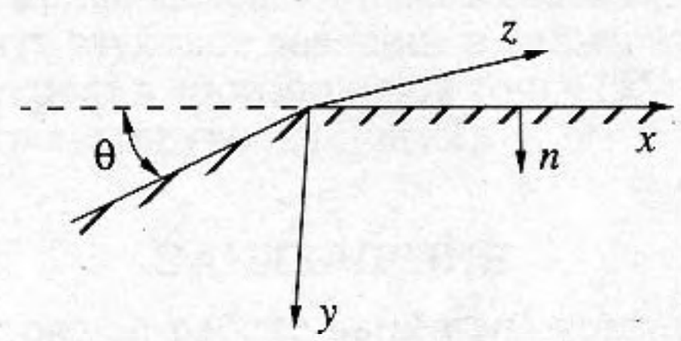

Рис. 1. Геометрия задачи.

симметричны относительно плоскости, задаваемой уравнением

$$x\cos\frac{\theta}{2} - y\sin\frac{\theta}{2} = 0.$$

Будем полагать, что вдоль оси z все величины (u_i, σ_{ij}, T_i) имеют зависимость $\exp\{-i\beta z\}$ и считать задачу плоской.

Применим к поставленной задаче теории упругости II формулу Грина:

$$\int [u_i\sigma'_{ij}n_j - u'_i\sigma_{ij}n_j]d\Gamma = 0, \tag{3}$$

где интегрирование ведется по граням клина.

В качестве вспомогательного поля u'_i выберем плоскую (возможно, неоднородную) волну, удовлетворяющую условию предельного поглощения для тела заданной формы. Интегралом по бесконечному участку границы в формуле (3) можно пренебречь в силу принципа предельного поглощения.

Будем полагать, что u'_i имеет зависимость от z в виде $\exp\{i\beta z\}$. Учитывая, что u'_i имеет экспоненциальную зависимость от x и y, а также тот факт, что $\sigma_{ij}n_j$ определяется соотношениями (2), уравнения (3) связывают значения Фурье-образов функций u_i, определенных на гранях клина, взятые при различных значениях аргумента. Более детально выберем u_i в виде одной из трех объемных мод: продольной и двух поперечных:

$$A_i^1(k) = -\frac{ik_T^2}{\rho\omega^2}\times$$
$$\times\left\{\begin{matrix} k \\ \sqrt{k_L^2 - k^2 - \beta^2} \\ \beta \end{matrix}\right\} e^{i(kx + y\sqrt{k_L^2 - k^2 - \beta^2} + \beta z)}, \tag{4}$$

$$A_i^2(k) = -\frac{ik_T^2}{\rho\omega^2}\times$$
$$\times\left\{\begin{matrix} -\sqrt{k_T^2 - k^2 - \beta^2} \\ k \\ 0 \end{matrix}\right\} e^{i(kx + y\sqrt{k_T^2 - k^2 - \beta^2} + \beta z)}, \tag{5}$$

$$A_i^3(k) = -\frac{ik_T^2}{\rho\omega^2}\times$$
$$\times\left\{\begin{matrix} \beta k \\ \beta\sqrt{k_T^2 - k^2 - \beta^2} \\ \beta^2 - k_T^2 \end{matrix}\right\} e^{i(kx + y\sqrt{k_T^2 - k^2 - \beta^2} + \beta z)}, \tag{6}$$

где

$$k_T^2 = \frac{\omega^2\rho}{\mu}, \quad k_L^2 = \frac{\omega^2\rho}{\lambda + 2\mu}.$$

Ветви квадратного корня выбираются так, чтобы функции удовлетворяли принципу предельного поглощения. Каждая из этих мод удовлетворяет уравнению (1), и поэтому может быть подставлена в качестве u'_i в формулу (3). Подставляя (4)–(6) в (3) и учитывая свойства симметрии u_i и T_i, получаем:

$$L_1(k) + L_1(\bar{k}) = M_1(k) + M_1(\bar{k}), \tag{7}$$

$$L_2(k) - L_2(\tilde{k}) = M_2(k) - M_2(\tilde{k}), \tag{8}$$

$$L_3(k) + L_3(\tilde{k}) = M_3(k) + M_3(\tilde{k}), \tag{9}$$

где

$$L_1(k) = 2k\sqrt{k_L^2 - k^2 - \beta^2}\hat{u}_x(k) + [k_T^2 - 2(k^2 + \beta^2)]\times$$
$$\times\hat{u}_y(k) + 2\beta\sqrt{k_L^2 - k^2 - \beta^2}\hat{u}_z(k) \equiv l_{1i}(k)\hat{u}_i(k), \tag{10}$$

$$L_2(k) = (-k_T^2 + 2k^2 + \beta^2)\hat{u}_x(k) +$$
$$+ 2k\sqrt{k_T^2 - k^2 - \beta^2}\hat{u}_y(k) + \beta k\hat{u}_z(k) \equiv l_{2i}(k)\hat{u}_i(k), \tag{11}$$

$$L_3(k) = 2\beta k\sqrt{k_T^2 - k^2 - \beta^2}\hat{u}_x(k) +$$
$$+ 2\beta(k_T^2 - k^2 - \beta^2)\hat{u}_y(k) + (2\beta^2 - k_T^2)\times \tag{12}$$
$$\times\sqrt{k_T^2 - k^2 - \beta^2}\hat{u}_z(k) \equiv l_{3i}(k)\hat{u}_i(k),$$

$$M_1(k) = \frac{ik_T^2}{\rho\omega^2}\times$$
$$\times[k\hat{T}_x(k) + \sqrt{k_L^2 - k^2 - \beta^2}\hat{T}_y(k) + \beta\hat{T}_z(k)], \tag{13}$$

$$M_2(k) = \frac{ik_T^2}{\rho\omega^2}[-\sqrt{k_T^2 - k^2 - \beta^2}\hat{T}_x(k) + k\hat{T}_y(k)], \tag{14}$$

$$M_3(k) = \frac{ik_T^2}{\rho\omega^2}\times$$
$$\times[\beta k\hat{T}_x(k) + \beta\sqrt{k_T^2 - k^2 - \beta^2}\hat{T}_y(k) + (\beta^2 - k_T^2)\hat{T}_z(k)], \tag{15}$$

$$\bar{k} = -k\cos\theta + \sqrt{k_L^2 - k^2 - \beta^2}\sin\theta,$$
$$\tilde{k} = -k\cos\theta + \sqrt{k_T^2 - k^2 - \beta^2}\sin\theta, \tag{16}$$

$$\hat{u}_i(k) = \int_0^\infty u_i(x)e^{ikx}dx,$$
$$\hat{T}_i(k) = \int_0^\infty T_i(x)e^{ikx}dx. \tag{17}$$

Функции u_i и T_i в последних двух равенствах считаются заданными на грани клина, совпадающей с полуплоскостью $x > 0$, $y = 0$. Зависимость от z при этом не учитывается.

Если бы рассматривалась антисимметричная мода, в уравнениях (7)–(9) знаки "+" изменились бы на "–" и наоборот.

Функциональных уравнений (7)–(9) недостаточно для определения неизвестных функций $\hat{u}_i(k)$. Эти уравнения необходимо дополнить условием аналитичности функций $\hat{u}_i(k)$ в верхней полуплоскости k, включающей положительную действительную полуось (это следует из определения (17) и отсутствия волн, приходящих из бесконечности).

Если определены функции $\hat{u}_i(k)$, появляется возможность найти значения $u_i(x)$ во всех точках границы с помощью обращения преобразований (17). Зная смещения и напряжения на границе твердого тела, можно вычислить поле в объеме традиционными методами (используя формулу (3) и подставляя функцию Грина свободного пространства в качестве $u_i^{'}$). Однако, в данной работе мы ограничимся нахождением функций $\hat{u}_i(k)$.

Отметим, что уравнения (7)–(9) представляют собой некоторое обобщение уравнений, полученных в [3].

2. АНАЛИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Хотя уравнения (7)–(9) имеют достаточно простой вид, в общем случае (при произвольном θ) они не поддаются точному аналитическому решению [4]. Однако, эти уравнения могут быть решены точно при $\theta = 0$ (в этом случае $\tilde{k} = \bar{k} = -k$) и асимптотически при $\theta \longrightarrow 0$.

Легко проверить, что при $\theta = 0$ коэффициенты (10)–(12) удовлетворяют соотношениям

$$l_{i1}(k) = (-1)^i l_{i1}(-k),$$
$$l_{i2}(k) = -(-1)^i l_{i2}(-k), \tag{18}$$
$$l_{i3}(k) = -(-1)^i l_{i3}(-k).$$

С учетом (18), система (7)–(9) может быть решена относительно переменных $(\hat{u}_x(k) - \hat{u}_x(-k))$, $(\hat{u}_y(k) + \hat{u}_y(-k))$, $(\hat{u}_z(k) + \hat{u}_z(-k))$. Легко видеть, что в этом случае задача переходит в хорошо известную [5] задачу о возбуждении поля силами, приложенными к границе упругого полупространства. Описанные выше переменные представляют собой спектры смещений, определенных на всей границе полупространства. Искомые переменные $\hat{u}_i(k)$ представляют собой спектры смещений, определенных на половине границы. Задача определения $\hat{u}_i(k)$ решается преобразованием Гильберта (см. напр. [6]). Так, для k, лежащего в верхней полуплоскости,

$$\hat{u}_i(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\hat{u}_i(k') \pm \hat{u}_i(-k'))}{k' - k}dk', \tag{19}$$

где контур интегрирования проходит выше отрицательной действительной полуоси и ниже положительной полуоси. Знак "+" выбирается для $\hat{u}_y(k)$ и $\hat{u}_z(k)$, знак "–" – для $\hat{u}_x(k)$.

Построим асимптотическое разложение по θ решения системы (7)–(9). Представим решение в виде

$$\hat{u}_i(k) = \hat{u}_i^0(k) + \theta\hat{u}_i^1(k) + \theta^2\hat{u}_i^2(k) + \ldots \tag{20}$$

В качестве решения $\hat{u}_i^0(k)$ выберем решение, задаваемое формулами (19). Для определения $\hat{u}_i^j(k)$ используем уравнения

$$l_{1i}(k)\hat{u}_i^j(k) + l_{1i}(-k)\hat{u}_i^j(-k) = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^j}\times$$
$$\times\left[-\sum_{n=0}^{j-1}\theta^n(l_{1i}(k)\hat{u}_i^n(k) + l_{1i}(\bar{k})\hat{u}_i^n(\bar{k})) + M_1(k) + M_1(\bar{k})\right].$$

$$l_{2i}(k)\hat{u}_i^j(k) - l_{2i}(-k)\hat{u}_i^j(-k) = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^j}\times$$
$$\times\left[-\sum_{n=0}^{j-1}\theta^n(l_{2i}(k)\hat{u}_i^n(k) - l_{2i}(\tilde{k})\hat{u}_i^n(\tilde{k})) + M_2(k) - M_2(\tilde{k})\right], \tag{21}$$
$$l_{3i}(k)\hat{u}_i^j(k) + l_{3i}(-k)\hat{u}_i^j(-k) = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^j}\times$$
$$\times\left[-\sum_{n=0}^{j-1}\theta^n(l_{3i}(k)\hat{u}_i^n(k) + l_{3i}(\tilde{k})\hat{u}_i^n(\tilde{k})) + M_3(k) + M_3(\tilde{k})\right].$$

Таким образом, для каждого члена разложения получаем задачу возбуждения волны в полупространство. Решение для $\hat{u}_i^j(k)$ может быть получено с помощью формул (19).

Такое асимптотическое разложение справедливо при любой фиксированной постоянной распространения β. Однако, вблизи $k = 0$ оно перестает быть равномерным по β при $\beta \longrightarrow k_R$, где k_R – волновое число рэлеевской волны, определяемое уравнением

$$(k_T^2 - 2k_R^2)^2 - 4k_R^2\sqrt{(k_R^2 - k_L^2)(k_R^2 - k_T^2)} = 0. \tag{22}$$

Неравномерность разложения связана с тем, что при $k = k_R$ определитель $\|l_{ij}(k)\|$ обращается в нуль. Физическим следствием неравномерности асимптотического разложения, задаваемого формулами (21), (19) является тот факт, что из рассмотрения выпадает симметричная клиновая мода, представляющая основной интерес.

Значения $k = 0$ и $\beta = k_T$ также обращают в нуль определитель $\|l_{ij}(k)\|$, что вызывает неравномерность асимптотического разложения для антисимметричной задачи. Это соответствует антисимметричной волне утечки и требует отдельного рассмотрения.

3. УЧЕТ КЛИНОВОЙ МОДЫ

Учитывая известные [1, 2] выражения для скорости клиновой моды, будем искать асимптотику при $\beta = \sqrt{k_R^2 + (\alpha\theta)^2}$ для всякого фиксированного α при $\theta \longrightarrow 0$. Такая асимптотика является "внутренней" в смысле теории возмущений.

Разумно предположить, что поле складывается из доминирующего вклада поверхностной волны (дающего особенность в спектре) и поля остальных мод, имеющего гладкий спектр. Для выяснения количественных соотношений можно проанализировать решение задачи о полуплоскости ($\theta = 0$), введя зависимость от θ через параметр β.

Детальный анализ решения уравнений (7)–(9) при $\theta = 0$ показывает, что решение для малых θ имеет вид

$$\hat{u}_i(k) = \frac{C(\alpha,\theta)A_i^R(-i\alpha\theta)}{\theta(k + i\alpha\theta)} + f_i(k,\theta), \tag{23}$$

где $C(\alpha, \theta) = C_0(\alpha) + O(\theta)$. A_i^R – амплитуды смещений в рэлеевской волне:

$$A_i^R(k) = \begin{Bmatrix} k \\ 2ik_R^2\sqrt{k_R^2 - k_L^2}/(2k_R^2 - k_T^2) \\ \sqrt{k_R^2 - k^2} \end{Bmatrix}, \tag{24}$$

$f_i(k)$ – функция, регулярная в точке $k = -i\alpha\theta$ и представимая в виде $f_i(k, \theta) = f_0(k) + O(\theta)$.

Подставляя (24) в (23) и исследуя поведение функций, входящих в (7)–(9) (см. Приложение), получаем выражение, содержащее амплитуду поверхностной волны

$$(a\alpha - b)C_0 = 4k_R(k_T^2 - k_R^2)M_1(0) - \\ - 2(k_T^2 - 2k_R^2)M_3(0) \equiv F, \tag{25}$$

где a и b – параметры, зависящие от k_T и отношения k_R/k_T. Выражение (25) позволяет определить C_0. Вид решения (23) указывает на наличие полюса в плоскости k в точке $k_0 = -i\alpha\theta$. При обращении преобразования Фурье (15) этот полюс дает в решение вклад

$$u_i^R(x) = -\frac{C_0}{\theta}A_i^R(-i\alpha\theta)e^{-i\alpha\theta x}. \tag{26}$$

При $x \longrightarrow \infty$ этот вклад становится доминирующим.

Таким образом, решена задача возбуждения рэлеевской волны при углах скольжения, близких к нулю. Возбуждение клиновой моды соответству-

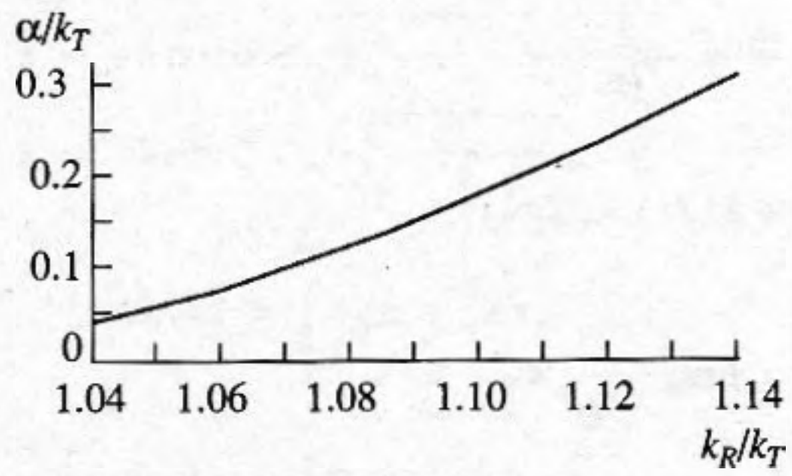

Рис. 2. Значения безразмерной константы α/k_T для различных материалов.

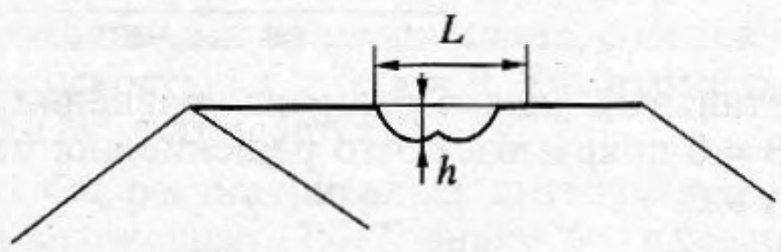

Рис. 3. Клин с выемкой.

ет полюсу амплитуды поверхностной волны при определенном $\beta = \beta_0$.

При $\alpha_0 = b/a$ обращается в бесконечность C_0. α_0 связано с волновым числом клиновой моды β_0 соотношением $\beta_0 = \sqrt{k_R^2 + (\alpha_0\theta)^2}$.

Зависимость безразмерной константы α_0/k_T от отношения k_R/k_T в диапазоне изменения этого отношения в реальных материалах приведена на рис. 2. Полученные дисперсионные соотношения не отличаются от приведенных в [1, 2].

4. РАССЕЯНИЕ КЛИНОВОЙ ВОЛНЫ НА ДЕФЕКТЕ РЕБРА

Воспользовавшись решением задачи возбуждения клиновой и поверхностной волны силой, приложенной к граням клина, можно оценить амплитуду рассеяния клиновой волны на дефекте ребра в первом борновском приближении. Рассмотрим выемку длины L и глубины h на ребре клина (рис. 3). Будем полагать L и h малыми по сравнению с $1/k_R$.

Воспользуемся методом переноса граничных условий на невозмущенную поверхность, т.е. будем считать, что силы, создаваемые падающей волной на поверхности дефекта, компенсируют вынуждающие силы T_i из (2). В качестве падающей волны выберем клиновую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z, причем амплитуды смещений u_i на большом удалении от ребра будем считать равными

$$u_i^I = \begin{Bmatrix} -i\alpha\theta \\ 2ik_R\sqrt{k_R^2 - k_L^2}/(2k_R^2 - k_T^2) \\ -\sqrt{k_R^2 + (\alpha_0\theta)^2} \end{Bmatrix} \times \tag{27}$$

$$\times e^{i(z\sqrt{k_R^2 + (\alpha_0\theta)^2} + i\alpha_0\theta)}.$$

Исходя из вида решения (23), можно заключить, что отклонение поля клиновой моды от (27) есть величины порядка θ, поэтому не будет ошибкой считать выражение (27) справедливым и вблизи ребра, т.е. воспользоваться для вычисления напряжений на поверхности дефекта выражениями для поверхностной волны.

Отклонение поверхностных сил на поверхности дефекта от нуля вызывается двумя причинами. Это отклонения возмущенной поверхности по углу и по глубине. Первая причина приводит к участию в поверхностных силах компонент тензора напряжений, неравных нулю, а вторая – к расфазировке продольной и поперечной компонент рэлеевской волны. Вклады, обусловленные отмеченными причинами, будут иметь различные зависимости от малых параметров.

Все предыдущее рассмотрение проводилось в предположении постоянства β. Это значит, что для учета конечности размеров дефекта необходимо сделать преобразование Фурье по z. Отметим, что из-за малости дефекта на пространственных частотах порядка k_R и ниже спектр вынуждающих сил будет вести себя как константа.

Сделанные выше замечания позволяют определить величины $M_1(0)$ и $M_3(0)$, входящие в (25). Правая часть уравнения (25) приобретает вид

$$F = L(Ah^2/\theta + Bh), \tag{28}$$

где A и B – коэффициенты, зависящие от формы дефекта и упругих констант. Первое слагаемое отвечает за смещение по глубине, второе – за отклонение поверхности по углу. Обратим внимание на то, что ширина дефекта есть величина порядка h/θ. По порядку величин

$$A \sim \mu k_T^5, \quad B \sim \mu k_T^4.$$

Значение $\alpha = \alpha_0$ соответствует полюсу β_0 в комплексной плоскости β – переменной преобразования Фурье по z. Вычисляя производную

$$\left.\frac{d\alpha}{d\beta}\right|_{\beta_0} = \frac{k_R}{\alpha_0\theta^2},$$

находим вклад клиновой волны в спектр рассеянного поля. Для амплитуд рассеяния вперед и назад имеем выражения

$$A^+ = -\frac{F\alpha_0\theta}{ak_R}, \qquad A^- = \frac{F\alpha_0\theta}{ak_R}, \tag{29}$$

где клиновые волны нормированы как (27).

Выражения (28), (29) представляют собой искомые оценки коэффициентов отражения клиновой волны.

В заключение следует отметить, что

а) система функциональных уравнений (7)–(17), дополненная условиями аналитичности, описывает поле в клиновидной области с углом раскрыва, меньшим π. Рассмотренная в настоящей работе задача о тупоугольном клине соответствует одной из асимптотик этой системы. Другой возможной асимптотикой является задача о клине с углом раскрыва, близким к нулю;

б) рассмотренная процедура позволяет (если это необходимо) построить любой член асимптотического разложения по θ, в отличие от традиционно применяемой к этой задаче техники геометрической акустики. Построение следующих членов разложения позволяет, например, определить амплитуды объемных мод, излучаемых при рассеянии на трещине;

в) похожим способом может быть рассмотрена задача об антисимметричной волне утечки в тупоугольном клине;

г) система (7)–(17) может быть модифицирована с тем, чтобы описывать поле в закрытом волноводе, сечение которого является многоугольником.

В заключение автор выражает благодарность В.А. Красильникову за ценное обсуждение материала статьи.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выведем уравнение (25) и получим выражения для констант a и b, входящих в дисперсионное соотношение клиновой волны.

Подставим решение в виде (23), (24) в уравнения (7)–(9). В силу того, что моды A^1 и A^3 являются симметричными, а A^2 – антисимметричной, поведение функций L_1 и L_3 отличается от поведения L_2. Уравнение (8) в нулевом по θ приближении выполняется тождественно. Учитывая (23), будем раскладывать L_i в ряд в окрестности $k_0 = -i\alpha\theta$. Пусть $\xi = k - k_0$. Тогда

$$L_1(k_0+\xi) = C_0\left\{\alpha\left[2\sqrt{k_R^2-k_L^2} - \frac{8k_R^2\sqrt{k_R^2-k_L^2}}{2k_R^2-k_T^2} + \frac{2k_R^2}{\sqrt{k_R^2-k_L^2}}\right] + \frac{i\xi}{\theta}\left[k_R^2 - \frac{4k_R^2\sqrt{k_R^2-k_L^2}}{2k_R^2-k_T^2}\right]\right\} + (k_T^2-2k_R^2)f_2(0) + 2ik_R\sqrt{k_R^2-k_L^2}f_3(0) + O(\theta),$$

$$L_3(k_0+\xi) = C_0\left\{\alpha\left[2k_R\sqrt{k_R^2-k_T^2} - \frac{8k_R^3\sqrt{k_R^2-k_L^2}}{2k_R^2-k_T^2} + \frac{k_R(2k_R^2-k_T^2)}{\sqrt{k_R^2-k_T^2}}\right] + \frac{i\xi}{\theta}\left[\frac{k_R(2k_R^2-k_T^2)}{2\sqrt{k_R^2-k_T^2}} - \frac{4k_R^3\sqrt{k_R^2-k_L^2}}{2k_R^2-k_T^2}\right]\right\} + 2k_R(k_T^2-k_R^2)f_2(0) + i(2k_R^2-k_T^2)\sqrt{k_R^2-k_T^2}f_3(0) + O(\theta).$$

В окрестности $k = 0$ в нулевом приближении уравнения (7) и (9) переходят в

$$L_1(k_0+\xi) + L_1(-(k_0+\xi) + i\theta\sqrt{k_R^2-k_L^2}) = 2M_1(0),$$

$$L_3(k_0+\xi) + L_3(-(k_0+\xi) + i\theta\sqrt{k_R^2-k_T^2}) = 2M_3(0).$$

Подставляя сюда полученные ранее выражения, получаем

$$C_0\left\{2\alpha\left[2\sqrt{k_R^2-k_L^2} - \frac{4k_R^3\sqrt{k_R^2-k_L^2}}{2k_R^2-k_T^2} + \frac{k_R^2}{\sqrt{k_R^2-k_L^2}}\right] - \left[k_R^2 - \frac{4k_R^2(k_R^2-k_L^2)}{2k_R^2-k_T^2}\right]\right\} + 2(k_T^2-2k_R^2)f_2(0) + 4ik_R\sqrt{k_R^2-k_L^2}f_3(0) = 2M_1(0)$$

$$C_0\left\{2\alpha\left[2k_R\sqrt{k_R^2-k_T^2} - \frac{4k_R^3\sqrt{k_R^2-k_L^2}}{2k_R^2-k_T^2} + \frac{k_R(2k_R^2-k_T^2)}{2\sqrt{k_R^2-k_T^2}}\right] - \frac{k_R(2k_R^2-k_T^2)}{2}\right\} + 4k_R(k_T^2-k_R^2)f_2(0) +$$

$$+2i(2k_R^2-k_T^2)\sqrt{k_R^2-k_T^2}f_3(0) = 2M_3(0).$$

Исключая $f_2(0)$ и $f_3(0)$, получаем (25), где

$$a = -8k_R(k_R^2-k_T^2)\sqrt{k_R^2-k_L^2}-4k_R(k_T^2-2k_R^2)\sqrt{k_R^2-k_T^2}-$$

$$-\frac{8k_R^3k_T^2\sqrt{k_R^2-k_L^2}}{2k_R^2-k_T^2}+\frac{4k_R^3(k_T^2-k_R^2)}{\sqrt{k_R^2-k_T^2}}+\frac{k_R(2k_R^2-k_T^2)^2}{\sqrt{k_R^2-k_T^2}},$$

$$b = \frac{k_T^4k_R}{2}+\frac{(2k_R^2-k_T^2)^3}{2k_R}-k_R(2k_R^2-k_T^2)^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991.
2. *Можаев В.Г.* Простые аналитические соотношения, описывающие симметричные КАВ в тупоугольных клиньях. 15 Всесоюзн. конф. по акустоэлектронике и физической акустике твердого тела. Тезисы, ч. 2. Ленинград, ЛИАП, 1991. С. 8–10.
3. *Gautesen A.K.* Scattering of a Rayleigh wave by an elastic wedge, Wave Motion, 1987. V. 9. № 1. P. 51–59.
4. *Осипов А.В.* О методе интегралов Конторовича–Лебедева в задачах дифракции волн в секториальных средах. Проблемы дифракции и распространения волн. Вып. 25. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993. С. 173–218.
5. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические поля и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981.
6. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: И. Л., 1962.

Excitation and Scattering of a Wedge Wave in an Obtuse Elastic Wedge Close to 180°

A. V. Shanin

The radiation of a wedge wave in an obtuse wedge by forces applied to the wedge faces and the scattering at the edge are considered. Functional equations describing the field in the wedge region of the solid are derived and their asymptoitic solution is obtained for the flare angle tending to 180°. The amplitude of the wedge wave is associated with the residue at the pole of the amplitude of the radiated surface wave considered as the function of the wave number.