АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 3, с. 421–424

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.231.1

ШИРОКОУГОЛЬНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ

© 1997 г. Ю. С. Крюков

Научно-исследовательский институт прикладной акустики
141980 Дубна-1, п/я 36

Поступила в редакцию 12.03.96 г.

Большинство используемых в настоящее время методов вычисления акустических полей в океанических и атмосферных волноводах основано на решении уравнения Гельмгольца для звукового давления в неподвижной среде, либо его параболических аппроксимаций. Для движущихся неоднородных сред с произвольным потоком не всегда удается получить даже замкнутое уравнение для давления p. Поэтому для акустики движущихся сред методы вычисления полей менее развиты. Теоретические основы распространения, отражения и преломления акустических волн в движущихся слоистых средах представлены в работе [1]. Вычислительные методы, основанные на выводе параболических уравнений для отдельных частных случаев движущихся сред приведены в работах [2–4], а для более общего случая неоднородных сред в работах [5, 6]. В этих работах, в частности, показано влияние скорости океанических течений на параметры распространения акустических волн на конкретных примерах на основе расчетов в рамках узкоугольного параболического приближения. Однако узкоугольное параболическое приближение имеет известные определенные ограничения, связанные с ошибками вычисления фазы акустической волны. Для неподвижных сред в настоящее время существует несколько подходов получения широкоугольных параболических уравнений (ШПУ) с использованием различных типов аппроксимаций [7–9]. Оценки ошибок вычисления фазы сигнала для используемых типов аппроксимаций и сравнения различных численных методов решения ШПУ приведены в работах [10, 11].

В настоящей работе выводится ШПУ для неоднородных движущихся сред на основе применения метода факторизации и использования квадратичной аппроксимации оператора квадратного корня [12]. Рассмотрим уравнение распространения звука в неоднородной среде с наличием медленных течений, т.е. при условии $|\mathbf{U}| \ll c_0$, где c_0 – минимальное значение скорости звука, а $\mathbf{U}$ – вектор скоростей течения [13]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \operatorname{div}\frac{\nabla p}{\rho}\right) + \frac{2u}{\rho c^2}\nabla\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\nabla\right)\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(z)$ – горизонтальная компонента скорости течения; $\mathbf{U} = (u, 0, 0)$; $p(t)$ – звуковое давление; $\rho = \rho(x, y, z)$ – плотность среды; $c = c(x, y, z)$ – локальная скорость звука. Полагая $p = P\exp(-i\omega t)$, раскрывая ∇ и div, получим уравнение для гармонической составляющей P:

$$\Delta P + k^2 P - \frac{1}{\rho}\nabla P \nabla \rho + 2ik\frac{u\partial P}{c\,\partial x} - \frac{2i}{\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0, \tag{2}$$

где $k = \omega/c(x, y, z)$ – волновое число.

Заметим, что первые три члена уравнения (2) соответствуют уравнению распространения звука в неподвижной среде, а последние два члена содержат компоненту скорости течения и градиент скорости течения. Введем цилиндрическую систему координат (r, ϕ, z), где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\phi = y/x$, z. Полагаем, что среда обладает цилиндрической симметрией, а $u(r, \phi, z)$ – проекция скорости потока на прямую $z = \text{const}$ и $\phi = \text{const}$. Полагаем также, как это было сделано при выводе уравнения (1) в работе [13], что отношение вертикальных пространственных масштабов изменчивости параметров океанической среды c, ρ, u к горизонтальным σ меньше 10^{-2}, а число Маха для океанических течений $M = |u|/c_0 < 10^{-3}$.

Заменой переменных преобразуем уравнение (2) к аналогу уравнения Гельмгольца. Положим

$$P(r, \phi, z) = q(r, \phi, z)\sqrt{\rho(r, \phi, z)}. \tag{3}$$

Подставляя выражение (3) в (2), раскрывая оператор ∇ в цилиндрических координатах, ограничиваясь рассмотрением акустического поля в дальней зоне с учетом малости числа Маха, пренебрегая горизонтальной рефракцией, получим уравнение в плоскости (r, z) при $\phi = \text{const}$:

$$\Delta q + K^2 q + 2ik\frac{u}{c}\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{i}{\rho\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial r}\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{2i}{\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 q}{\partial r \partial z} - \frac{i}{\rho\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

где

$$K^2 = k^2 + \frac{1}{2\rho}\Delta\rho - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\rho\right)^2 + i\left(\frac{ku}{\rho c}\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{1}{\rho\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2\rho^2\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right).$$

K^2 – можно рассматривать как квадрат эффективного комплексного волнового числа. Заметим, что если положить $u = 0$, то уравнение (4) тождественно совпадает с уравнением для неподвижной неоднородной среды, использованном в работе [12] для вывода ШПУ. Для получения преобразованного уравнения используем подстановку следующего вида:

$$q(r, z) = v(r, z)H_0^{(1)}(k_0 r), \quad (5)$$

где $v(r, z)$ – медленно изменяющаяся функция; $H_0^{(1)}(k_0 r)$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода. k_0 – некоторое среднее значение волнового числа. В случае дальнего акустического поля при $k_0 r \gg 1$ воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(k_0 r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\exp\left(ik_0 r - i\frac{\pi}{4}\right).$$

Подставляя (5) в уравнение (4), проведем оценку величины каждого из членов полученного уравнения, содержащих скорость течения u. Учитывая, что $\mathbf{M} = u/c \ll 1$, квадрат коэффициента преломления среды $n^2(r, z) = (k/k_0)^2 < 1$; $|\partial u/\partial z| < k_0 u$. Так как $v(r, z)$ – медленно изменяющаяся функция от r, то $\partial v/\partial x \simeq \epsilon k_0 v$, где $\epsilon \ll 1$. Кроме того, в реальной океанической среде отношение вертикального характерного масштаба неоднородности к горизонтальному σ много меньше единицы, причем $\epsilon \geq \sigma$, потому как изменение амплитуды акустического поля вдоль трассы распространения не может быть медленнее изменений параметров среды. Тогда, сохраняя в (4) члены $\sim\mathbf{M}$ и пренебрегая членами $O(M^2)$, $O(M\epsilon)$, $O(M\sigma)$ и более высокого порядка малости, получим в области асимптотики функции Ханкеля преобразованное уравнение для функции $v(r, z)$:

$$2ik_0\frac{\partial v}{\partial r} + \Delta v + (K^2(r, z) - k_0^2)v + \frac{2k_0}{\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

где

$$K^2(r, z) = k^2 + \frac{1}{2\rho}\Delta\rho - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\rho\right)^2 - 2k_0 k^2\frac{u}{\omega} + \frac{k_0}{\rho\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \nu,$$

$$\nu = i\left(\frac{ku}{\rho c}\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{1}{\rho\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2\rho^2\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right).$$

Заметим, что если в (6) пренебречь членом $\partial^2 v/\partial r^2$, то получим узкоугольное параболическое уравнение, которое по числу сохраненных членов, содержащих скорость потока и ее производные, совпадает с уравнением (11) из работы [13]. Для получения широкоугольного приближения для уравнения (6) сделаем еще одну замену переменных, а именно, положим

$$v(r, z) = \psi(r, z)\left(1 - \frac{k_0}{\omega}u\right). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), группируя однородные члены, поделив обе части уравнения на $(1 - k_0 u/\omega) \approx 1$ и пренебрегая членом $(2k_0^2/\omega^2)u\partial u/\partial z\partial\psi/\partial z/(1 - k_0^2 u/\omega)$, имеющим порядок $O(M^2)$, получим уравнение для ψ:

$$2ik_0\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + K^2(r, z)\psi = 0, \quad (8)$$

где

$$K^2(r, z) = k^2 - k_0^2 + \frac{1}{2\rho}\Delta\rho - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\rho\right)^2 - 2k_0 k^2\frac{u}{\omega} + \frac{k_0}{\rho\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{2k_0^2}{\omega^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \frac{k_0}{\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nu,$$

$$\nu = i\left(\frac{ku}{\rho c}\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{1}{\rho\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2\rho^2\omega}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right).$$

Отметим, что по своей форме уравнение (8) является преобразованным уравнением Гельмгольца эллиптического типа с некоторым эффективным значением квадрата волнового числа $K^2(r, z)$, включающего в себя скорость потока, ее производные и диссипативные члены, порождаемые потоком. Рассмотрим подробнее компоненты, составляющие $K^2(r, z)$. Для описания поглощения в среде квадрат волнового числа представим в об-

щем виде комплексной функцией $k^2(r, z) = k_0^2(n^2(r, z) + i\delta(r, z))$, где δ – коэффициент, характеризующий поглощение акустических волн в среде; $\delta(r, z) \ll n^2(r, z) < 1$. Выделив комплексную и действительную части, перепишем $K^2(r, z)$ в следующем виде:

$$K^2(r, z) = k_0^2(N^2(r, z) + i\delta_1(r, z)), \tag{9}$$

где

$$N^2(r, z) = n^2(r, z) - 1 + \frac{1}{2\rho k_0^2}\Delta\rho - \frac{3}{4k_0^2}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\rho\right)^2 -$$

$$-2n^2(r, z)k_0\frac{u}{\omega} + \frac{1}{\rho\omega k_0}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial z} - \frac{2}{\omega^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{\omega k_0}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\delta_1(r, z) = \delta(r, z) - 2\delta(r, z)k_0\frac{u}{\omega} + \frac{1}{k_0^2}\nu.$$

В выражении (9) $\delta_1(r, z)$ можно рассматривать как обобщенный коэффициент затухания звука в водной среде, причем компоненты, содержащиеся в ν, обусловлены взаимодействием течения с неоднородностями плотности среды, вызывающем турбулентность потока. Для частного случая однородной среды, при $\partial\rho/\partial z = 0$; $\partial\rho/\partial r = 0$; $\partial^2\rho/(\partial r\partial z) = 0$, обобщенный коэффициент затухания равен $\delta_1(r, z) = \delta(r, z)(1 - 2k_0u/\omega)$. Отсюда легко видеть, что если скорость течения совпадает с направлением распространения звуковой волны и $u > 0$, то $\delta_1 < \delta$ и, следовательно, затухание акустической волны на трассе распространения будет меньше, чем в неподвижной среде. Если скорость течения направлена против распространения звуковой волны и $u < 0$, то $\delta_1 > \delta$ и, соответственно, затухание акустической волны на трассе распространения будет больше, чем в неподвижной среде.

Далее, по аналогии с работой [12], используя метод факторизации [14], формально представим уравнение (8) в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0 - ik_0\sqrt{1 + L}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0 + ik_0\sqrt{1 + L}\right)\psi = 0, \tag{10}$$

где

$$L = \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{K^2(r, z)}{k_0^2}.$$

Полагая, что $ik_0\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{1 + L} - ik_0\sqrt{1 + L}\frac{\partial}{\partial r} \equiv 0$, ограничиваясь только однонаправленным распространением, получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} + ik_0\psi - ik_0\sqrt{1 + L}\psi = 0. \tag{11}$$

Аппроксимируем $\sqrt{1 + L}$ в области изменения оператора L: $|L| \le 1$ квадратичным полиномом $aL^2 + bL + d$, где коэффициенты a, b, d, согласно работе [12], имеют следующие численные значения: $a = -0.13630$, $b = 0.51764$, $d = 1.0$, используемые для описания распространения акустических волн в волноводе с углами наклона к горизонту $\theta \le 45°$. Тогда широкоугольное параболическое уравнение с использованием квадратичной аппроксимации для описания распространения акустических волн в неоднородных средах с наличием горизонтального неоднородного по глубине течения будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -k_0(\beta - i\alpha)\psi -$$
$$-\frac{1}{k_0}(a\delta_1(r, z) - i\gamma)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + i\frac{a}{k_0^3}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4}, \tag{12}$$

где

$$\alpha = N^2(r, z)\gamma + \frac{a}{k_0^2}\frac{\partial^2(N^2(r, z))}{\partial z^2} - a\delta_1^2(r, z),$$

$$\gamma = b + aN^2(r, z),$$

$$\beta = \delta_1(r, z) + 2aN^2(r, z) + \frac{a}{k_0^2}\frac{\partial^2\delta_1(r, z)}{\partial z^2}.$$

Уравнение (12) является уравнением параболического типа. Для его численного решения в работе [12] разработан высокоэффективный метод, основанный на использовании явных разностных схем. Исходное значение акустического давления после вычисления $\psi(r, z)$ при $\phi = \text{const}$, $\omega = \text{const}$ будет определяться по формуле

$$P(r, z) = \psi(r, z)\left(1 - \frac{u(z)}{c_0}\right)\sqrt{\frac{2\rho}{\pi k_0 r}}e^{ik_0r - i\pi/4}. \tag{13}$$

При решении начальной задачи для уравнения (12) граничным условием на границе раздела воздух–вода является $\psi = 0$, что следует из условия $P = 0$ и выражения (13). Условия на границе раздела S в движущихся средах сводятся, согласно [1], к требованиям непрерывности акустического давления $[P]_S = 0$ (динамическое условие) и к требованиям непрерывности нормальных компонент полной скорости частиц среды $[(\partial P/\partial z)/(\rho(1 - u/c_0)^2]_S = 0$ (кинематическое условие).

Таким образом, полученное уравнение (12) может быть использовано для вычисления акустических полей в рамках широкоугольного параболического приближения в волноводах с наличием горизонтальных неоднородных по глубине течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989.
2. *Brent R.I., Siegmann W.L., Jacobson M.J.* Effects of uniform horizontal currents in the parabolic approximation method // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82. № 2. P. 545–558.
3. *Robertson J.S., Siegmann W.L., Jacobson M.J.* Acoustical effects of ocean current shear structures in the parabolic approximation // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82. № 2. P. 557–573.
4. *Robertson J.S., Siegmann W.L., Jacobson M.J.* A treatment of three-dimensional underwater acoustic propagation through a steady shear flow // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 86. № 4. P. 1484–1489.
5. *Годин О.Г.* О параболическом приближении в акустике движущихся сред // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 4. С. 646–653.
6. *Годин О.Г., Мохов А.В.* Узкоугольное параболическое приближение для звукового поля в движущейся среде // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 442–449.
7. *Collins M.D.* A split-step Pade solution for parabolic equation method // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. V. 93. № 4. P. 1736–1742.
8. *Yevick D., Thomson D.J.* Split-step/finite-difference and split-step/Lanczos algorithms for solving alternative higher-order parabolic equations // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 96. № 2. P. 396–405.
9. *Brown M.G.* A Maslov–Ghapman wavefield representation for wide angle one-way propagation // Geophys. J. Int. 1994. V. 116. P. 513–526.
10. *Tappert F.D., Brown M.G.* Asymptotic phase errors in parabolic approximations to the one-way Helmholtz equation // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99. № 3. P. 1405–1413.
11. *Collins M.D., Cederberg R.J., King D.B., Ching-Bing S.A.* // Comparison of algorithms for solving parabolic wave equations // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 100. № 1. P. 178–182.
12. *Крюков Ю.С.* Явный конечно-разностный метод вычисления акустического поля в среде с переменной плотностью и затуханием // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 1. С. 93–99.
13. *Годин О.А.* Волновое уравнение для звука в среде с медленными течениями // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 63–67.
14. *Mary D.F., Lee D., Botseas G.A.* A modified wide angle parabolic wave equation // J. Comput. Phys. 1987. V. 71. P. 304–315.