АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1998, том 44, № 1, с. 46–56

УДК 534.26

ОСОБЕННОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ НАГРУЗКИ ИМПЕДАНСНОГО ТИПА

© 1998 г. А. Е. Вовк, В. В. Тютекин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 г. Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 29.04.97 г.

Рассмотрено отражение плоской продольной волны от границы изотропного упругого полупространства, на которой закреплена нагрузка импедансного типа. Исследуется влияние такой нагрузки на энергетические характеристики отраженных продольных и сдвиговых волн. В качестве нагрузки рассматривается набор одинаковых резонаторов, реагирующих на нормальное и тангенциальное напряжения и обладающих двумя различными резонансными частотами. На этих частотах выполняются смешанные граничные условия, в результате чего падающая продольная волна отражается полностью. Значительное отражение наблюдается в полосе частот, ширина которой определяется величиной инерционного импеданса резонатора. Найдены параметры резонатора, обеспечивающие среднюю величину энергии в отраженной продольной волне до 98–99% в широком диапазоне частот для всех углов падения первичной продольной волны.

При отражении продольных и сдвиговых волн от границ твердого тела происходит их взаимная трансформация (см., например, [1, 2]), которая приводит к возбуждению поверхностных (в частности, релеевских) волн [3], [4] на свободных поверхностях, волн Стоунли [5] на границе контакта твердых тел, волн Лэмба [6] – в твердых волноводах и т.д. Несмотря на то, что исследования этих явлений проводятся в течение столетия, работы по этому направлению до сих пор продолжают появляться в научной литературе (см., например, [7–9]).

Существенной, на наш взгляд, проблемой является выявление новых возможностей управления процессом взаимодействия волн на границах с целью создания технических устройств, необходимых для практических целей. К физическим процессам, реализующимися такими устройствами, по нашему мнению, можно отнести: поглощение упругих волн на границах тела, виброизоляция упругих (в частности, лэмбовских) волн в твердых волноводах, реализация таких волноводов с заданными характеристиками и др. В настоящей статье рассматривается задача о трансформации продольных волн в изотропном однородном упругом полупространстве при их падении на его границу, жестко контактирующую с некоторой нагрузкой. Отметим, что такая задача частично была рассмотрена в работе [10].

Зададим падающую продольную волну в виде:

$$\mathbf{u}_l^0 = \mathbf{a}_0 \exp(i(k_1 z + k_2 x)), \tag{1}$$

где $\mathbf{u}_l^0 = (-i\omega u_z^0, -i\omega u_x^0)^t$ – вектор колебательной скорости, $\mathbf{a}_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)^t$ – вектор поляризации волны, $k_1 = k_l\cos\theta_0$, $k_2 = k_l\sin\theta_0$, θ_0 – угол падения k_l – волновое число продольных волн, индекс t означает траспонирование матрицы. Система координат выбрана так, что ось x параллельна границе, а ось z совпадает с внешней нормалью.

Аналогично, отраженные волны имеют вид:

$$\mathbf{u}_l = R_{11}\mathbf{a}_l \exp(i(-k_1' z + k_2' x)), \tag{2}$$

– продольная волна.

$$\mathbf{u}_t = R_{12}\mathbf{a}_t \exp(i(-k_1' z + k_2' x)), \tag{3}$$

– сдвиговая волна.

Здесь R_{11} и R_{12} – коэффициенты отражения, $\mathbf{a}_l = (-\cos\theta_0, \sin\theta_0)^t$, $\mathbf{a}_t = (\sin\theta_1, \cos\theta_1)^t$, $k_1' = k_t\cos\theta_1$, $k_2' = k_t\sin\theta_1$, k_t – волновое число, θ_1 – угол отражения сдвиговых волн, определяемый, как обычно, из соотношения:

$$k_t \sin\theta_1 = k_l \sin\theta_0. \tag{4}$$

Множитель $\exp(ik_2' x)$ всюду в дальнейшем опущен.

Составляющие тензора напряжений σ_{zz} и σ_{zx} связаны со смещениями u_z и u_x известными соотношениями:

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\sigma_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right), \quad (6)$$

где λ и μ – коэффициенты Ляме упругой среды.

Образуем для каждой из волн вектор-столбец напряжений $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{zz}, \sigma_{xz})^t$, связанный с векторами соответствующих колебательных скоростей соотношениями $\boldsymbol{\sigma} = Z\mathbf{u}$, где Z – 2×2-матрица упругих импедансов [9].

Таким образом,

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = Z_0^l \mathbf{a}_0 \exp(ik_1 z), \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = Z_l^l \mathbf{a}_l R_{11} \exp(ik_1 z),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t = Z_t^l \mathbf{a}_t R_{12} \exp(ik_1 z),$$

где нижние значки (0) и (l) относятся к падающей и отраженной продольным волнам, а значок (t) – к отраженной сдвиговой волне. Импедансные матрицы Z_0^l, Z_1^1 и Z_t^l, полученные путем подстановки выражений (1), (2) и (3) в соотношения (5) и (6), имеют вид:

$$Z_{0,l}^l = -\begin{pmatrix} \pm\cos\theta_0 & (1-2b^2)\sin\theta_0 \\ b^2\sin\theta_0 & \pm b^2\cos\theta_0 \end{pmatrix},$$

$$Z_t^1 = \begin{pmatrix} b^{-1}\cos\theta_1 & -(1-2b^2)\sin\theta_0 \\ -b^2\sin\theta_0 & b\cos\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь все напряжения и элементы матриц выражены в единицах ρc_l, где ρ – плотность среды, c_l – скорость продольных волн, параметр $b = \dfrac{c_t}{c_l} = \sqrt{\dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$, c_t – скорость сдвиговых волн, ν – коэффициент Пуассона. В первой матрице нижний индекс (0) соответствует знаку (+), а индекс l – знаку (–) в скобках.

Нагрузку на границу тела зададим также в виде импедансной матрицы Z^0, связывающей между собой суммарные вектора напряжений и колебательных скоростей при $z = 0$:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_l + \boldsymbol{\sigma}_t = -Z^0(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t). \quad (7)$$

Здесь $Z^0 = \begin{pmatrix} Z_{11}^0 & Z_{12}^0 \\ Z_{21}^0 & Z_{22}^0 \end{pmatrix}$, где Z_{ik}^0 – безразмерные элементы матрицы, также выраженные в единицах ρc_1. Подставляя соответствующие величины векторов в (7) и группируя члены, получим:

$$(Z_l^l + Z^0)\mathbf{a}_l R_{11} + (Z_t^l + Z^0)\mathbf{a}_t R_{12} = -(Z_0^l + Z^0)\mathbf{a}_0. \quad (8)$$

Векторное уравнение (8) эквивалентно системе двух уравнений относительно величин R_{11} и R_{12}. Запишем эту систему в матричной форме, удобной для решения на ЭВМ с применением программ матричной алгебры. Введя обозначения для векторных величин $(Z_l^l + Z^0)\mathbf{a}_l = \mathbf{A}_1 = (A_{11}, A_{21})^t$, $(Z_t^l + Z^0)\mathbf{a}_t = \mathbf{A}_2 = (A_{12}, A_{22})^t$, $(Z_0^l + Z^0)\mathbf{a}_0 = \mathbf{B} = (B_1, B_2)^t$, представим уравнение (8) в виде:

$$\mathbf{A}_1 R_{11} + \mathbf{A}_2 R_{12} = \mathbf{B}. \quad (9)$$

Введя далее вектор-столбец $\mathbf{R} = (R_{11}, R_{12})^t$ и матрицу $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, получим матричное уравнение:

$$A\mathbf{R} = \mathbf{B}, \quad (10)$$

решение которого можно записать в виде:

$$\mathbf{R} = A^{-1}\mathbf{B}. \quad (11)$$

Кроме этого уравнения для определения величин R_{11} и R_{12}, нами использовались и аналитические формулы, которые для определенной формы нагрузки будут приведены ниже.

Необходимо отметить, однако, что эти величины не в полной мере характеризуют процесс отражения (преобразования), поскольку они относятся к волнам, обладающим разной энергетикой (за счет различных модулей упругости: $\lambda + 2\mu$ – для продольных волн и μ – для сдвиговой волны). Поэтому нами в дальнейшем использовались величины потоков энергии в каждой из отраженных волн [1]:

$$E_l = |R_{11}|^2, \quad E_t = \frac{b\cos\theta_1}{\cos\theta_0}|R_{12}|^2.$$

Отметим, что для непоглощающей нагрузки Z^0, которая в дальнейшем только и будет рассматриваться, выполняется соотношение $E_l + E_t = 1$. Исходя из этого, можно рассматривать только одну составляющую, например, E_l.

В общем случае величины R_{11} и R_{12}, характеризующие преобразование упругих волн, существенно зависят от характера и величины нагрузки Z^0.

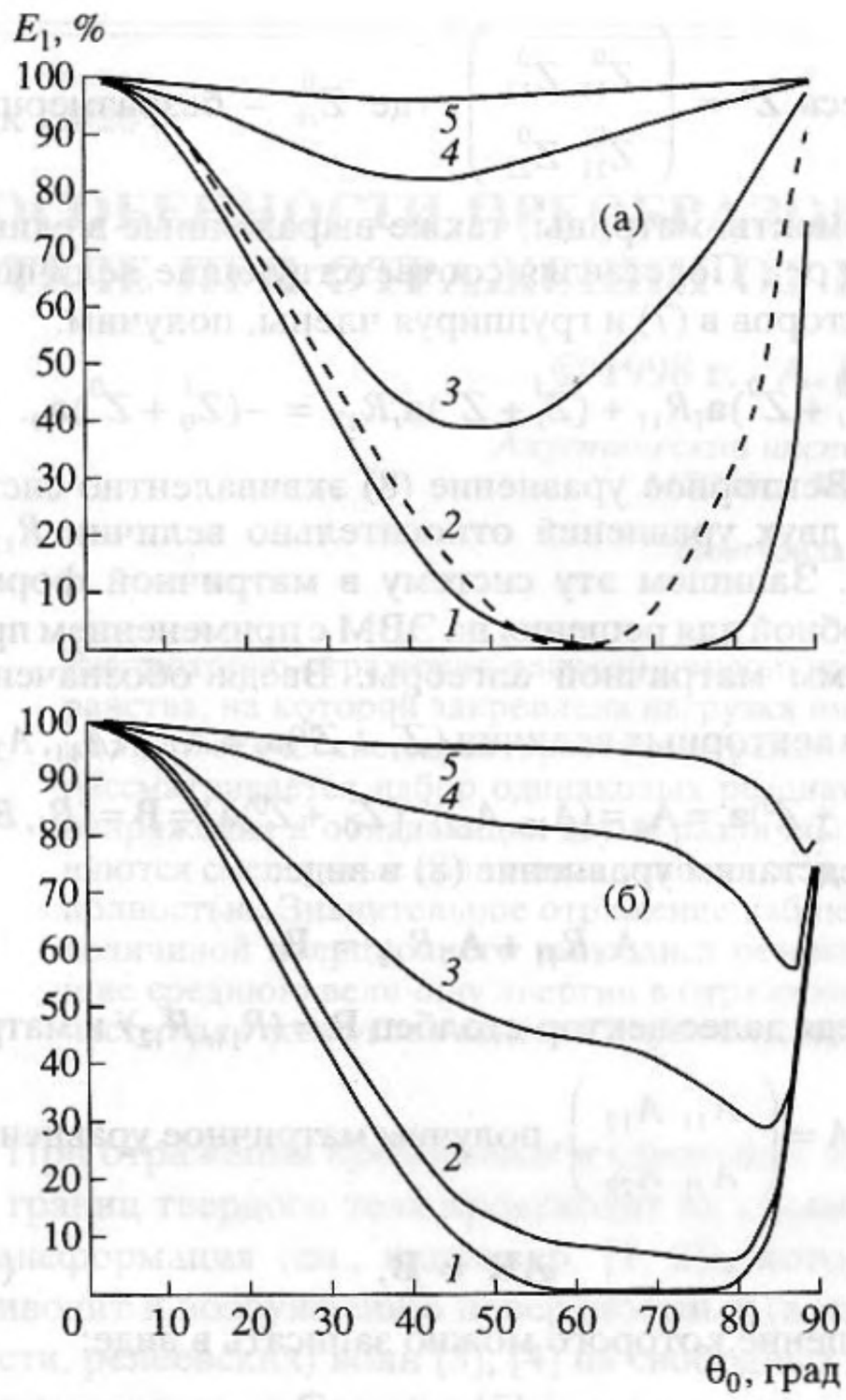

Рис. 1. а – угловая зависимость E_l для различных величин $|Z_{22}^0|$. *1* – $|Z_{22}^0| = 0$; *2* – $|Z_{22}^0| \longrightarrow \infty$, $|Z_{11}^0| \longrightarrow \infty$; *3* – $|Z_{22}^0| = 0.3$; *4* – $|Z_{22}^0| = 0.9$; *5* – $|Z_{22}^0| = 2.1$.

б – угловая зависимость E_l для различных величин $|Z_{11}^0|$. *1* – $|Z_{11}^0| = 0$; *2* – $|Z_{11}^0| = 0.3$; *3* – $|Z_{11}^0| = 0.9$; *4* – $|Z_{11}^0| = 2.1$; *5* – $|Z_{11}^0| = 4.5$.

В настоящей статье рассматривается импедансная нагрузка, матрица которой имеет диагональный вид:

$$Z^0 = \begin{pmatrix} Z_{11}^0 & 0 \\ 0 & Z_{22}^0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

т.е. нормальные и тангенциальные напряжения, которые эта нагрузка вызывает, определяются только одноименными смещениями. Такую нагрузку сравнительно легко реализовать на практике, и одна из таких реализаций будет описана ниже.

Аналитические формулы для этого типа нагрузки имеют вид:

$$\begin{aligned} R_{11} = (D^- + Z_{11}^0 Z_{22}^0 \cos(\theta_0 + \theta_1) + \\ + Z_{11}^0 b \cos\theta_0 - Z_{22}^0 \cos\theta_1)/(D^+ + \\ + Z_{11}^0 Z_{22}^0 \cos(\theta_0 - \theta_1) + \\ + Z_{11}^0 b \cos\theta_0 + Z_{22}^0 \cos\theta_1), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} R_{12} = (G + Z_{11}^0 Z_{22}^0 \sin 2\theta_0)/(D^+ + \\ + Z_{11}^0 Z_{22}^0 \cos(\theta_0 - \theta_1) + \\ + Z_{11}^0 b \cos\theta_0 + Z_{22}^0 \cos\theta_1), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$D^{\pm} = b \sin^4\theta_1 [4 \operatorname{ctg}\theta_0 \operatorname{ctg}\theta_1 \pm (1 - \operatorname{ctg}\theta_1)^2],$$

$$G = 4b \cos\theta_1 \sin^3\theta_1 (1 - \operatorname{ctg}^2\theta_1).$$

При $Z_{11}^0 = Z_{22}^0 = 0$ они переходят в формулы для отражения от свободной поверхности [4]. При $Z_{11}^0 \longrightarrow \infty$, $Z_{22}^0 \longrightarrow \infty$ формулы (для закрепленной границы) имеют вид:

$$R_{11} = \frac{\cos(\theta_0 + \theta_1)}{\cos(\theta_0 - \theta_1)}, \quad R_{12} = \frac{\sin 2\theta_0}{\cos(\theta_0 - \theta_1)}. \tag{15}$$

Рассмотрим влияние величин Z_{11}^0 и Z_{22}^0 на величину E_l в отдельности. При этом нужно иметь в виду, что характер импеданса (упругий или инерционный) влияет только на фазу величин R_{11} и R_{12}; величина $E_l(E_t)$ зависит только от абсолютных значений составляющих импеданса.

На рис. 1 приведена величина E_l (в процентах) в зависимости от угла падения продольной волны. Кривые рис. 1а построены для различных значений при $Z_{11}^0 = 0$, кроме кривой 2б. Величина коэффициента Пуассона $\nu = \nu^* = 0.2637$ соответствует обращению в нуль величины R_{11} внутри углового диапазона [4]. (На этом же рисунке дана величина E_l для закрепленной границы, рассчитанная по формуле (15).) Видно, что по мере увеличения нагрузки величина E_l возрастает и при $|Z_{22}^0| \longrightarrow \infty$ стремится к единице, т.е. падающая продольная волна отражается полностью, и ее трансформации в сдвиговую волну не происходит. Это явление хорошо известно [4] и соответствует одному из типов смешанных граничных условий:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad u_x = 0. \tag{16}$$

Аналогичное явление происходит при увеличении $|Z_{11}^0|$ ($Z_{22}^0 = 0$), что видно из рис. 1б. Случай $|Z_{11}^0| \longrightarrow \infty$ соответствует другому типу смешанных граничных условий:

$$\sigma_{zx} = 0, \quad u_z = 0, \tag{17}$$

при выполнении которых также нет трансформации продольной волны в сдвиговую. Изложенные результаты расчета следуют и непосредственно из формулы (13): при $|Z_{11}^0| \longrightarrow \infty$, $Z_{22}^0 = 0$ и при $|Z_{22}^0| \longrightarrow \infty$, $Z_{11}^0 = 0$, как легко видеть, $E_l = |R_{11}|^2 \longrightarrow 1$.

В промежуточных случаях при $Z_{11}^0 \longrightarrow \infty$, $Z_{22}^0 \neq 0$ и $Z_{22}^0 \longrightarrow \infty$, $Z_{11}^0 \neq 0$ получим соответственно

$$R_{11} = \frac{Z_{22}^0 \cos(\theta_0 + \theta_1) + b\cos\theta_0}{Z_{22}^0 \cos(\theta_0 - \theta_1) + b\cos\theta_0}, \quad R_{12} = \frac{Z_{22}^0 \sin 2\theta_0}{Z_{22}^0 \cos(\theta_0 - \theta_1) + b\cos\theta_0}, \tag{18}$$

$$R_{11} = \frac{Z_{11}^0 \cos(\theta_0 + \theta_1) - \cos\theta_1}{Z_{11}^0 \cos(\theta_0 - \theta_1) + \cos\theta_1}, \quad R_{12} = \frac{Z_{11}^0 \sin 2\theta_0}{Z_{11}^0 \cos(\theta_0 - \theta_1) + \cos\theta_1}. \tag{19}$$

Используя описанный принцип, можно за счет выбора соответствующей нагрузки реализовать почти полное отражение падающей продольной волны, т.е. практически устранить отражение сдвиговой волны. Поскольку волновое сопротивление продольных волн в твердых телах весьма велико, то для создания большой нагрузки можно использовать резонансные системы, которые на своих резонансных частотах могут обеспечить ее необходимую величину.

Одним из примеров таких модельных систем являются механические резонаторы типа "упругость–масса", составленные из упругих резиновых прокладок малого кругового или квадратного сечения и массивных накладок той же площади. Предполагается, что однотипные резонаторы распределены на свободной границе полупространства равномерно, на расстоянии друг от друга много меньшем длины сдвиговой волны, так что их реакцию можно характеризовать однородным локальным импедансом. Такие резонаторы применялись в ряде работ, например, в качестве поглощающих элементов [10, 11] или "антивибраторов" [12]. Их специфика состоит в том, что они обладают резонансными свойствами при двух поляризациях смещений – нормальном и тангенциальном – по отношению к плоскости прокладки. На это обстоятельство было впервые указано в работе [13], в которой рассматривалось применение таких резонаторов для искривленной поверхности.

Резонансные частоты такого резонатора определяются соотношениями:

$$\omega_{0t} = (\mu_0/md)^{1/2}, \quad \omega_{0n} = (\alpha\mu_0/md)^{1/2}, \tag{20}$$

где ω_{0t} и ω_{0n} – резонансные частоты для тангенциальных и нормальных колебаний соответственно, m – удельная масса накладки (на единицу площади), d – высота резиновой прокладки, μ_0 – модуль сдвига резины, $\alpha\mu_0$ – эффективный модуль прокладки, выраженный через коэффициент "ужесточения" α. Величина α определяется соотношением между толщиной прокладки d и ее характерным поперечным размером l [14] и может изменяться в весьма широких пределах. Так, при $d > l$ эффективный модуль прокладки (фактически столбика) равен модулю Юнга $E = 3\mu_0$ ($\alpha = 3$); при $d \ll l$ модуль $E \longrightarrow \lambda_0 + 2\mu_0$, т.е. стремится к модулю продольной волны. Так как для резины $\mu_0 \ll \lambda_0$, то максимальное значение $\alpha = \lambda_0/\mu_0$ может принимать значения порядка 10^2–10^4. Поскольку $\omega_{0n} = \sqrt{\alpha}\,\omega_{0t}$, то отношение ω_{0n}/ω_{0t} может изменяться от $\sqrt{3}$ до значений порядка 10–100. В рамках принятой модели резонаторов предполагаем, что внутренние потери достаточно малы, так что ими можно пренебречь и считать равными нулю.

С учетом изложенного, импеданс нагрузки Z^0, как уже упоминалось выше, будет выражаться диагональной матрицей со следующими элементами:

$$Z_{11}^0 = Z_n, \quad Z_{22}^0 = Z_t, \quad Z_{12}^0 = Z_{21}^0 = 0. \tag{21}$$

Здесь Z_n и Z_t – нормальный и тангенциальный импедансы резонатора соответственно, которые могут быть записаны в виде [13]:

$$Z_n = \frac{iX\Omega}{1 - \Omega^2/\alpha}, \quad Z_t = \frac{iX\Omega}{1 - \Omega}, \tag{22}$$

где $\Omega = \omega/\omega_{0t}$ – безразмерная частота, $X = \omega_{0t} m s_0/\rho c_1$ – безразмерный инерционный импеданс резонатора на его нижней резонансной частоте, приходящийся на единицу площади границы тела, s_0 – относительная площадь, занятая резонатором. Величину X можно представить в другом виде: $X = \omega_{0t} M/\rho c_1$, где $M = m s_0$ – масса резонатора, приходящаяся на единицу площади. В этих обозначениях резонансные частоты определяются равенствами $\Omega_t = 1$, $\Omega_n = \sqrt{\alpha}$.

Перейдем к рассмотрению результатов расчета величины E_l для импеданса нагрузки, определяемого в соответствии с выбранной моделью

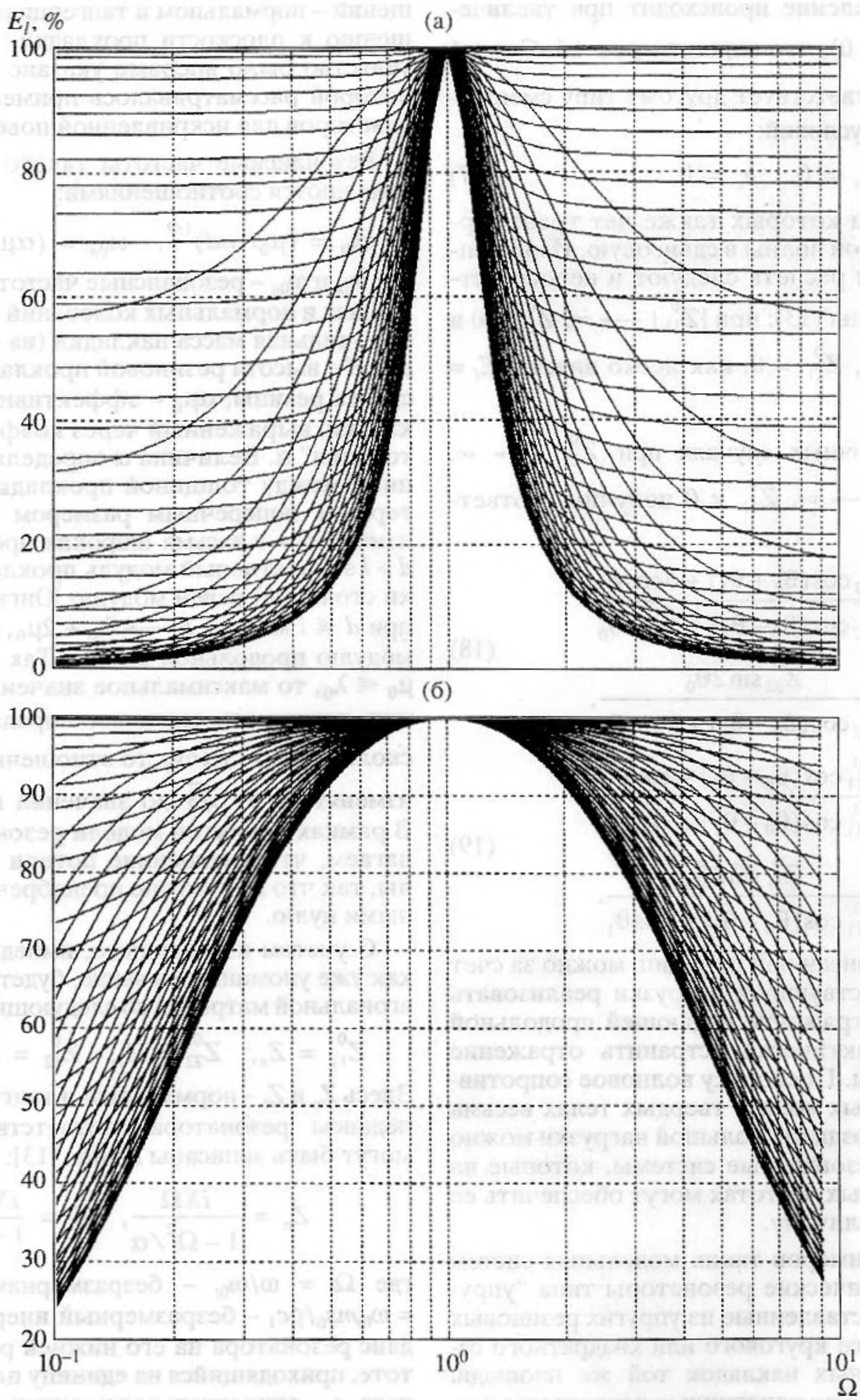

Рис. 2. Частотная зависимость E_l для $Z^0 = Z_t$, $X = 0.2$ (а), $X = 2$ (б).

формулами (21) и (22). Рассмотрим вначале нагрузку $Z^0 = Z_t$ (при $Z_l = 0$) с целью иллюстрации изложенного выше принципа управления величиной E_l. При этом необходимо иметь в виду, что, поскольку Z^0 в нашем случае зависит от частоты, то E_l будет зависеть от двух параметров – угла падения и частоты. Кроме того, существенным параметром является величина X.

На рис. 2 представлена зависимость E_l от безразмерной частоты Ω для различных углов падения (отдельные кривые) при значениях параметра $X = 0.2$ (а) и $X = 2$ (б). Из рисунков видно, что можно выделить некоторую огибающую, имеющую вид резонансной кривой, ниже которой значения E_l не опускаются при всех углах $90° \le \theta_0 \le 0$. При $\Omega = 1$ (резонансная частота) величина $E_l = 1$. Ширина полосы частот эффективного отражения продольных волн существенно зависит от параметра X, характеризующего величину импеданса резонатора по обе стороны от резонансной частоты, (чем больше эта величина, тем шире полоса). Можно получить формулу для ширины полосы частот, исходя из выражения для величины $|Z_t|^2$, следующего из формулы (13):

$$|Z_t|^2 = \frac{b}{\cos^2\theta_1(1-E_l)}[E_l(D^+)^2 - (D^-)^2]. \qquad (23)$$

Определим ширину полосы как диапазон, в котором $E_l \ge 0.5$. Из рис. 1а видно, что $\min E_1$ для этих значений наблюдается при $\theta_0 \approx 45°$. Подставляя значения $E_l = 0.5$, $\theta_0 = 45°$ и b в правую часть (23), получим некоторую величину, которую обозначим через a^2 (ее точное значение в данном случае интереса не представляет). Уравнение (23), с учетом (22), принимает вид:

$$\left(\frac{\Omega X}{1-\Omega^2}\right)^2 = a^2. \qquad (24)$$

Это уравнение эквивалентно двум уравнениям, учитывающим знак выражения в скобках:

$$\frac{\Omega_- X}{1-\Omega_-^2} = a, \text{ при } \Omega < 1,$$

$$\frac{\Omega_+ X}{1-\Omega_+^2} = -a, \text{ при } \Omega > 1.$$

Для этих величин получаем два уравнения:

$$\Omega_\pm^2 \mp 2\gamma\Omega_\pm - 1 = 0,$$

где $2\gamma = X/a$. Их решения дают значения (положительные) частот, при которых $E_l = 0.5$:

$$\Omega_\pm = \pm\gamma + \sqrt{1+\gamma^2}.$$

Ширина полосы Δ определяется соотношением:

$$\Delta = \Omega_+ - \Omega_- = 2\gamma = X/a,$$

т.е. ширина полосы пропорциональна инерционной нагрузке резонатора на его резонансной частоте. Относительная ширина полосы

$$\delta = \Omega_+/\Omega_- = (\gamma + \sqrt{1+\gamma^2})^2.$$

Подобные результаты получаются и для $Z^0 = Z_n$ (при $Z_t = 0$), что можно видеть из рис. 3, на котором представлены аналогичные данные при тех же значениях X, что и на рис. 1; параметр α взят равным 9, т.е. резонансная частота $\Omega_n = 3$. Ширина полосы в этом случае получается несколько больше, чем на рис. 2, так как вблизи этой частоты величина $|Z_n|$ в $\sqrt{\alpha}$ раз больше величины $|Z_t|$ вблизи ее резонансной частоты $\Omega_t = 1$. Однако получить простое выражение для ширины полосы в этом случае не представляется возможным.

При переходе к рассмотрению совокупного проявления резонансов можно предполагать значительное расширение полосы эффективного отражения продольной волны. Эта полоса должна располагаться между частотами Ω_t и Ω_n, поскольку на этих частотах величина $E_l = 1$, может быть близка к единице. Это, как следует из формул (18) и (19), происходит при малых значениях $|Z_{11}^0| = |Z_n|$ и $|Z_{22}^0| = |Z_t|$ соответственно, что достигается, прежде всего, при $X \ll 1$. Это подтверждается данными рис. 4, на которых аналогично рис. 2, 3 приведена частотная зависимость величины E_l, для значений $X = 0.2$ и $X = 0.7$. Величина $\Omega_n = 10$. Из рис. 4 видно, что с увеличением параметра X величина E_l, возрастает не только при $\Omega < \Omega_t$ и $\Omega > \Omega_t$, но и при $\Omega_t < \Omega < \Omega_n$; однако при этом на резонансных частотах она снижается.

Мерой эффективности преобразования волн может служить значение E_l, усредненное по диапазонам частот и углов падения. Эту величину можно записать в виде:

$$\bar{E}_l = \frac{1}{MN}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} E_l(\Omega_m, \theta_{0n}),$$

где N и M – число значений углов падения и частот, изменяющихся в пределах $0° < \theta_0 < 90°$, $\Omega_t < \Omega < \Omega_l$ соответственно. При расчете $\bar{E}_l$ для значений θ_0 использовалась линейная шкала, для значений Ω – логарифмическая, значения $M = N = 50$.

С использованием формулы (25) решалась задача оптимизации величины $\bar{E}_l$ за счет определения такого значения параметра $X = X_m$, которое доставляет равенство $\bar{E}_l = \max$. Эта задача первоначально решалась для значений $\Omega_t = 1$, $\Omega_n = 10$ с использованием стандартной программы. В результате получены следующие значения: $X_m = 0.4724$, $\bar{E}_l = 98.3923$ (в процентах). Частотная зависимость E_l для значения $X = X_m$ представлена на рис. 5.

Эти же данные, но для величины $E_t = 1 - E_l$, с целью наглядности зависимости не только от ча-

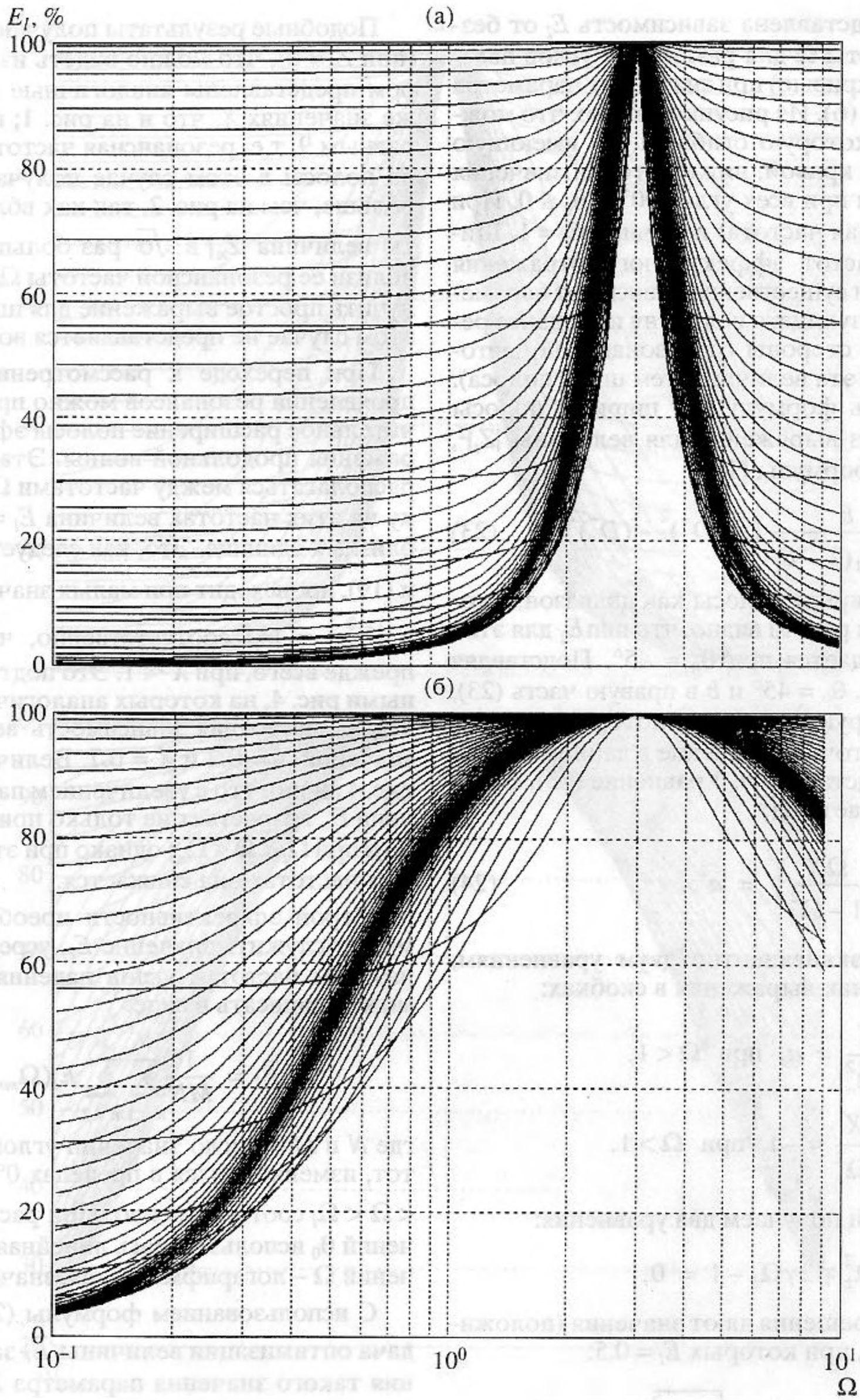

Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для $Z^0 = Z_n$, $X = 0.2$ (а), $X = 2$ (б).

стоты, но и от угла падения, приведены на рис. 6 в виде трехмерного графика, свидетельствующего о весьма малой величине E_t, в широком диапазоне изменения этих параметров.

При расширении полосы частот оптимизации (за счет большего разнесения резонансных частот резонатора) происходит увеличение величины E_l. Так для $\Omega_t = 1$, $\Omega_n = 100$ значения $X_m = 0.5091$, $\bar{E}_l =$

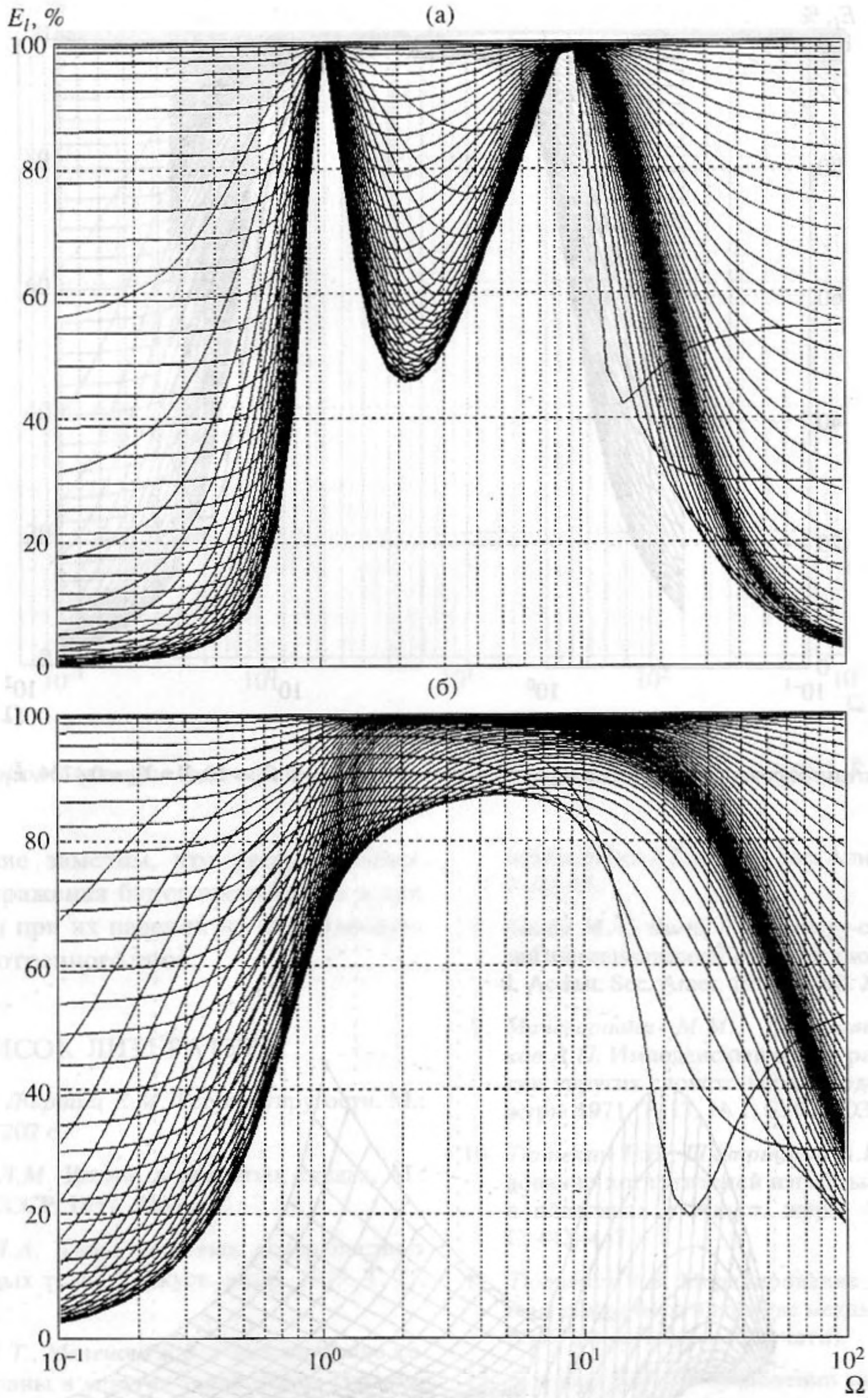

Рис. 4. Частотная зависимость E_l для резонатора с двумя поляризациями (Z_t и Z_n) $X = 0.2$ (а), $X = 0.7$ (б).

= 99.0980. Частотная характеристика для этого случая приведена на рис. 7.

Все вышеприведенные результаты относятся к значению коэффициента Пуассона $\nu = \nu^* = 0.2637$, хотя описанные явления будут проявляться и при всех других его значениях. При этом, как показывают расчеты, для $\nu > \nu^*$ величина $\bar{E}_l$ возрастает, а для $\nu < \nu^*$ убывает по сравнению с рассмотренным случаем.

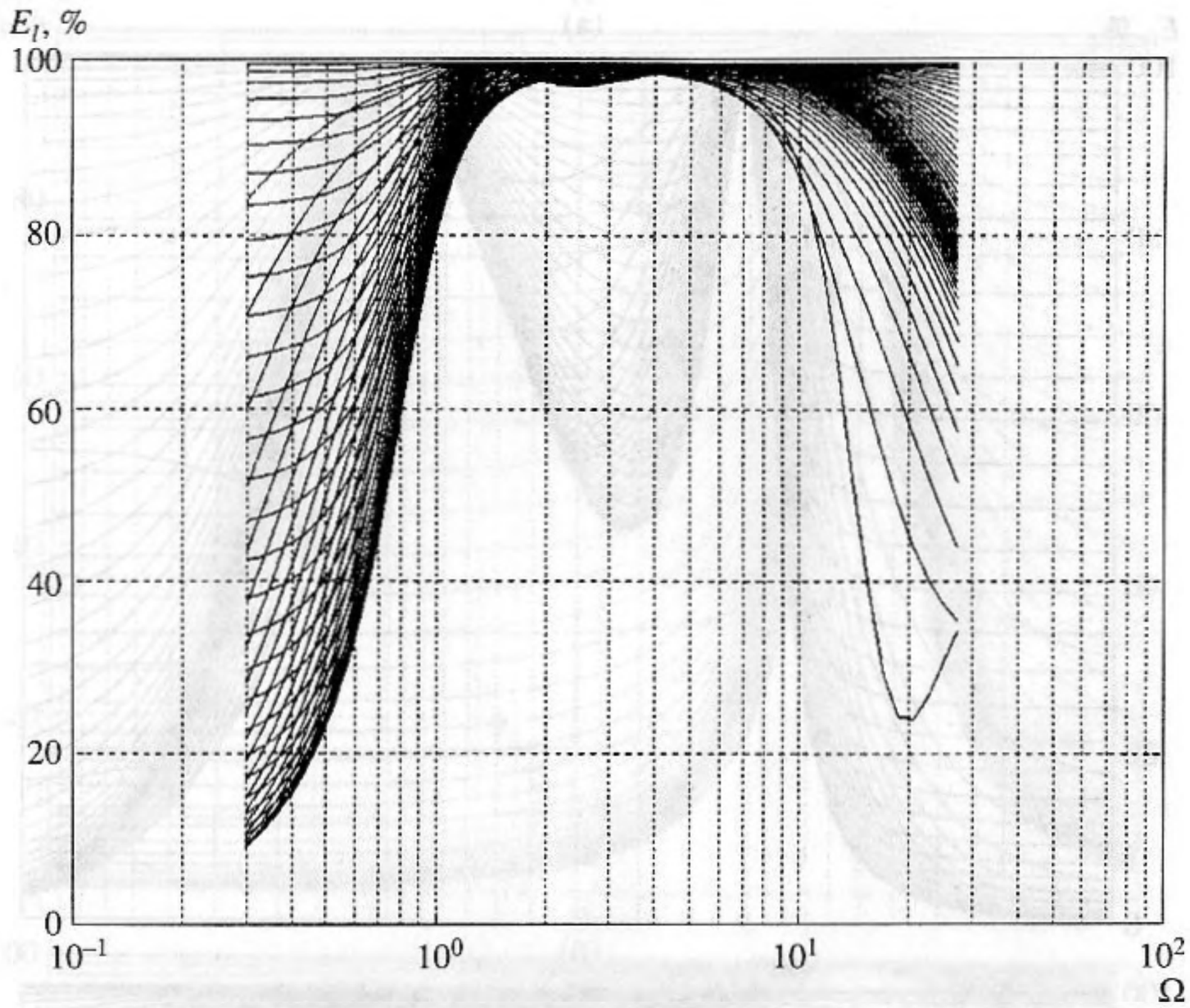

Рис. 5. Оптимизированная частотная характеристика E_l для $\Omega_t = 1$, $\Omega_n = 10$, $X = X_m = 0.4724$, $\bar{E}_l = 98.3923$.

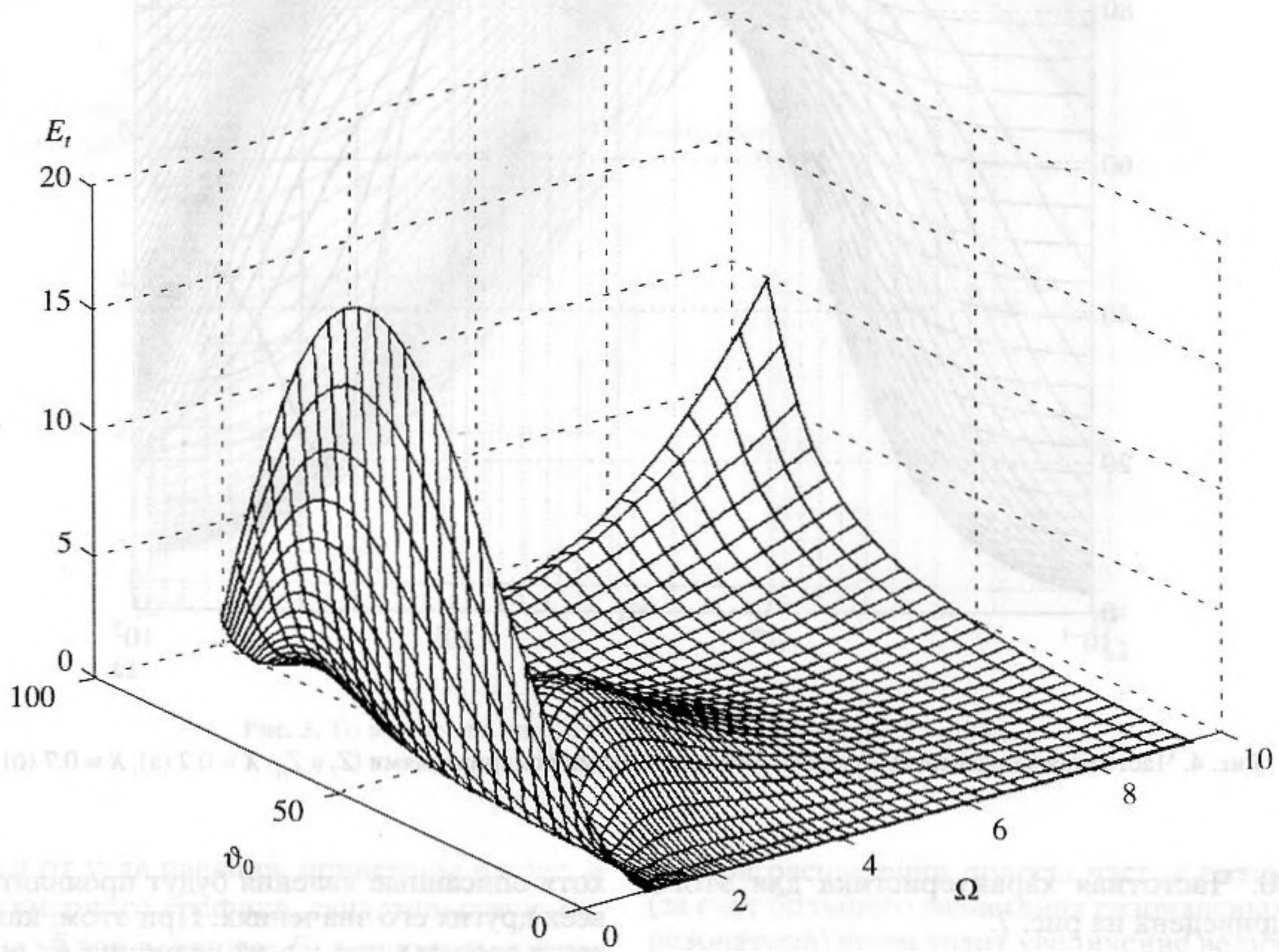

Рис. 6. Частотно-угловая оптимизированная характеристика E_t, $X = X_m = 0.4724$, $E_t = 1.6077$.

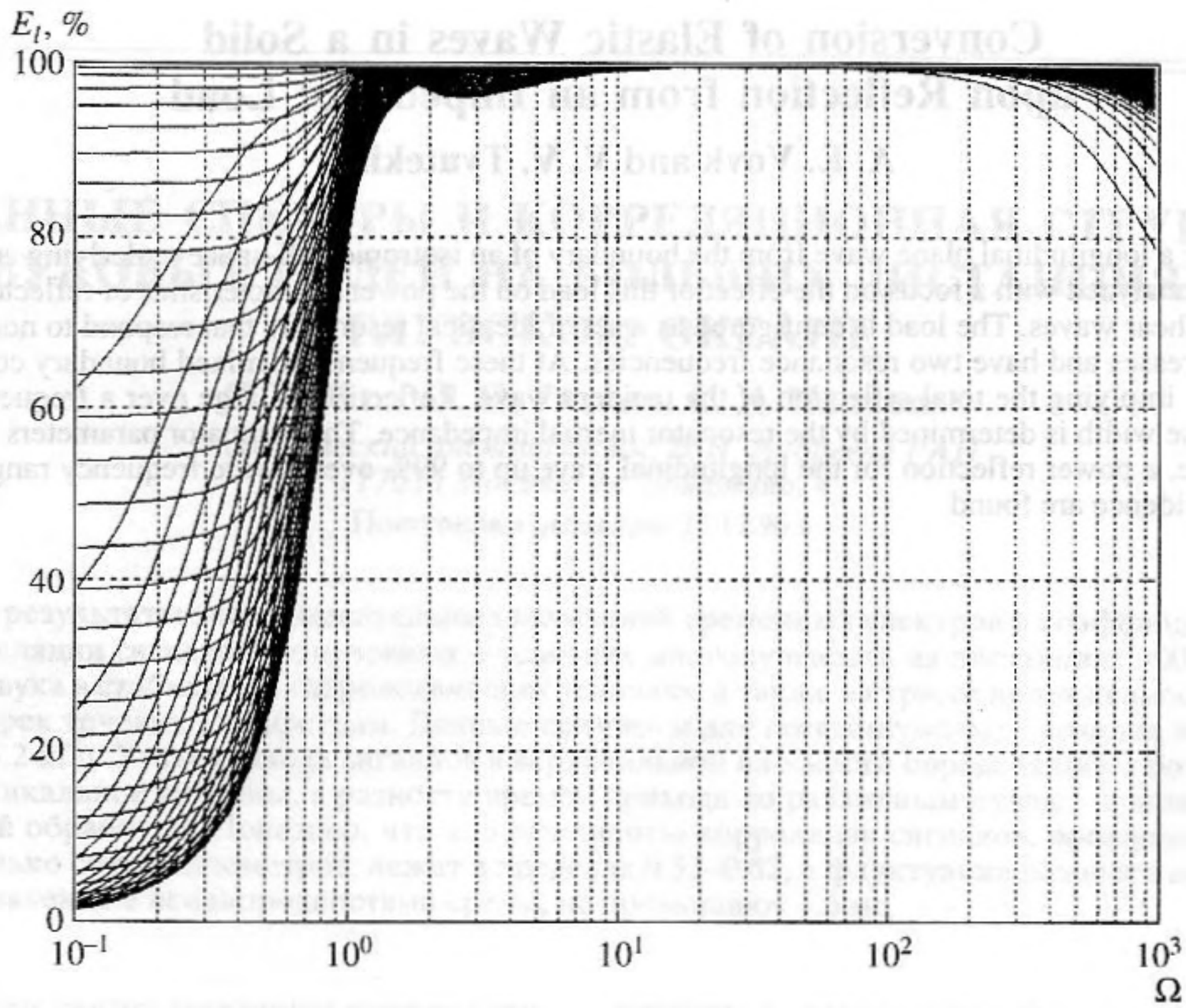

Рис. 7. Оптимизированная частотная характеристика E_l для $\Omega_t = 1$, $\Omega_n = 100$, $X = X_m = 0.5091$, $\bar{E}_l = 99.0980$.

В заключение заметим, что рассмотренные особенности отражения будут проявляться и для сдвиговых волн при их падении на импедансную нагрузку рассмотренного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 202 с.
2. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 520 с.
3. *Викторов И.А.* Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 1. С. 1–17.
4. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
5. *Stoneley R.* The elastic waves in the interface of separation of two solids // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1924. V. 106. № 732. P. 416–429.
6. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1917. V. 93. № 648. P. 114–128.
7. *Bianco B., Cambroso A., Tommasi T.* On the boundary conditions for acoustic waves at a solid–solid or fluid–solid interface // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 95. № 1. P. 40–45.
8. *Ainslie M.A., Burns P.W.* Energy-conserving reflection and transmission coefficients for a solid–solid boundary // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 98. № 5. P. 2836–2841.
9. *Мачевариани М.М., Тютекин В.В., Шкварников А.П.* Импедансный метод расчета характеристик упругих слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1971. Т. 17. № 1. С. 97–103.
10. *Тютекин В.В., Шкварников А.П.* Синтез и исследование поглотителей изгибных волн в стержнях и пластинах // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 441–447.
11. *Тютекин В.В.* Моделирование звукопоглотителя, синтезируемого на основе механических резонаторов // Акуст. журн. (в печати).
12. *Клюкин И.И.* Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2. С. 213–219.
13. *Кашина В.И., Тютекин В.В.* Волноводная виброизоляция волн на криволинейных поверхностях // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 120–122.
14. *Ляпунов В.Т., Лавендел Э.Э., Шляпочников С.А.* Резиновые виброизоляторы. Справочник. Л.: Судостроение, 1988. 216 с.

Conversion of Elastic Waves in a Solid upon Reflection from an Impedance Load

A. E. Vovk and V. V. Tyutekin

Reflection of a longitudinal plane wave from the boundary of an isotropic half-space underlying an impedance load is analyzed with a focus on the effect of this load on the power characteristics of reflected longitudinal and shear waves. The load is configured as a set of identical resonators that respond to normal and tangential stresses and have two resonance frequencies. At these frequencies, mixed boundary conditions are satisfied, implying the total reflection of the incident wave. Reflection is large over a frequency substantial whose width is determined by the resonator inertial impedance. The resonator parameters that provide, average, a power reflection for the longitudinal wave up to 99% over a wide frequency range for all angles of incidence are found.