АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 6, с. 843–848

УДК 534.26

ОБ ОТРИЦАТЕЛЬНОМ СМЕЩЕНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ПУЧКОВ ИЗГИБНЫХ ВОЛН ПРИ ОТРАЖЕНИИ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ

© 1997 г. Н. С. Шевяхов

Институт радиотехники и электроники РАН
432700 Ульяновск, ул. Гончарова, 48

Поступила в редакцию 06.12.96 г.

Показано, что при отражении от жестко защемленного края и линии шарнирного опирания бесконечной пластины имеет место отрицательное смещение ограниченного пучка изгибных волн. Дано сравнение этих случаев отражения с отражением ограниченного пучка от свободного края. Установлено, что отрицательное смещение пучка при отражении есть результат соответствующих аномалий в продольном потоке энергии, образуемом наложением полей падающей и отраженной изгибной волны на поле приграничных изгибных колебаний.

Несмотря на то, что распространение изгибных волн в тонких пластинах, в том числе при наличии отражающих эти волны неоднородностей, хорошо изучено и описано в многочисленных статьях (см., например, [1–3]) и монографиях [4, 5], отражение ограниченных пучков изгибных волн специально не рассматривалось. Настоящая статья восполняет этот пробел. В ней показано, что при определенных условиях отражение ограниченных пучков изгибных волн имеет аномальный характер и выражается в том, что смещение отраженного пучка по отношению к падающему происходит против направления волнового распространения в пучках с продольной координатой (рис. 1б), тогда как обычно в акустике [6–8] они совпадают (рис. 1а).

Подобного рода аномалии при отражении ограниченного пучка поперечных волн от свободной границы гексагонального пьезокристалла предсказывались впервые в работе [9], где это явление получило название отрицательного смещения пучка (ОСП). Аналогичный эффект рассматривался затем теоретически, вначале в [10], а затем и в [11] для случая отражения ограниченного пучка магнитоупругих волн от границы намагниченного феррита-граната с вакуумом.

Применительно к случаю, рассмотренному в [9], в работе [12] было показано, что в отношении каждой слагающей пучок монохроматической компоненты ОСП есть следствие возникновения в самом кристалле локализованного у границы и отрицательно направленного вдоль нее продольного потока энергии, образуемого наложением полей объемно распространяющихся волн с полями приграничных сопутствующих электрических колебаний. Этот вывод работы [12] закрепил сложившееся по результатам исследований [9–11] представление о том, что эффект ОСП не характерен для обычных акустических систем и проявляется только в кристаллах с комплексом сопряженных физических свойств (пьезоэффект [9, 12], магнитоупругое взаимодействие [10, 11]). Такая точка зрения не выдерживает критики, если при обращении к типично механической системе – изгибным волнам в тонкой пластине – взглянуть на результаты работ [9, 12] с предельно общих позиций.

Действительно, в тонких пластинах, как следствие специфического проявления геометрической дисперсии, наинизшей антисимметричной моде – изгибной волне – сопутствуют у краев (кромок) пластины так называемые приграничные (неоднородные) изгибные колебания [2, 3]. Следствием этого, например, является существование на свободной кромке пластины поверхностной изгибной волны рэлеевского типа [3].

По способу образования и характеру колебательного движения указанные приграничные изгибные колебания можно рассматривать как механический аналог сопутствующих приповерхностных электрических [9] или магнитостатических [10, 11] колебаний в кристаллах. В этой связи при отражении ограниченных пучков изгибных волн от краев или линий опирания тонких пластин следует ожидать проявление эффекта аналогичного ОСП. Для проверки высказанного предположе-

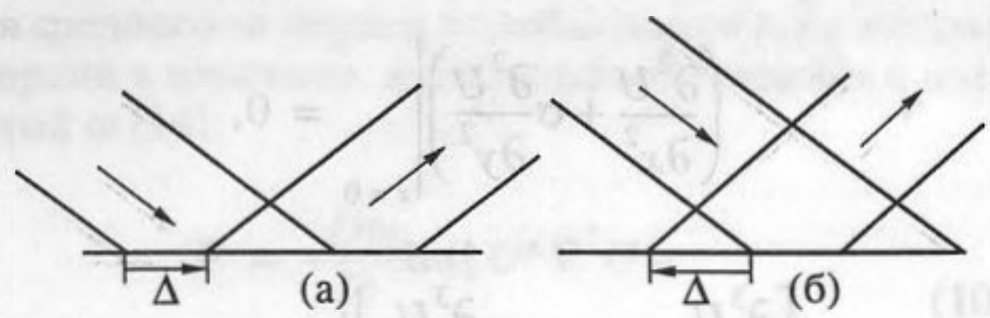

Рис. 1. Схематическая картина обычного (а) и отрицательного (б) смещений ограниченного пучка.

ния ограничимся далее рассмотрением случаев отражения ограниченных пучков изгибных волн от жестко защемленного и свободного края полубесконечной пластины, а также от линии шарнирного опирания бесконечной пластины.

Обращаясь к случаю полубесконечной пластины, примем, что в системе координат $xOyz$ она занимает полуплоскость xOy, $x \le 0$ и в пренебрежении сдвигом и инерцией вращения [1–5] описывается уравнением:

$$D\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4}\right) + \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость, h – толщина, ρ – плотность, U – отклонение пластины от положения равновесия, t – время. Для наклонного падения плоской монохроматической изгибной волны с амплитудой U_0 и частотой ω на край пластины $x = 0$ решение уравнения (1) при $x \le 0$ имеет стандартный вид:

$$U = U_0 e^{i(k_y y - \omega t)}(e^{ik_x x} + Re^{-ik_x x} + Ae^{qx}). \quad (2)$$

Здесь R – коэффициент отражения изгибной волны, A – амплитудный коэффициент приграничных изгибных колебаний, спадающих в глубь пластины с коэффициентом $q = \sqrt{k^2 + k_y^2}$, $k_x = \sqrt{k^2 - k_y^2}$, k_y – проекция волнового вектора изгибных волн на край пластины, $k = \sqrt{\omega}\,(\rho h/D)^{1/4}$ – волновое число изгибной волны.

Жестко защемленному краю пластины отвечают граничные условия: $U|_{x=0} = 0$, $\partial U/\partial x|_{x=0} = 0$, приводящие при подстановке в них (2) к выражениям

$$R = \frac{ik_x - q}{ik_x + q}, \quad A = -\frac{2ik_x}{ik_x + q}. \quad (3)$$

В случае свободного края пластины граничные условия выглядят следующим образом (см. [2, 3]):

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{x=0} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2}\right]\Bigg|_{x=0} = 0.$$

Подставляя в них (2), имеем

$$R = \frac{ik_x(q^2 - \sigma k_y^2)^2 - q(k_x^2 + \sigma k_y^2)^2}{ik_x(q^2 - \sigma k_y^2)^2 + q(k_x^2 + \sigma k_y^2)^2},$$
$$A = \frac{2ik_x(k_x^2 + \sigma k_y^2)(q^2 - \sigma k_y^2)}{ik_x(q^2 - \sigma k_y^2)^2 + q(k_x^2 + \sigma k_y^2)^2}, \quad (4)$$

где σ – коэффициент Пуассона материала пластины. Заметим, что формулы (3), (4) получаются как частные случаи из результатов работы [2], если цилиндрическую жесткость пристыкованной пластины, в которую преломляется изгибная волна, принять соответственно бесконечной или равной нулю. Равенство же нулю знаменателя в формулах (4) определяет дисперсионное уравнение поверхностей изгибной волны рэлеевского типа в пластине [3].

В геометрическом приближении, когда $kw \gg 1$, w – ширина пучка, продольное смещение Δ при отражении узконаправленного, однородного в сечении ограниченного пучка плоских монохроматических волн общей частоты ω определяется, как известно [6], формулой

$$\Delta = -\frac{d\varphi(k_y)}{dk_y}\Bigg|_{k_y = k\sin\theta}. \quad (5)$$

Здесь $\varphi(k_y) = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im}(R)}{\operatorname{Re}(R)}$ – угол сдвига фазы коэффициента отражения R монохроматической волны от рассматриваемой границы, θ – угол падения пучка на границу. Таким образом, интересующее продольное смещение Δ отраженного пучка изгибных волн в пластине можно получить, если на основании формул (3), (4) определить вначале зависимости:

$$\varphi(k_y) = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{k^2 + k_y^2}}{\sqrt{k^2 - k_y^2}}$$

– для пластины с защемленным краем;

$$\varphi(k_y) = 2\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sqrt{k^2 + k_y^2}}{\sqrt{k^2 - k_y^2}}\left[\frac{k^2 - k_y^2(1-\sigma)}{k^2 + k_y^2(1-\sigma)}\right]^2\right\}$$

– для пластины со свободным краем, а затем подставить их в (5).

После элементарных преобразований для пластины с жестко защемленным краем получаем формулу:

$$\Delta = -\frac{2\operatorname{tg}\theta}{k\sqrt{1 + \sin^2\theta}}, \quad (6)$$

которая, как и предполагалось, показывает, что продольное смещение ограниченного пучка изгибных волн, причем как и в [9], для любых углов θ, является отрицательным: $\Delta < 0$. Из формулы (6) также следует, что за исключением области малых углов скольжения $\alpha = \pi/2 - \theta$, где геометрооптическое рассмотрение, приводящее к формуле (5), теряет силу, величина Δ хотя и превосходит обычно в несколько раз ОСП при отражении от свободной металлизированной границы пьезоэлектрика с высокой электромеханической связью [9], но еще остается малой для обнаружения.

Для пластины со свободным краем

$$\Delta = \frac{4\,\mathrm{tg}\,\theta}{k\sqrt{1+\sin^2\theta}}\{[3-4\sigma-(1-\sigma)(3+\sigma)\sin^4\theta]\times \times[1-\sin^4\theta(1-\sigma)^2]\}/\{\cos^2\theta[1+\sin^2\theta(1-\sigma)]^4+ +(1+\sin^2\theta)[1-\sin^2\theta(1-\sigma)]^4\}. \quad (7)$$

Если не рассматривать случай экзотических материалов с отрицательными значениями коэффициента Пуассона [13], то ввиду ограничения $0 < \sigma < 1/2$ знак Δ в (7) будет определяться первым, стоящим в квадратных скобках сомножителем. Именно, при $\theta < \theta^*$, где θ^* определяется равенством $\sin^4\theta^* = (3 - 4\sigma)/[(1 - \sigma)(3 + \sigma)]$, имеет место обычное ($\Delta > 0$) смещение пучка. При $\theta > \theta^*$, $\Delta < 0$, т.е. проявляется ОСП. Следует заметить, что здесь для окончательного выяснения вопроса о характере смещения пучка при отражении от свободного края пластины необходимо, конечно, контролировать требуемую степень отличия θ^* от $\pi/2$ с тем, чтобы формула (7), полученная на основе (5), еще имела смысл. Так для материалов с $\sigma \ll 1$ угол θ^* оказывается весьма близок к $\pi/2$ и позволительно игнорировать область углов $\theta > \theta^*$, полагая в соответствии с оптическим результатом (7) смещение ограниченного пучка при отражении всегда положительным.

Полученные результаты полезно сопоставить с результатами для случая отражения ограниченного пучка изгибных волн от линии шарнирного опирания бесконечной пластины $x = 0$. Не приводя здесь полностью известное решение этой краевой задачи [1, 2], ограничимся замечанием, что теперь выражение (2) следует дополнить решением уравнения (1) при $x \geq 0$:

$$U(x>0) \equiv U_+, \quad U_+ = e^{i(k_y y - \omega t)}(Te^{ik_x x} + Be^{-qx}),$$

где T – коэффициент прохождения изгибной волны через линию шарнирного опирания пластины, B – амплитудный коэффициент приграничных изгибных колебаний. На основе стандартных требований непрерывности угловых поворотов и вращающих моментов, а также, исходя из условия отсутствия перемещений на линии шарнирного опирания (результат шарнирного закрепления пластины между призмами при $x = 0$), из выражения для U_+ и (2) получим

$$R = -\frac{q}{q+ik_x}, \quad A = -\frac{ik_x}{q+ik_x}. \quad (8)$$

Отсюда имеем $\varphi(k_y) = -\mathrm{arctg}(\sqrt{k^2-k_y^2}/\sqrt{k^2+k_y^2})$, что согласно (5) приводит к выражению

$$\Delta = -\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{k\sqrt{1+\sin^2\theta}}. \quad (9)$$

Из сравнения (9) с (6) видно, что при отражении пучка линией шарнирного опирания ОСП ровно вдвое меньше, чем для пластины с жестко защемленным краем. Налицо любопытная связь между характером краевых условий и величиной ОСП: с возрастанием вдвое степени кинематической свободы пластины на линии отражения (были запрещены как смещения, так и угловые повороты – стали разрешены угловые повороты, но сохранился запрет на смещение пластины) ровно вдвое снизилось и ОСП. При еще большей степени кинематической свободы пластины на линии отражения, что имеет место для пластины со свободным краем, ОСП исчезает (см. (7)), сменяясь обычным ($\Delta > 0$) смещением пучка. Таким образом, при образовании продольного потока энергии, ответственного за ОСП, со стороны поля приграничных изгибных колебаний в основном участвуют динамические переменные (изгибающий момент, перерезывающая сила), тогда как со стороны поля плоских однородных изгибных волн – кинематические переменные: смещение U и угловой поворот $\partial U/\partial x$.

Наличие аномалий в продольном потоке энергии, образуемом для каждой отдельно взятой монохроматической компоненты пространственного спектра ограниченного пучка наложением полей падающей и отраженной изгибной волны на поле приграничных колебаний, а также связь этих аномалий с ОСП можно показать прямым расчетом. Воспользуемся с этой целью формулой для среднего за период колебаний вектора потока энергии в пластине, изгибноколеблющейся с частотой ω [14]:

$$\mathbf{P} = -\frac{D\omega}{2}\mathrm{Im}\{U^*\nabla^3 U - -\sigma\nabla U^*\nabla^2 U - (1-\sigma)(\nabla U^*\nabla)\nabla U\}. \quad (10)$$

Звездочка вверху означает здесь комплексную сопряженность соответствующей величины, ∇ – оператор Гамильтона в координатной плоскости пластины.

Подстановка (2) в (10) с выбором соответствующих случаю выражений (3), (4) или (8) после преобразований приводит к представлению среднего за период нормированного потока энергии $p = P_y/P_y^{(0)}$ в пластине в виде:

$$p = f(x, k_y) + q(x, k_y)e^{qx} + h(k_y)e^{2qx}. \qquad (11)$$

Нормирующая величина $P_y^{(0)} = \omega k_y k^2 D U_0^2$ представляет собой средний продольный поток энергии в падающей изгибной волне.

Первое слагаемое в формуле (11) есть не что иное, как средний нормированный продольный поток энергии от перекрывающихся полей падающей и отраженной (следовательно уже повлиявшей энергетически на ОСП) плоской однородной изгибной волны. Как не вносящее вклада в формирование отраженного пучка, это слагаемое, описывающее энергетически типично интерференционную картину поля двух суперпозирующих когерентных волн, в дальнейшем не рассматривается. Второе слагаемое в формуле (11) характеризует нормированный средний продольный поток энергии, образующийся наложением поля плоских однородных изгибных волн на поле приграничных изгибных колебаний. Поэтому вполне естественно, что структурно он сочетает смешанные черты, присущие как изгибным волнам (пространственная периодичность распределения данного потока с поперечной координатой x полностью обусловлена распределением смещений в изгибных волнах), так и приграничным изгибным колебаниям (именно они предопределяют характер приграничной локализации потока). Последнее слагаемое в (11) представляет нормированный средний продольный поток энергии, обусловленный только приграничными изгибными колебаниями.

В случае пластины с защемленным краем зависимости $q(x, k_y)$ и $h(k_y)$ имеют следующий вид:

$$q(x, k_y) = -2\frac{k_x}{k^2}(1-\sigma)\left[q\frac{k_y^2 - k_x^2}{k^2}\sin(k_x x) + k_x\frac{k^2 + 2k_y^2}{k^2}\cos(k_x x)\right], \qquad (12)$$

$$h(k_y) = 2\frac{k_x^2}{k^2}\frac{k_y^2 - \sigma q^2}{k^2}.$$

Для пластины со свободным краем

$$q(x, k_y) = \frac{4(1-\sigma)k_x(q^2 - \sigma k_y^2)(k_x^2 + \sigma k_y^2)^3}{k_x^2(q^2 - \sigma k_y^2)^4 + (k_x^2 + \sigma k_y^2)^4 q^2} \times$$
$$\times\left\{k_x\cos(k_x x)\left[\frac{q^2}{k^2} + \frac{k_y^2}{k^2}\left(\frac{q^2 - \sigma k_y^2}{k_x^2 + \sigma k_y^2}\right)^2\right] + \right. \qquad (13)$$
$$\left. + q\sin(k_x x)\left[\frac{k_y^2}{k^2} - \frac{k_x^2}{k^2}\left(\frac{q^2 - \sigma k_y^2}{k_x^2 + \sigma k_y^2}\right)^2\right]\right\},$$

$$h(k_y) = \frac{k_y^2 - \sigma q^2}{k^2}\frac{4k_x^2(k_x^2 + \sigma k_y^2)^2(q^2 - \sigma k_y^2)^2}{k_x^2(q^2 - \sigma k_y^2)^4 + (k_x^2 + \sigma k_y^2)^4 q^2}.$$

Наконец, для бесконечной пластины, шарнирно опертой вдоль линии $x = 0$, имеем

$$q(x, k_y) = -\frac{k_x}{k^2}\left\{k_x\cos(k_x x)\frac{(1+\sigma)k^2 + 2q^2(1-\sigma)}{2k^2} + \right.$$
$$\left. + q\sin(k_x x)\frac{2\sigma k_x^2 + 4k_y^2 - q^2(1+\sigma)}{2k^2}\right\}, \qquad (14)$$

$$h(k_y) = \frac{k_x^2}{k^2}\frac{k_y^2 - \sigma q^2}{2k^2}.$$

Выражения (12)–(14) определяют ту часть нормированного среднего продольного потока энергии (11)

$$\tilde{p} = q(x, k_y)e^{qx} + h(k_y)e^{2qx}, \qquad (15)$$

которая представляется ответственной за перераспределение энергии вдоль отражающей границы при формировании отраженного пучка. Нетрудно заметить, что основной вклад, и, следовательно, знак величины $\tilde{p}$ при $x = 0$, определяется первым слагаемым в формуле (15). Граничная же отрицательность $\tilde{p}$, выражаемая условием $q(0, k_y) < 0$, согласно (12)–(14) имеет место как раз в тех случаях, когда в соответствии с формулами (6) и (9) проявляется ОСП. Любопытно, что подобно тому, как ОСП, выраженное по формуле (9) вдвое меньше, чем показывает формула (6), так и $|q(0, k_y)|$, оцененное согласно (14), примерно вдвое меньше того значения, что дает выражение (12).

Типичные профили потока энергии $\tilde{p}$, полученные расчетом по формулам (12)–(15) для различных углов падения монохроматической изгибной волны $\beta = \arcsin(k_y/k)$ представлены для случая отражения от жестко защемленного (рис. 2а) и свободного (рис. 2б) края пластины.

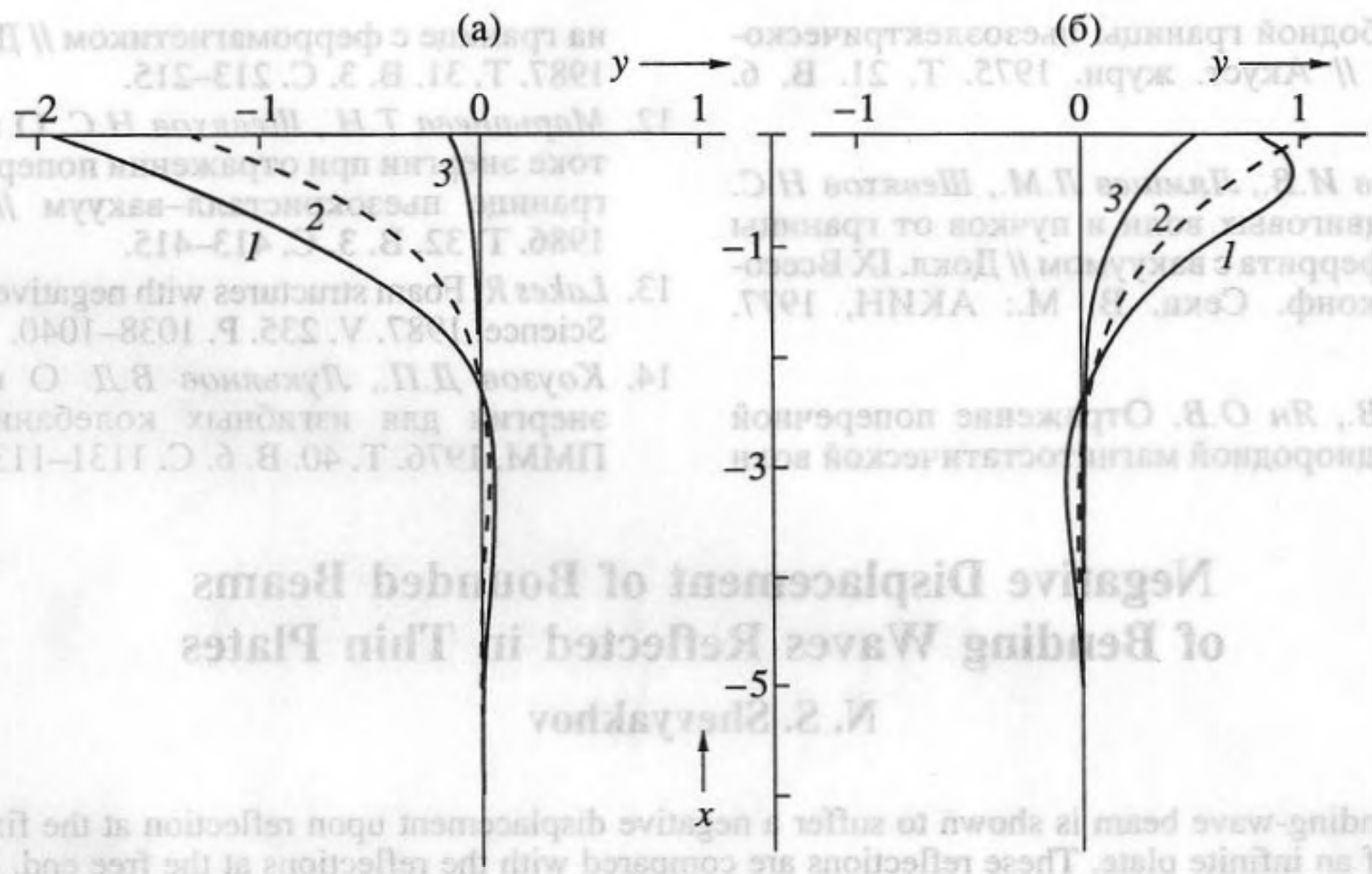

Рис. 2. Профили нормированного усредненного потока энергии $\tilde{p}$ вдоль жестко защемленного (а) и свободного (б) края пластины с $\sigma = 0.3$: *1* – $\beta = 10°$, *2* – $\beta = 45°$, *3* – $\beta = 80°$.

Видно, что вследствие хорошо выраженной приграничной локализации знакопеременный поток $\tilde{p}$ переносит энергию вдоль защемленного края пластины в целом в отрицательную сторону оси y, предопределяя этим самым существование ОСП. Обратное имеет место для пластины со свободным краем: поток $\tilde{p}$ в основном направлен в положительную сторону оси y, что и объясняет здесь отсутствие ОСП.

Численные оценки ОСП по формулам (6), (9) показывают, что этот эффект в масштабе длин волн $\lambda = 2\pi/k$ обычно мал. Однако надежды на его наблюдаемость можно связать с тем, что согласно дифракционной теории отражения ограниченных пучков [7], результаты которой применимы здесь к случаям пластины с жестко защемленным краем и линией шарнирного опирания без существенных изменений, Δ имеет максимум при углах падения пучка $\theta \sim \pi/2 - (wk)^{-1/2}$, $kw \gg 1$, причем $|\Delta_{max}| \sim (w/k)^{1/2}$. Таким образом, надлежащим выбором ширины пучка w и малого угла скольжения можно обеспечить условие $|\Delta_{max}| > 10\lambda$. Вместе с отсутствием (в отличие от кристаллов) жестких ограничений на протяженность и размеры пластины это делает шансы на успех наблюдения ОСП достаточно реальными.

В заключение заметим, что случай отражения ограниченных пучков изгибных волн от свободного края пластины при углах $\theta > \theta^*$ требует специального рассмотрения. Во-первых, показываемое здесь формулой (7) ОСП не подтверждается наличием соответствующих аномалий в потоке энергии $\tilde{p}$. С другой стороны, непосредственное применение результатов дифракционной теории отражения ограниченных пучков [7] к этому случаю затруднено наличием полюса подынтегральной функции в представлении поля отраженного пучка, лежащего на вещественной оси и соответствующего в пределе скользящего падения поверхностной "квазирэлеевской" волне на свободном крае пластины [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Распространение волн изгиба по пластинкам // ЖТФ. 1944. Т. 14. В. 9. С. 568–576.
2. *Тютекин В.В.* Отражение и преломление изгибных волн на границе раздела двух пластин // Акуст. журн. 1962. Т. 8. В. 2. С. 233–236.
3. *Коненков Ю.К.* Об изгибной волне "рэлеевского" типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6. В. 1. С. 124–126.
4. *Лямшев Л.М.* Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 72 с.
5. *Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д., Маслов В.П., Римский-Корсаков А.В.* Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин. М.: Наука, 1974. 102 с.
6. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
7. *Годин О.А.* Дифракционная теория смещения ограниченных волновых пучков при отражении. I // ЖТФ. 1984. Т. 54. В. 11. С. 2094–2104.
8. *Годин О.А.* Дифракционная теория смещения ограниченных волновых пучков при отражении. II // ЖТФ. 1985. Т. 55. В. 1. С. 17–25.
9. *Лямшев Л.М., Шевяхов Н.С.* Явление отрицательного смещения ультразвукового пучка при отра-

жении от свободной границы пьезоэлектрического кристалла // Акуст. журн. 1975. Т. 21. В. 6. С. 951–952.

10. *Барабанщиков И.В., Лямшев Л.М., Шевяхов Н.С.* Отражение сдвиговых волн и пучков от границы кубического феррита с вакуумом // Докл. IX Всесоюзн. акуст. конф. Секц. В. М.: АКИН, 1977. С. 127–130.

11. *Филиппов В.В., Ян О.В.* Отражение поперечной упругой и неоднородной магнитостатической волн на границе с ферромагнетиком // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. В. 3. С. 213–215.

12. *Марышева Т.Н., Шевяхов Н.С.* О продольном потоке энергии при отражении поперечной волны на границе пьезокристалл–вакуум // Акуст. журн. 1986. Т. 32. В. 3. С. 413–415.

13. *Lakes R.* Foam structures with negative Poisson's ratio // Science. 1987. V. 235. P. 1038–1040.

14. *Коузов Д.П., Лукьянов В.Д.* О векторе потока энергии для изгибных колебаний пластины // ПММ. 1976. Т. 40. В. 6. С. 1131–1135.

Negative Displacement of Bounded Beams of Bending Waves Reflected in Thin Plates

N. S. Shevyakhov

Bounded bending-wave beam is shown to suffer a negative displacement upon reflection at the fixed end or hinge axis of an infinite plate. These reflections are compared with the reflections at the free end. It is stated that the negative beam displacement is a consequence of corresponding anomalies in the longitudinal energy flux formed by the superimposition of the incident and reflected bending waves on the field of boundary bending oscillations.