

УДК 534

РЕКОНСТРУКЦИЯ ОБРАЗОВ ИСТОЧНИКОВ ДЫХАТЕЛЬНЫХ ШУМОВ

© 1997 г. В. Т. Гринченко, Л. Г. Красный, В. В. Крижановский

Институт гидромеханики НАН Украины
252057 Киев, ул. Желябова, 8/4

Поступила в редакцию 06.12.96 г.

Предлагается статистический подход к решению проблемы реконструкции образов источников шумов дыхания. На основе этого подхода синтезирован алгоритм реконструкции пространственной корреляционной функции поля источников шумоизлучения. Синтез проведен для модели сигнала, учитывающей мультипликативную нестационарность, связанную с ритмикой дыхания. Показано, что основными процедурами обработки являются спектральный анализ, оценка модулирующей функции и стационаризация спектральных отсчетов, оценка пространственной корреляционной функции поля сигнала и решение соответствующего интегрального уравнения. Исследованы ошибки реконструкции пространственной спектральной плотности мощности для модели распределенного по трахее источника дыхательных шумов. Показано, что величина ошибок определяется характеристиками системы обработки сигналов и параметрами вычислительного алгоритма решения задачи реконструкции.

Анализ дыхательных шумов как метод диагностики респираторного тракта человека довольно широко используется на практике, хотя иногда и приводит к ошибкам. Одной из причин недостаточной эффективности метода является отсутствие полных данных о механизмах генерации дыхательных шумов и свойствах акустического канала распространения звука. Во многих инженерных задачах, связанных с изучением гидродинамического шумообразования возможно прямое измерение параметров потока и механических характеристик среды, в которой распространяется возмущение. К сожалению, при исследовании дыхательных шумов такая возможность отсутствует. Здесь все выводы о параметрах источников и свойствах звукового канала делаются на основе косвенных данных, полученных на поверхности человеческого тела. В современной терминологии диагностика респираторного тракта требует решения специфической обратной акустической задачи – реконструкции образов источников дыхательных шумов. Настоящая работа посвящена решению этой проблемы.

Предположим, что в некоторой области Ω человеческого тела расположены источники $q(t, \mathbf{r})$ дыхательных шумов. В силу физической природы дыхания сигнал, создаваемый этими источниками на поверхности S_0 человеческого тела, является нестационарным случайным полем, интенсивность которого периодически меняется в течении фазы вдоха-выдоха. В качестве статистической модели такого сигнала примем поле

$$s(t, \mathbf{r}) = m(t)s_q(t, \mathbf{r}). \quad (1)$$

Здесь $m(t)$ – медленно меняющаяся модулирующая функция с периодом T_m , равным полному циклу дыхания; $s_q(t, \mathbf{r})$ – стационарное случайное поле определяемое соотношением:

$$s_q(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega, \mathbf{r}) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (2)$$

где

$$S_q(\omega, \mathbf{r}) = \int_{\Omega} G_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (3)$$

$$Q(\omega, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t, \mathbf{r}) \exp(-j\omega t) dt, \quad (4)$$

$$G_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'), & \text{объемные источники,} \\ -\partial G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial n, & \text{поверхностные источники,} \end{cases}$$

$G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – функция Грина задачи:

$$\begin{cases} (\Delta + \omega^2/c^2)G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \Gamma G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}' \in S_0, \end{cases}$$

Γ – оператор граничных условий.

Необходимо, располагая информацией о поле $s(t, \mathbf{r})$ и функции Грина $G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, определить структуру поля $q(t, \mathbf{r})$. Трудности решения такой обратной задачи общеизвестны [1]: неоднозначность и неустойчивость решения, неопределен-

ность в выборе параметра регуляризации и т.д. На практике ситуация осложняется тем, что наблюдаемое на апертуре приемной антенны поле $u(t, \mathbf{r})$ помимо сигнала $s(t, \mathbf{r})$, содержит помеху $N(t, \mathbf{r})$, обусловленную как собственными шумами приемной антенны, так и внешними шумами, т.е.

$$u(t, \mathbf{r}) = s(t, \mathbf{r}) + N(t, \mathbf{r}). \quad (5)$$

Кроме того, поле $q(t, \mathbf{r})$ является случайным, поэтому речь может идти не столько о восстановлении его реализаций, сколько об оценке его вероятностных характеристик $\theta(\mathbf{r})$. Таким образом, естественным становится отказ от детерминистского подхода к задаче восстановления изображений источников и замена его статистическим подходом. Суть последнего заключается в следующем.

Предположим, что вероятностные меры наблюдаемых полей сигнала и помехи (5) абсолютно непрерывны. Тогда можно ввести отношение правдоподобия:

$$\Lambda(u) = \frac{\mu_s(du)}{\mu_0(du)}, \quad (6)$$

где $\mu_s(du)$ и $\mu_0(du)$ – вероятностные меры поля $u(t, \mathbf{r})$, вычисленные, соответственно, при условии наличия или отсутствия сигнала $s(t, \mathbf{r})$.

Очевидно, что в силу соотношений (1), (2) отношение правдоподобия (6) зависит от вероятностных характеристик $\theta(\mathbf{r})$ поля $q(t, \mathbf{r})$, поэтому в качестве их оценок можно принять, так называемые [2], оценки максимального правдоподобия (ОМП) – статистические оценки $\hat{\theta}(\mathbf{r})$, которые находятся из решения уравнения:

$$\{\delta\Lambda(u)/\delta\theta(\mathbf{r})\}_{\theta=\hat{\theta}} = 0, \quad (7)$$

где δ – символ вариационной производной.

В известных работах [3–6] предполагалось, что функция источника или ее моменты известны, и рассматривалась статистическая задача оценки координат положения функции источника.

В данной работе рассматривается более общая задача восстановления корреляционной функции источников дыхательных шумов. Перейдем к более детальному исследованию этой задачи.

Вычислим отношение правдоподобия для сигнала (1). Предположим, что $q(t, \mathbf{r})$ – стационарное случайное гауссовское поле. Тогда, в силу линейности преобразований (1), (2), сигнал $s(t, \mathbf{r})$ также будет иметь гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и пространственно-временной корреляционной функцией:

$$R_S(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') = m(t)m(t')\langle s_q(t, \mathbf{r})s_q(t', \mathbf{r}') \rangle,$$

где $\langle \rangle$ – символ статистического усреднения.

Разобьем весь интервал наблюдения на L_0 непесекающихся временных интервалов $[(l-1)T, lT]$,

($l = 1, \dots, L_0$). Будем полагать, что длительность T одного частичного интервала удовлетворяет системе неравенств:

$$\begin{cases} T \gg \tau_k, \\ T \ll T_m, \end{cases} \quad (8)$$

где τ_k – интервал корреляции сигнала.

Тогда, в силу второго из неравенств (8), можно считать, что на частичных временных интервалах модулирующая функция $m(t)$ практически не меняется. Следовательно, при $t, t' \in [(l-1)T, lT]$ $R_S(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') = D_l \langle s_q(t, \mathbf{r})s_q(t', \mathbf{r}') \rangle$, где $D_l = m^2(lT)$.

Введем спектр поля $u(t, \mathbf{r})$, вычисленный на l -м временном интервале:

$$U_l(\omega, \mathbf{r}) = \int_{(l-1)T}^{lT} u(t, \mathbf{r}) \exp(-j\omega t) dt.$$

Предположим, что помеха $N(t, \mathbf{r})$ имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_N(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Тогда спектральные отсчеты $U_l(\omega, \mathbf{r})$ распределены по нормальному закону как при наличии, так и в отсутствие сигнала на апертуре приемной антенны. Кроме того, в силу первого из неравенств (8) $U_l(\omega, \mathbf{r})$ и $U_p(\omega', \mathbf{r}')$ некоррелированы на несовпадающих частотах и разных частичных временных интервалах. В этой ситуации логарифм отношения правдоподобия описывается известным [7] выражением:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(u) = & \sum_{l=1}^{L_0} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \{ [K_N^{-1}(\omega; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) - \\ & - K_l^{-1}(\omega; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)] U_l(\omega; \mathbf{r}_i) U_l^*(\omega; \mathbf{r}_k) - \\ & - \ln [K_l(\omega; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) K_N^{-1}(\omega; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)] \} d\omega. \end{aligned} \quad (9)$$

В выражении (9) $K_N^{-1}(\omega, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ и $K_l^{-1}(\omega, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ – соответственно, элементы матриц \mathbf{K}_N^{-1} и \mathbf{K}_l^{-1} , обратных матрицам \mathbf{K}_N и \mathbf{K}_l с элементами

$$K_N(\omega, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} R_N(\tau, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

и

$$K_l(\omega; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = K_N(\omega; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) +$$

$$+ D_l \int \int_{\Omega} G_q(\omega; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}) K_q(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') G_q^*(\omega; \mathbf{r}_k, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (10)$$

где

$$K_q(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle Q(\omega, \mathbf{r})Q^*(\omega, \mathbf{r}') \rangle$$

– функция пространственной корреляции поля источников дыхательных шумов.

Из выражений (9), (10) следует, что отношение правдоподобия функционально связано с корреляционной функцией $K_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ поля источника, что дает возможность найти статистическую оценку $\hat{K}_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ этой функции.

Как уже указывалось выше, для решения этой задачи необходимо проварьировать (9) по $K_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и из уравнения (7) найти статистическую оценку $\hat{K}_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ этой функции.

Чтобы упростить дальнейшие выкладки перепишем (9) в матричной форме:

$$\ln \Lambda(u) = \sum_{l=1}^{L_0} \text{Sp} \times \quad (11)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} [(\mathbf{K}_N^{-1} - \mathbf{K}_l^{-1})\mathbf{U}_l\mathbf{U}_l^* - \ln(\mathbf{K}_l\mathbf{K}_N^{-1})]d\omega,$$

где Sp – символ следа матрицы. Аналогично запишем в операторной форме выражение (10):

$$\mathbf{K}_l = \mathbf{K}_N + \mathbf{D}_l\mathbf{G}_q\mathbf{K}_q\mathbf{G}_q^*, \quad (12)$$

где \mathbf{K}_q – интегральный оператор с ядром $K_q(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Подставив (12) в (11), проварьировав $\ln \Lambda(u)$ по \mathbf{K}_q и приравняв результат нулю, после ряда преобразований приходим к следующему матричному уравнению для ОМП оператора \mathbf{K}_q .

$$\sum_{l=1}^{L_0} \text{Sp} \{ \mathbf{B}_l^{-1} \mathbf{D}_l \Psi [\mathbf{I} - \mathbf{B}_l^{-1} \Psi^{-1} \mathbf{L}^* \mathbf{U}_l \mathbf{U}_l^* \mathbf{L}] \} = 0, \quad (13)$$

где $\mathbf{B}_l = \mathbf{I} + \mathbf{D}_l \hat{\mathbf{K}}_q \Psi$, $\Psi = \mathbf{L}^* \mathbf{G}_q$, $\mathbf{L} = \mathbf{K}_N^{-1} \mathbf{G}_q$, \mathbf{I} – единичный оператор и $\hat{\mathbf{K}}_q$ – интегральный оператор с ядром $\hat{K}_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Решить уравнение (13) в явном виде не удастся. Однако его можно упростить, если учесть, что задача восстановления решается, как правило, при больших отношениях сигнал/помеха. В силу этого обстоятельства приближенно можно записать

$$\mathbf{B}_l \approx \mathbf{D}_l \hat{\mathbf{K}}_q \Psi.$$

Подстановка этого выражения в (13) дает:

$$\text{Sp} \{ \Psi^{-1} \hat{\mathbf{K}}_q^{-1} \hat{\mathbf{K}}_q^{-1} \Psi^{-1} [\mathbf{L}^* \hat{\mathbf{K}}_S \mathbf{L} - \Psi \hat{\mathbf{K}}_q \Psi] \} = 0, \quad (14)$$

где

$$\hat{\mathbf{K}}_S = \frac{1}{L_0} \sum_{l=1}^{L_0} \mathbf{D}_l^{-1} (\mathbf{U}_l \mathbf{U}_l^* - \mathbf{K}_N) \quad (15)$$

– оценка корреляционной функции поля сигнала на апертуре антенны. Очевидно, уравнение (14) справедливо при

$$\mathbf{L}^* \hat{\mathbf{K}}_S \mathbf{L} = \Psi \hat{\mathbf{K}}_q \Psi. \quad (16)$$

Согласно (16), вся информация, необходимая для восстановления функции $K_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ содержится в оценке $\hat{K}_S(\omega, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ корреляционной функции поля сигнала на апертуре приемной антенны. Как видно из (15), эта оценка включает процедуру стационаризации сигнала за счет нормировки спектральных отсчетов $U_l(\omega, \mathbf{r}_i)$ на коэффициенты D_l . Для определения этих коэффициентов может быть использован алгоритм:

$$\hat{D}_l = \frac{\int_0^{iT} u^2(t, \mathbf{r}_i) dt}{\int_0^T u^2(t, \mathbf{r}_i) dt}. \quad (17)$$

Замена коэффициентов D_l в алгоритме (15) их оценками (17) практически не приводит к ухудшению качества восстановления функции $K_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, поскольку математическое ожидание оценки (17) равно $\langle \hat{D}_l \rangle = D_l/D_1$, т.е. отличается от D_l только постоянным множителем D_1 .

Предположим теперь, что поле $q(t, \mathbf{r})$ некоррелировано по пространству, т.е.

$$K_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = P_q(\omega, \mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где $P_q(\omega, \mathbf{r})$ – спектральная плотность мощности (СПМ) источника, которая описывает пространственное распределение интенсивности турбулентных пульсаций вдоль трахеи, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ – δ -функция.

В этом случае неизвестной является функция $P_q(\omega, \mathbf{r})$. Оценка этой функции находится из уравнения (16), в котором следует положить $\hat{K}_q(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{P}_q(\omega, \mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$. В результате вместо (16) получаем уравнение:

$$\int_{\Omega} |\Psi(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 \hat{P}_q(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \quad (18)$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L^*(\omega; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}) L(\omega; \mathbf{r}_k, \mathbf{r}) \hat{K}_S(\omega, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k).$$

В соответствии с алгоритмом (18) основными процедурами реконструкции функции $\hat{P}_q(\omega, \mathbf{r})$

являются: преобразование Фурье поля $u(t, \mathbf{r}_i)$ на каждом из L_0 интервалов времени; оценка модулирующей функции $m(t)$ (вычисление коэффициентов D_i) и стационаризация спектральных отсчетов $U_i(\omega, \mathbf{r}_i)$, оценка пространственной корреляционной функции (15) поля сигнала на апертуре приемной антенны; вычисление функций $L(\omega; \mathbf{r}_k, \mathbf{r})$ и $|\Psi(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2$; решение интегрального уравнения (18).

Для более детального исследования алгоритма (18) реконструкции СПМ источника дыхательных шумов воспользуемся акустической моделью респираторного тракта, предложенной в работе [8]. В [8] предполагалось, что паренхима легких расположена между двумя соосными цилиндрами длиной $l_1 = 0.25$ м и радиусами $r_0 = 0.008$ м и $r_1 = 0.15$ м (см. рис. 1). Плотность тканей паренхимы $\rho_2 = 250$ кг/м³ и скорость распространения в ней звука $c_2 = 23$ м/с. Трахея моделировалась заполненным воздухом внутренним цилиндром.

Источники шумов дыхания располагались на поверхности трахеи длиной $l_0 = 0.1$ м. Область средостения моделировалась частью внутреннего цилиндра длиной $l_1 - l_0 = 0.15$ м. Она имела плотность $\rho_1 = 1000$ кг/м³ и скорость распространения звука $c_1 = 1500$ м/с. На основе принятой акустической модели в [8] получено следующее выражение для функции Грина $G_q(\omega, z, z')$, описывающей характеристики канала распространения звука:

$$G_q(\omega, z, z') = \frac{2}{l_1} \sum_{p=1}^M B_p(\omega, z) \sin(\alpha_{2p} z'), \quad (19)$$

где $B_p(\omega, z)$ амплитуды, а $\alpha_{2p} = \pi(2p - 1)/2l_1$ – собственные числа возбуждаемых мод сигнала [8], M – общее количество распространяющихся мод. Подставив функцию (19) в уравнение (18), мы можем решить задачу реконструкции функции $P_q(\omega, z)$.

Для проведения численного моделирования задачи реконструкции трансформируем интегральное уравнение (18) в систему алгебраических уравнений. С этой целью представим функцию $P_q(\omega, z)$ в виде разложения по базису ортонормированных функций $\{\phi_k(z)\}$:

$$P_q^{(K)}(\omega, z) = \sum_{k=1}^K p_k(\omega) \phi_k(z), \quad (20)$$

где $(\phi_k, \phi_m) = \delta_{km}$; δ_{km} – символ Кронекера, $p_k(\omega) = (P_q, \phi_k)$, (...) – символ скалярного произведения функций в пространстве $L_2[0, l_0]$, K – количество используемых членов разложения (20). Принимая во внимание, что последующий анализ задачи реконструкции будет выполнен для фиксированных частот шумоизлучения, с целью упрощения запи-

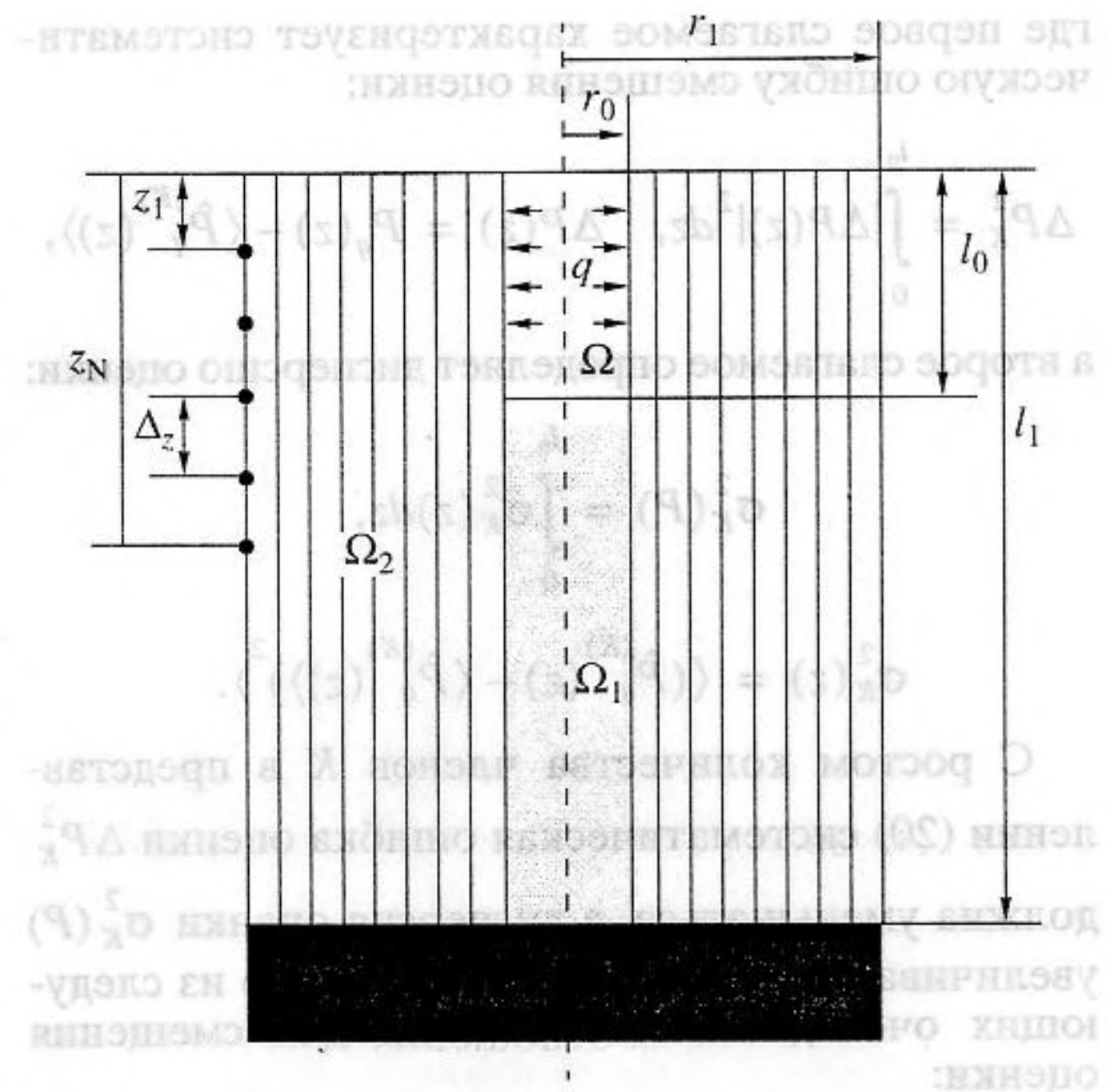


Рис. 1. Акустическая модель респираторного тракта и схема расположения N -элементной линейной эквидистантной дискретной приемной антенны.

сей в дальнейшем будем опускать в формулах переменную частоты ω . Тогда (18) примет вид:

$$\sum_{k=1}^K \hat{p}_k F_{kn} = c_n, \quad n = 1, \dots, K, \quad (21)$$

где

$$F_{kn} = \int_0^{l_0} |\Psi(z_n, z)|^2 \phi_k(z) dz,$$

$$c_n = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N L^*(z_i, z_n) L(z_m, z_n) \hat{K}_S(z_i, z_m).$$

Таким образом, задача сводится к определению коэффициентов p_k из системы уравнений (21) и вычислению оценки $\hat{P}_q^{(K)}(\omega, z)$ функции $P_q(\omega, z)$ согласно (20). В связи с конечностью числа членов в представлении (20), а также из-за присутствия помех восстановленная функция $\hat{P}_q^{(K)}(\omega, z)$ будет отличаться от истинной. Поэтому введем количественную меру точности реконструкции функции $P_q(\omega, z)$:

$$\Delta_K^2 = \left\langle \int_0^{l_0} |P_q(z) - \hat{P}_q^{(K)}|^2 dz \right\rangle = \Delta P_K^2 + \sigma_K^2(P), \quad (22)$$

где первое слагаемое характеризует систематическую ошибку смещения оценки:

$$\Delta P_K^2 = \int_0^{l_0} |\Delta P(z)|^2 dz, \quad \Delta P(z) = P_q(z) - \langle \hat{P}_q^{(K)}(z) \rangle,$$

а второе слагаемое определяет дисперсию оценки:

$$\sigma_K^2(P) = \int_0^{l_0} \sigma_K^2(z) dz,$$

$$\sigma_K^2(z) = \langle (\hat{P}_q^{(K)}(z) - \langle \hat{P}_q^{(K)}(z) \rangle)^2 \rangle.$$

С ростом количества членов K в представлении (20) систематическая ошибка оценки ΔP_K^2 должна уменьшаться, а дисперсия оценки $\sigma_K^2(P)$ увеличиваться. В частности, это видно из следующих очевидных соотношений для смещения оценки:

$$\Delta P_K^2 = \int_0^{l_0} |P_q(z)|^2 dz - \sum_{n=1}^K \hat{p}_n^2 = \sum_{n=K+1}^{\infty} p_n^2,$$

и ее дисперсии:

$$\sigma_K^2(P) = \sum_{n=1}^K \langle (\hat{p}_n - \langle \hat{p}_n \rangle)^2 \rangle = \sum_{n=1}^K \sigma_n^2,$$

которые справедливы при выполняющихся на практике условиях $\langle \hat{p}_n \rangle = p_n, n = 1, \dots, K$.

Как видим, минимизация полной ошибки реконструкции СПМ источника $P_q(z)$ требует оптимизации параметра K . Кроме того, на величину полной ошибки существенное влияние оказывают характеристики системы пространственно-временной обработки шумов дыхания. К ним прежде всего надо отнести рабочие частоты и параметры приемной антенны, размещаемой на поверхности грудной клетки пациента.

Полный учет указанных факторов требует конкретизации выражения для дисперсии оценки функции источника. Согласно теории оптимальных оценок [7], нижняя граница Крамера-Рао для дисперсии эффективной несмещенной оценки максимального правдоподобия определяется соотношением:

$$\sigma_K^2(P) = \text{Sp}(\mathbf{J}^{-1}),$$

где \mathbf{J}^{-1} – дисперсионная матрица, обратная информационной матрице Фишера \mathbf{J} с элементами:

$$J_{kj} = \left\langle \frac{\partial^2 \ln \Lambda(u)}{\partial p_k \partial p_j} \right\rangle,$$

Для принятого представления (20) элементы информационной матрицы Фишера имеют вид:

$$J_{kj} = g_{S/N}^2 \sum_{l=1}^{L_0} \text{Sp}[\hat{\mathbf{K}}_{\Sigma l}^{-1} \mathbf{D}_l \Phi_k \hat{\mathbf{K}}_{\Sigma l}^{-1} \mathbf{D}_l \Phi_j]$$

где Φ_k – матрица с элементами:

$$\Phi_{mn}^{(k)} = \int_0^{l_0} G_q(z_m, z) G_q^+(z_n, z) \phi_k(z) dz,$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Sigma l} = \frac{1}{g_N} \mathbf{K}_N + g_{S/N} \mathbf{D}_l \mathbf{G}_q \hat{\mathbf{P}}_q \mathbf{G}_q^+,$$

$g_{S/N} = g_{s0}/g_N$ – отношение уровней спектральных плотностей мощности сигнала и помехи.

Выполним количественный анализ зависимости ошибок реконструкции функции источника $P_q(z)$ от указанных факторов. Для этого детализируем параметры численных экспериментов. Предположим, что помеха некоррелирована по пространству, т.е. $\mathbf{K}_N = g_N \mathbf{I}$, а количество наблюдаемых реализаций поля $u(t, \mathbf{r})$ достаточно велико, чтобы оценку $\hat{K}_S(\omega; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ заменить ее математическим ожиданием. В проведенных ниже расчетах принято $L_0 = 50$. Нормированную СПМ источника определим в форме прямоугольного импульса:

$$P_q(z) = \text{rect} \left[\frac{z - z_0}{0.9l_0} \right], \quad (23)$$

где $\text{rect}(x)$ – каузальная функция [9], $z_0 = -0.5l_0$.

Эквидистантную антенну из N приемников колебательной скорости будем располагать вдоль образующей внешнего цилиндра (см. рис. 1). Размер антенны примем равным $D = 0.9l_0$.

Учитывая вид функции $P_q(z)$ (23), в качестве базисных функций будем использовать систему прямоугольных импульсов

$$\phi_k(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta z}} \text{rect} \left[\frac{z + k\Delta z - \frac{\Delta z}{2}}{\Delta z} \right], \quad k = 1, \dots, K,$$

которые не перекрываются друг с другом и плотно расположены на интервале $[0; -l_0]$. При этом $\Delta z = l_0/(K-1)$. Остальные параметры будем уточнять при проведении конкретных расчетов.

Рассмотрим сначала зависимость ошибок оценивания функции $P_q(z)$ от выбора рабочей частоты измерений. Попутно выясним, как влияет на величину этих ошибок число возбуждаемых источником мод. При проведении численного эксперимента было принято, что антенна содержит $N = 6$ приемников, а в разложении (20) использу-

ется $K = 11$ членов. Расчеты выполнены для трех значений отношения сигнал/помеха $g_{S/N} = 1; 10; 100$. Результаты представлены на рис. 2. Как видно, с увеличением рабочей частоты полная ошибка уменьшается. Причем на частотах выше 500 Гц этот процесс приобретает монотонный характер, и скорость его возрастает при увеличении отношения сигнал/помеха $g_{S/N}$. На более низких частотах наблюдается рост как систематической ошибки, так и дисперсии оценки. Как показывает анализ, это связано с тем, что матрица системы уравнений (21) и матрица Фишера \mathbf{J} становятся вырожденными или плохо обусловленными. Действительно, можно показать, что ранг матрицы Фишера определяется следующим неравенством $\text{rank}(\mathbf{J}) \leq \min\{M^2, N^2, K\}$. Аналогичному условию удовлетворяет ранг матрицы системы уравнений (21). Так как обе указанные матрицы имеют порядок K , то для их вырожденности достаточно, чтобы $K > \min\{M^2, N^2\}$. На рис. 3 показана зависимость числа распространяющихся мод M от частоты f . Из графика видно, что для заданных условий численного эксперимента, приведенное условие вырожденности выполняется на частотах ниже 200 Гц. При повышении частоты количество мод увеличивается и ранг матриц возрастает. Однако амплитуда возбуждения появляющихся мод более высоких номеров мала. Поэтому их вклад хотя и увеличивает порядок информационной матрицы Фишера, но сама матрица Фишера при этом становится плохо обусловленной, что и приводит к существенным колебаниям полученных дисперсий оценок в области до 500 Гц. Таким образом, надежные результаты для рассматриваемой задачи реконструкции могут быть получены на частотах выше 500 Гц.

Рассмотрим теперь возможность снижения величины ошибок за счет рационального выбора параметров антенны. Предыдущий анализ показывает, что свойства матрицы системы уравнений (21) и матрицы Фишера \mathbf{J} зависят от числа N элементов приемной антенны. Исследуем эту зависимость. На рис. 4 приведены результаты расчетов полной ошибки Δ_K дБ, полученные при вариациях числа приемных элементов антенны N , которое отложено по оси абсцисс. Расчеты выполнены на частоте $f = 1000$ Гц при $K = 11$ для трех значений отношения сигнал/помеха $g_{S/N} = 1; 10; 100$. Как и следовало ожидать, увеличение количества N приемных элементов в антенне и величины отношения сигнал/помеха $g_{S/N}$ снижает полную ошибку реконструкции функции $P_q(z)$. Немонотонность кривых при малых значениях N , также как в предыдущем численном эксперименте, объясняется вырожденностью или плохой обусловленностью упомянутых ранее матриц. При заданных условиях численного эксперимен-

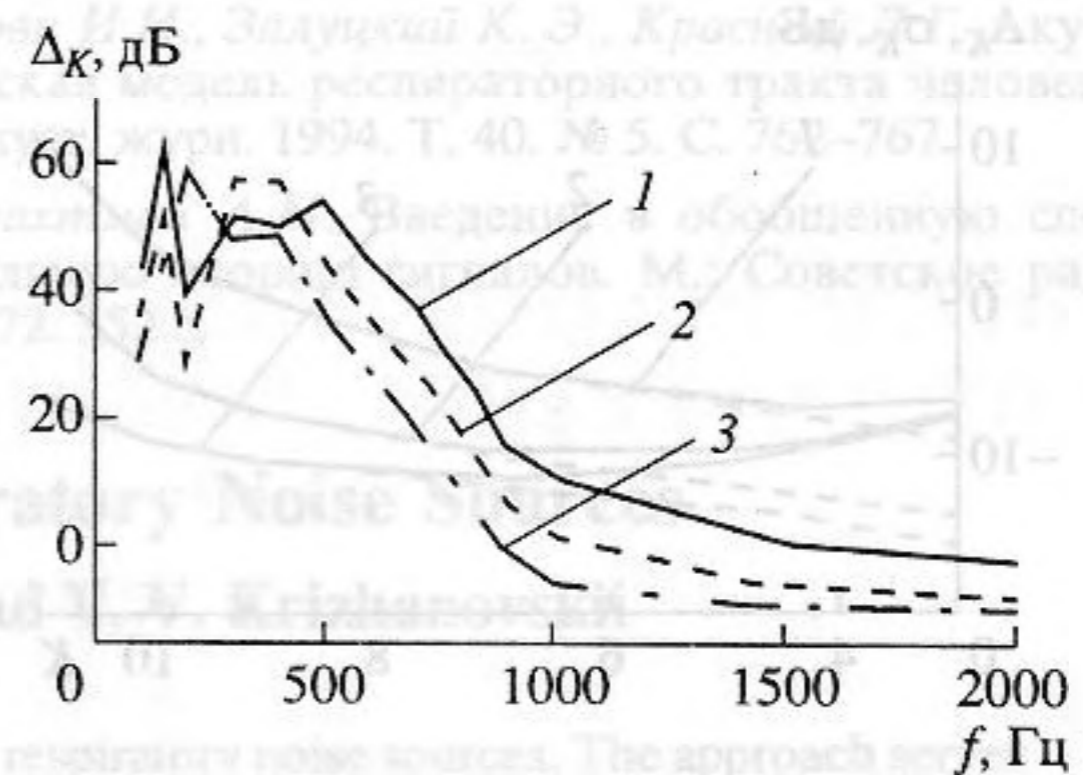


Рис. 2. Частотная зависимость полной ошибки оценивания Δ_K при различных значениях отношения сигнал/помеха $g_{S/N}$: 1 — $g_{S/N} = 1$; 2 — $g_{S/N} = 10$; 3 — $g_{S/N} = 100$.

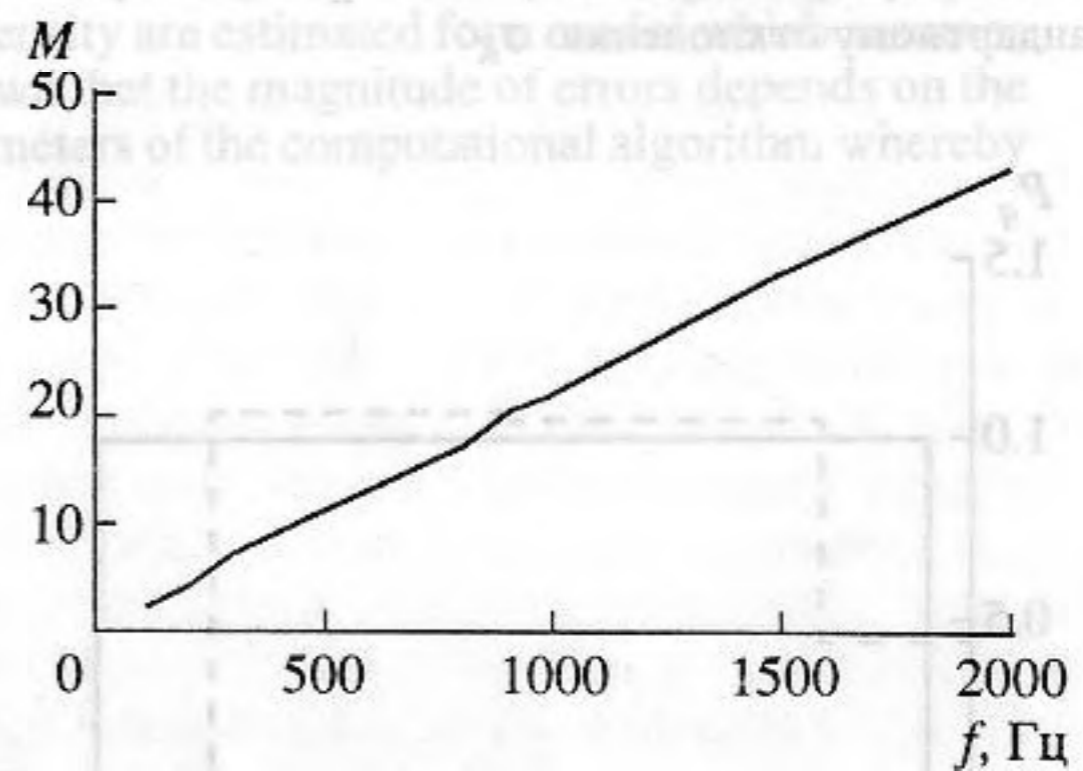


Рис. 3. Зависимость числа M распространяющихся мод шумов дыхания от частоты.

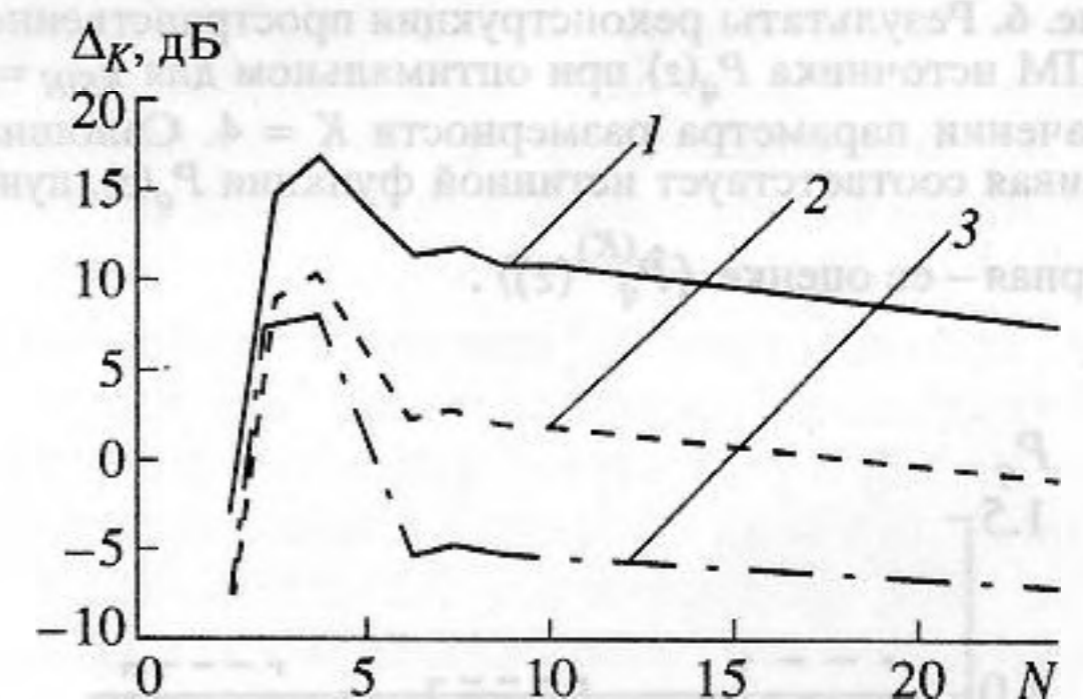


Рис. 4. Зависимость полной ошибки оценивания Δ_K от числа приемных элементов N при различных значениях отношения сигнал/помеха $g_{S/N}$: 1 — $g_{S/N} = 1$; 2 — $g_{S/N} = 10$; 3 — $g_{S/N} = 100$.

та заметное снижение полной ошибки достигается уже при $N \geq 6$.

Следующим шагом на пути снижения полной ошибки является оптимизация числа членов K в разложении (20). Результаты соответствующего численного эксперимента приведены на рис. 5. Расчеты выполнены для частоты $f = 1000$ Гц при

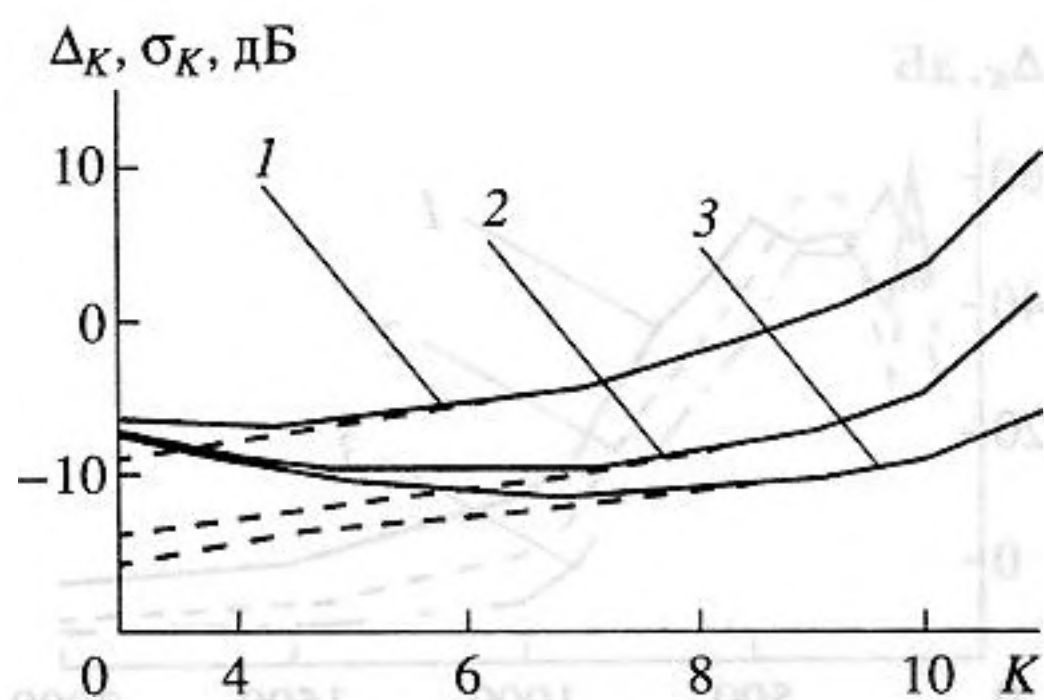


Рис. 5. Зависимость ошибок оценивания от размерности K базиса ортогональных функций $\{\phi_k(z)\}$ при различных значениях отношения сигнал/помеха $g_{S/N}$: 1 – $g_{S/N} = 1$; 2 – $g_{S/N} = 10$; 3 – $g_{S/N} = 100$. Сплошные кривые соответствуют полной ошибке Δ_K , пунктирные – стандартному отклонению σ_K .

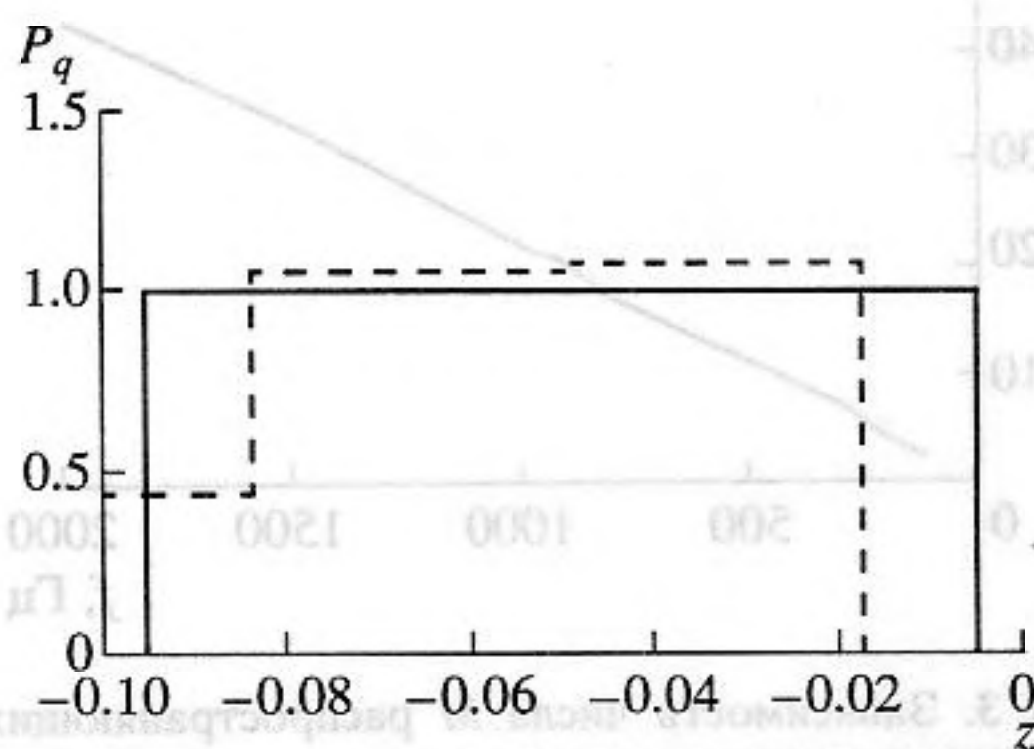


Рис. 6. Результаты реконструкции пространственной СПМ источника $P_q(z)$ при оптимальном для $g_{S/N} = 1$ значении параметра размерности $K = 4$. Сплошная кривая соответствует истинной функции $P_q(z)$, пунктирная – ее оценке $\langle \hat{P}_q^{(K)}(z) \rangle$.

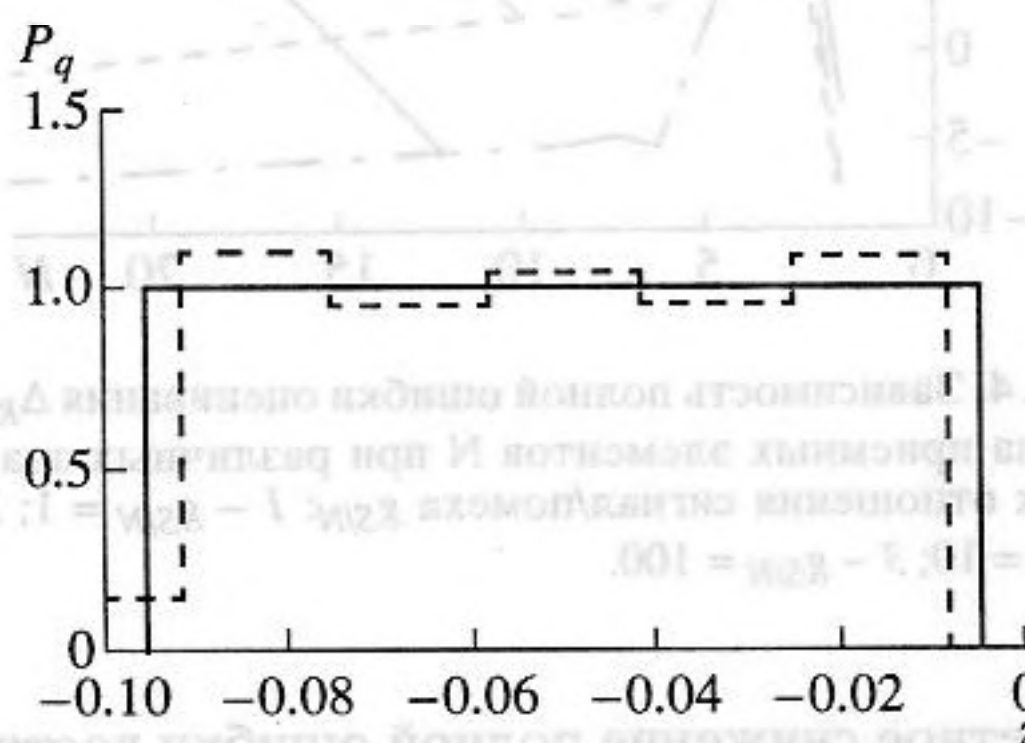


Рис. 7. Результаты реконструкции пространственной СПМ источника $P_q(z)$ при оптимальном для $g_{S/N} = 100$ значении параметра размерности $K = 7$. Сплошная кривая соответствует истинной функции $P_q(z)$, пунктирная – ее оценке $\langle \hat{P}_q^{(K)}(z) \rangle$.

$N = 6$ для трех значений отношения сигнал/помеха $g_{S/N} = 1; 10; 100$. По оси абсцисс отложены значения параметра K , а по оси ординат величина ошибок Δ_K и $\sigma_K(P)$ в децибеллах. Как видно из графиков, действительно, наблюдается оптимум по величине K . При этом для малых значений K рост полной ошибки связан с увеличением ошибки смещения ΔP_K , а для больших значений K он обусловлен увеличением стандартного отклонения $\sigma_K(P)$. Следует также заметить, что при увеличении отношения сигнал/помеха $g_{S/N}$ оптимум смещается в сторону больших значений параметра K . Так для $g_{S/N} = 1$ (сплошная кривая 1) он соответствует $K = 4$, а для $g_{S/N} = 100$ – оптимум равен $K = 7$ (сплошная кривая 3).

В качестве иллюстрации эффективности исследуемого алгоритма (21) на рис. 6 и 7 приведены результаты реконструкции функции $P_q(z)$ при указанных выше оптимальных значениях параметра K . Рисунку 6 соответствует $g_{S/N} = 1$, а рис. 7 описывает случай $g_{S/N} = 100$. Сплошными линиями на графиках изображены истинные функции $P_q(z)$, а пунктирными их оценки $\langle \hat{P}_q^{(K)}(z) \rangle$. По оси абсцисс отложены координаты z точек расположения источника на трахее. Как видно, даже при $K = 4$, удается восстановить область, где сосредоточена функция СПМ источника, а при $K = 7$ достаточно точно восстанавливается и форма этой функции.

В заключение заметим, что изложенный статистический подход к решению обратной задачи реконструкции функции СПМ источника позволяет также оптимизировать размеры приемной антенны и ее положение. В частности, численное моделирование показывает, что размеры и положение приемной антенны должны обеспечивать максимальный захват ее апертурой области пространства, где возбуждение мод наиболее интенсивно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

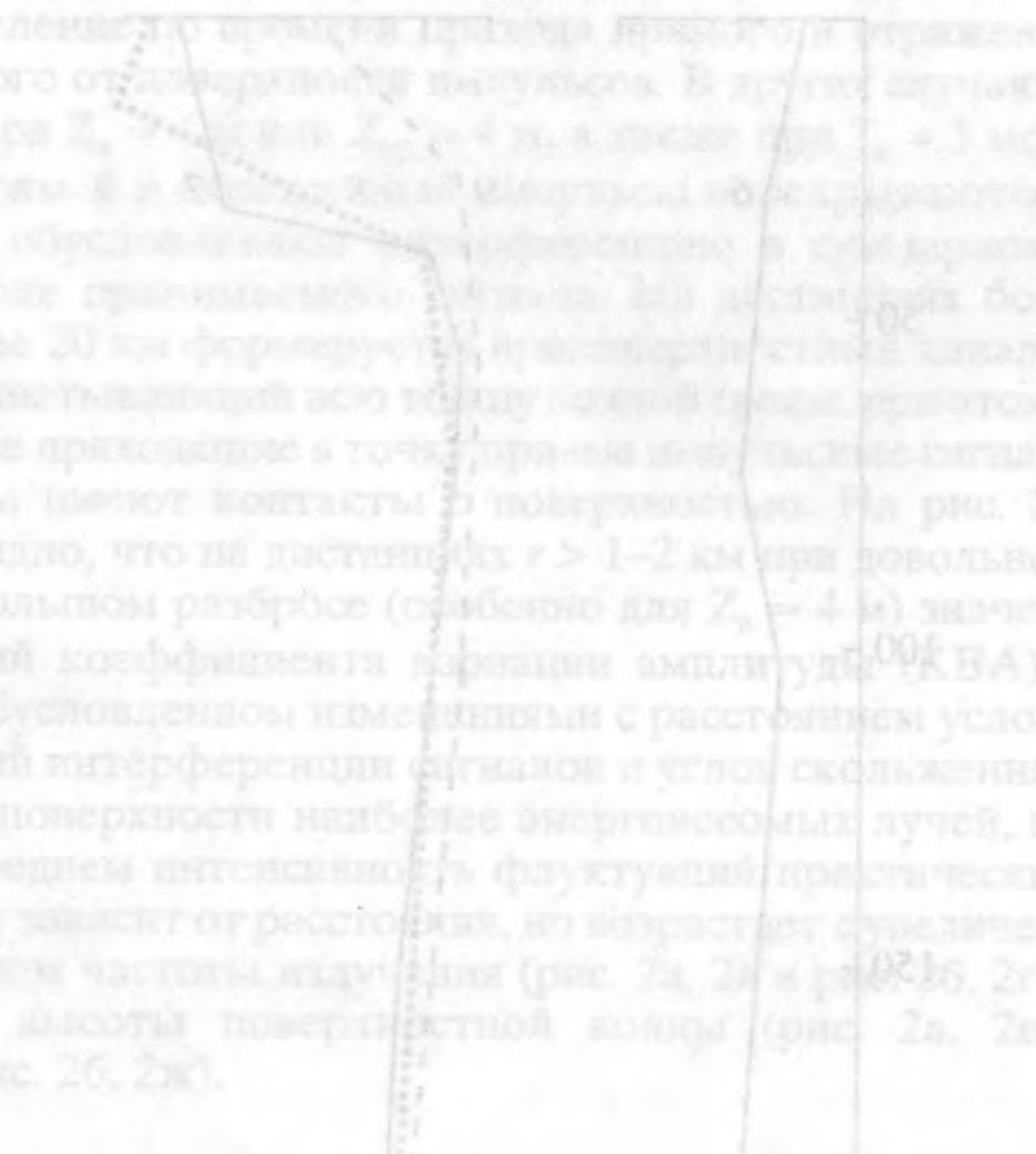
1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
3. Baggeroer A.B., Kuperman W.A., Schmidt H. Matched Field processing: Source localization in correlated noise as an optimum parameter estimation problem // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 83. P. 571–587.
4. Yang T.S. Broadband source localization and signature estimation // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. V. 93. P. 1797–1806.
5. Stoughton R., Stewart S. Source imaging with minimum mean-squared error // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. V. 94. P. 827–834.

6. Riley H.B., Tague J.A. Matched-field localization in high noise environments: A reduced-rank signal processing approach // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 96. P. 1515–1520.
7. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Советское радио, 1972. Т. 1. 744 с.
8. Вовк И.И., Залуцкий К. Э., Красный Л.Г. Акустическая модель респираторного тракта человека // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 5. С. 762–767.
9. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Советское радио, 1972. 352 с.

Image Reconstruction of Respiratory Noise Sources

V. T. Grinchenko, L. G. Krasnyi, and V. V. Krizhanovskii

A statistical approach is proposed to the image reconstruction of respiratory noise sources. The approach serves as the basis for the synthesis of an algorithm whereby the spatial correlation function of the field set up by noise-emitting sources can be reconstructed. The synthesis is done for a signal model which takes into account the multiplicative nonstationarity associated with the respiratory rhythm. It is shown that the key processing procedures are spectrum analysis, estimation of the modulating function, stationarization of spectrum samples, estimation of the spatial correlation function for the signal field, and solution of the corresponding integral equation. Errors in the reconstruction of the spatial power spectrum density are estimated for a model which assumes a respiratory noise source distributed along the trachea. It is shown that the magnitude of errors depends on the characteristics of the signal processing system used and the parameters of the computational algorithm whereby the reconstruction task is achieved.



Таблица

№ ВРС	Тип шума	Средняя скорость звука, м/с	Модуль скорости звука, м/с
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Рис. 1. Вертикальные распределения скорости звука по длине респираторного тракта человека. (а) в подгортанной полости; (б) в трахеи; (в) в бронхах; (г) в легких.