

УДК 534.232

МЕТОД РАСЧЕТА АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВНУТРИ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КАНАЛА С ПОТОКОМ

© 1998 г. О. А. Кремлева, С. З. Шкундин

Московский государственный горный университет
117935 Москва, Ленинский пр-т, 6

Поступила в редакцию 29.03.96 г.

В работе предложен метод приближенного решения задачи расчета акустического потенциала во внутренней области конечного цилиндрического волновода с кольцевым излучателем, помещенного в равномерный поток дозвуковой скорости, сонаправленный с осью волновода. Применение обобщенной матрицы рассеяния для учета дифракции на концах волновода и метода сшивания для нахождения коэффициентов трансформации нормальных мод позволяет получить решение в виде явной зависимости от частоты излучения, скорости потока, скорости звука в невозмущенной среде, длины и диаметра канала, высоты излучающего кольца.

Задача расчета акустического поля внутри конечного цилиндрического канала с потоком рассматривается нами в связи с разработкой акустического анемометра – прибора, реализующего фазовый метод акустической анемометрии [1]. Первичный преобразователь акустического анемометра представляет собой металлическую трубу длины L с внутренним радиусом b , в центре которой расположено акустически изолированное от корпуса пьезокерамическое кольцо-источник, так что внутренняя поверхность излучателя и трубы составляют единое целое и излучение происходит во внутреннюю область; на одинаковом расстоянии от концов канала находятся кольца-приемники. Анемометрический канал помещается в поток газа постоянной скорости $u \ll c$, сонаправленный с осью трубы, где c – скорость звука в спокойной среде, излучатель колеблется в радиальном направлении с постоянной частотой ω . Скорость потока определяется по разности фаз колебаний на приемниках в противоположных полуканалах.

Задача расчета звукового давления внутри анемометрического канала рассматривалась в [2]. При пренебрежении толщиной стенки трубы акустический потенциал внутри и вне канала в цилиндрических координатах $\Phi = \Phi(r, \theta, z, t) = \Phi(r, z) \exp(-i\omega t)$ описывается уравнением

$$\Delta \Phi + \left(k + iM \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \Phi = 0, \quad -\infty < z < \infty, \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=b} = \begin{cases} 0, & | -L/2 - z | > h, & -L < z < 0, \\ v, & | -L/2 - z | < h, \end{cases} \quad (2)$$

на внутренней стороне трубы и

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=b} = 0, \quad -L < z < 0$$

на внешней стороне, где $k = \omega/c$ – волновое число, $M = u/c$ – число Маха, v – амплитуда скорости поперечных колебаний кольца.

Решение задачи (1)–(2) может быть получено с помощью результатов работы [3], в которой решается задача излучения внутрь открытой цилиндрической трубы с потоком точечным источником методом Винера–Хопфа. В [2] таким образом рассчитано давление в канале закритического диаметра. В результате применения метода Винера–Хопфа, основанного на факторизации, к расчету поля в конечном волноводе ([3, 4]), задача сводится к системе интегральных уравнений, решение которой при большой волновой длине канала может быть заменено решением системы линейных алгебраических уравнений, количество которых зависит от числа распространяющихся мод. Вследствие сложности этого решения произвести расчеты для канала с несколькими модами представляется затруднительным. В [5–7] задача об излучении звука цилиндрической оболочкой конечной длины решается путем применения преобразований, приводящих к интегральным уравнениям, затем решаемым численно. В [5] – это интегральное

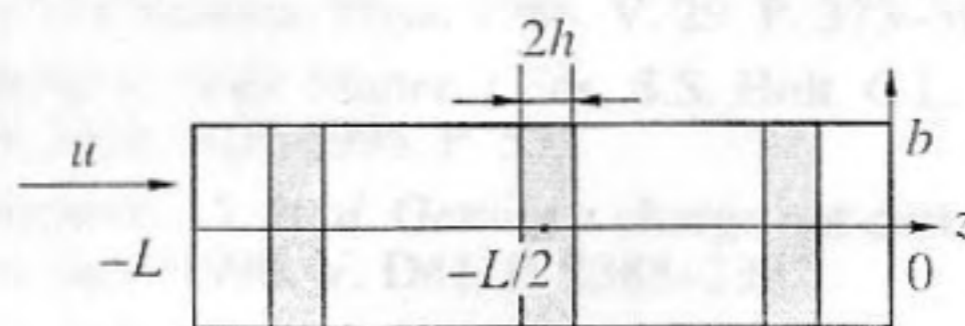


Рис. 1. Схематическое изображение анемометрического канала.

уравнение Фредгольма второго рода, в [6] – сингулярное уравнение первого рода на конечном промежутке, в [7] – интегральное уравнение, полученное с помощью использования свойств косинус-преобразования Фурье функций Бесселя.

В работах [3–7] находится поле как во внутренней, так и во внешней области. В данной работе предлагается метод нахождения акустического поля во внутренней области цилиндрического канала конечной длины с потоком, который позволяет получить приближенное решение без применения численных методов, в виде явной зависимости от размеров канала, частоты излучения и скорости потока, и заключается в суммировании прямых и отраженных на концах канала нормальных мод. При $kL \gg 1$, когда на одном конце канала можно пренебречь дифракцией поля, излученного во внешнюю область на противоположном конце, задача может быть сведена к вычислению коэффициентов отражения и трансформации нормальных мод на открытом конце полубесконечного волновода с потоком (метод обобщенной матрицы рассеяния) [8].

В [9] методом Фурье получена следующая формула для потенциала акустического поля в бесконечной цилиндрической трубе, создаваемого кольцевым поршнем ($|z| < h$), колеблющимся со скоростью v в отверстии стенки, в виде бесконечной суммы нормальных мод:

$$\Phi(r, z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2iv \sin(\xi_n^{\pm} h)}{b \theta_n \zeta_n \xi_n^{\pm} J_0'(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{b}\right) \exp(i \xi_n^{\pm} z), \quad (3)$$

знаки “+” и “-” соответствуют $z > h$ и $z < h$; $\xi_n^{\pm} = \frac{-Mk \pm \zeta_n}{\beta^2}$, $\beta^2 = 1 - M^2$, $\zeta_n = \left(k^2 - \beta^2 \left(\frac{\mu_n}{b}\right)^2\right)^{1/2}$, $\theta_0 = 2$, $\theta_n = 1$ ($n > 0$), J_0 – функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка, $J_0'(\mu_n) = 0$, $n = 0, 1, \dots$

Обозначим коэффициент трансформации нормальной моды с номером n в моду с номером m на правом конце $S_1(n, m)$. S_1 – матрица рассеяния с комплексными элементами [8], аналогично определим S_2 – матрицу рассеяния для левого конца. Если элементы вектора-столбца $\varphi_{\pm}^0 = (\varphi_{\pm 0}^0, \varphi_{\pm 1}^0, \dots)^T$ представляют собой коэффициенты разложения волны от источника по нормальным модам волновода (“+” справа, “-” слева от источника), то суммарное поле в трубе может быть описано формулой

$$\Phi(r, z) = g^{\pm} \varphi_{\pm}^0 + g^+ \left[\sum_{n=1}^{\infty} (S_1 S_2)^n \varphi_+^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (S_2 S_1)^n S_2 \varphi_-^0 \right] +$$

$$+ g^- \left[\sum_{n=0}^{\infty} (S_1 S_2)^n S_1 \varphi_+^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (S_2 S_1)^n \varphi_-^0 \right] \quad (4)$$

$$g^{\pm} = (g_0^{\pm}, g_1^{\pm}, \dots),$$

$$g_n^+ = \exp(i \xi_n^+(z+L)), \quad g_n^- = \exp(i \xi_n^- z),$$

где “+” соответствует $z > -L/2 + h$, “-” – $z < -L/2 - h$.

В результате удается представить решение в виде рядов Неймана, содержащих матрицы бесконечного порядка. Можно заменить бесконечные матрицы конечными, учитывая только распространяющиеся моды (т.е. моды с действительными волновыми числами). Таким образом, задача сводится к нахождению коэффициентов отражения и трансформации распространяющихся нормальных мод на открытом конце полубесконечного волновода с потоком.

Заметим, что выражения для коэффициентов трансформации находятся методом Винера-Хопфа в [3], а также в [10] для канала без потока. Нами для этой цели использован метод сшивания [8], позволяющий получить более простое решение. Сравнительный анализ метода Винера-Хопфа и метода сшивания (метода разложения поля по модам) на примере волновода, ограниченного двумя бесконечными параллельными плоскостями и разделяющей их полуплоскостью, можно найти в [11].

В методе сшивания область распространения акустических волн разбивается на несколько частей, в каждой из которых акустический потенциал представляется в виде бесконечной суммы нормальных мод, соответствующих данной частичной области. На границе областей приравниваются давление и скорость акустического возмущения. В результате получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая для областей специального вида может быть решена аналитически.

Для нахождения акустического поля волн, отраженных на открытом конце волновода, будем считать, что полубесконечный канал радиуса b помещен соосно в бесконечную трубу с жесткими стенками радиуса $a > b$ с равномерным потоком газа со скоростью u вдоль оси z (рис. 2). В дальнейшем, увеличивая радиус внешней трубы, в пределе перейдем к решению для полубесконечной трубы в открытом пространстве.

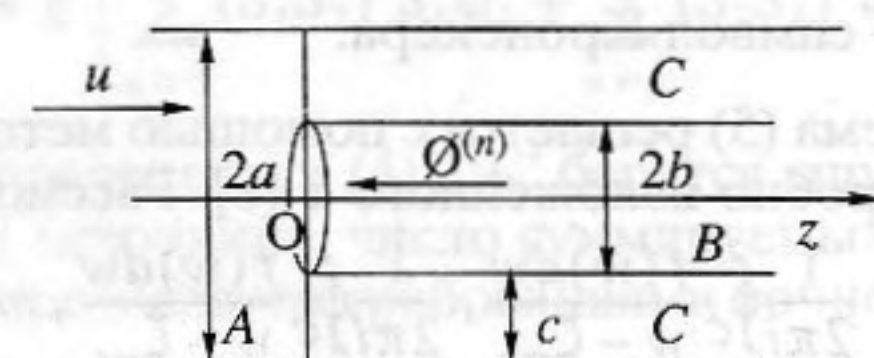


Рис. 2. Модель для расчета коэффициентов отражения и трансформации нормальных мод.

Пусть на открытый конец внутренней трубы из области В падает акустическая волна, представляющая собой нормальную моду с номером s , заданную формулой

$$\Phi^{(0)} = J_0\left(\frac{\mu_s \rho}{b}\right) \exp(i\xi_{sb}^- z), \quad s = 0, 1, \dots$$

Представим акустическое поле, возникающее в результате падения волны на открытый конец, в виде разложения по нормальным модам

$$\Phi = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{a}\right) \exp(i\xi_{na}^- z), & 0 < \rho < a, z < 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{b}\right) \exp(i\xi_{nb}^+ z), & 0 < \rho < b, z > 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} C_n Z_n\left(\frac{\mu_n \rho}{c}\right) \exp(i\xi_{nc}^+ z), & b < \rho < a, z > 0, \end{cases}$$

где $Z_n = J_0(x) - J_0\left(\frac{\eta_n a}{c}\right) Y_0(x) / Y_0\left(\frac{\eta_n a}{c}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, ..., $Z_0(x) \equiv 0$.

При этом функция $\Phi = \Phi(\rho, z)$ будет удовлетворять волновому уравнению (1), краевым условиям равенства нулю скорости звукового возмущения на стенках внутренней и внешней трубы и условию излучения при $|z| \rightarrow \infty$.

Выполняя процедуру сшивания и используя свойство ортогональности функций Бесселя, с помощью элементарных преобразований можно получить бесконечную систему уравнений для определения $A_n = A_n^* \frac{\mu_n b}{a} J_1\left(\frac{\mu_n b}{c}\right)$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{\zeta_{na} - \zeta_{mb}} = -\delta_m^s \zeta_{sb} (1 - A_0) b^2 J_0(\mu_s) / \beta^2, \\ m = 0, 1, \dots, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{\zeta_{na} - \zeta_{mc}} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \\ A_0 = b^2/a^2, \quad s = 0, \quad A_0 = 0, \quad s > 0, \end{cases} \quad (5)$$

где δ_m^s – символ Кронекера.

Система (5) решается с помощью метода вычетов, подробно изложенного в [8]. Рассмотрим интегралы $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w) dw}{w - \zeta_{mb}}$, $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w) dw}{w - \zeta_{mc}}$, $m = 1, 2, \dots$, ..., $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w) dw}{w - k}$, где контур С есть окружность

бесконечно большого радиуса в плоскости комплексного переменного w , обходящая в направлении против часовой стрелки, и

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{\zeta_{sb} b^2 J_0(\mu_s)}{\beta^2} \frac{w - k}{\zeta_{sb} - k} \times \\ &\times \exp\left\{ \frac{-iw + i\zeta_{sb}}{\beta\pi} \left(b \ln \frac{b}{a} + c \ln \frac{c}{a} + \frac{b}{s} \right) \right\} \times \\ &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{w}{\zeta_{nb}}}{1 - \frac{\zeta_{sb}}{\zeta_{nb}}} \exp\left(\frac{-i(w - \zeta_{sb})b}{\beta n \pi} \right) \times \\ &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{w}{\zeta_{nc}}}{1 - \frac{\zeta_{sb}}{\zeta_{nc}}} \exp\left(\frac{-i(w - \zeta_{sb})c}{\beta n \pi} \right) \times \\ &\times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{w}{\zeta_{na}}}{1 - \frac{\zeta_{sb}}{\zeta_{na}}} \exp\left(\frac{-i(w - \zeta_{sb})a}{\beta n \pi} \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

Имеют место равенства

$$A_m = \operatorname{Res}_{w = \zeta_{ma}} f(w),$$

$$B_m = \frac{-\beta^2}{\zeta_{mb} b^2 J_0(\mu_m)} f(\zeta_{mb}), \quad m = 1, 2, \dots$$

Можно показать, что в пределе при $a, c \rightarrow \infty$, $a - c = b$

$$\begin{aligned} f(w) &\xrightarrow[a=c=b]{a, c \rightarrow \infty} \bar{f}^{(s)}(w), \\ \bar{f}^{(s)}(w) &= \frac{\zeta_{sb} b^2 J_0(\mu_s)}{\beta^2} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{\zeta_{nb}}\right) \exp\left(\frac{iwb}{\beta n \pi}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta_{sb}}{\zeta_{nb}}\right) \exp\left(\frac{i\zeta_{sb} b}{\beta n \pi}\right)} \times \\ &\times \exp\left\{ \frac{i(w - \zeta_{sb})b}{\pi\beta} \left(C - 1 - \ln \frac{2\pi\beta}{kb} - \frac{i\pi}{2} - \frac{1}{s} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{\pi\beta} \left[\sqrt{k^2 - w^2} \ln \left(\frac{-iw - \sqrt{k^2 - w^2}}{ik} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{k^2 - \zeta_{sb}^2} \ln \left(\frac{-i\zeta_{sb} - \sqrt{k^2 - \zeta_{sb}^2}}{ik} \right) \right] \right\} + I(w) - I(\zeta_{sb}), \end{aligned}$$

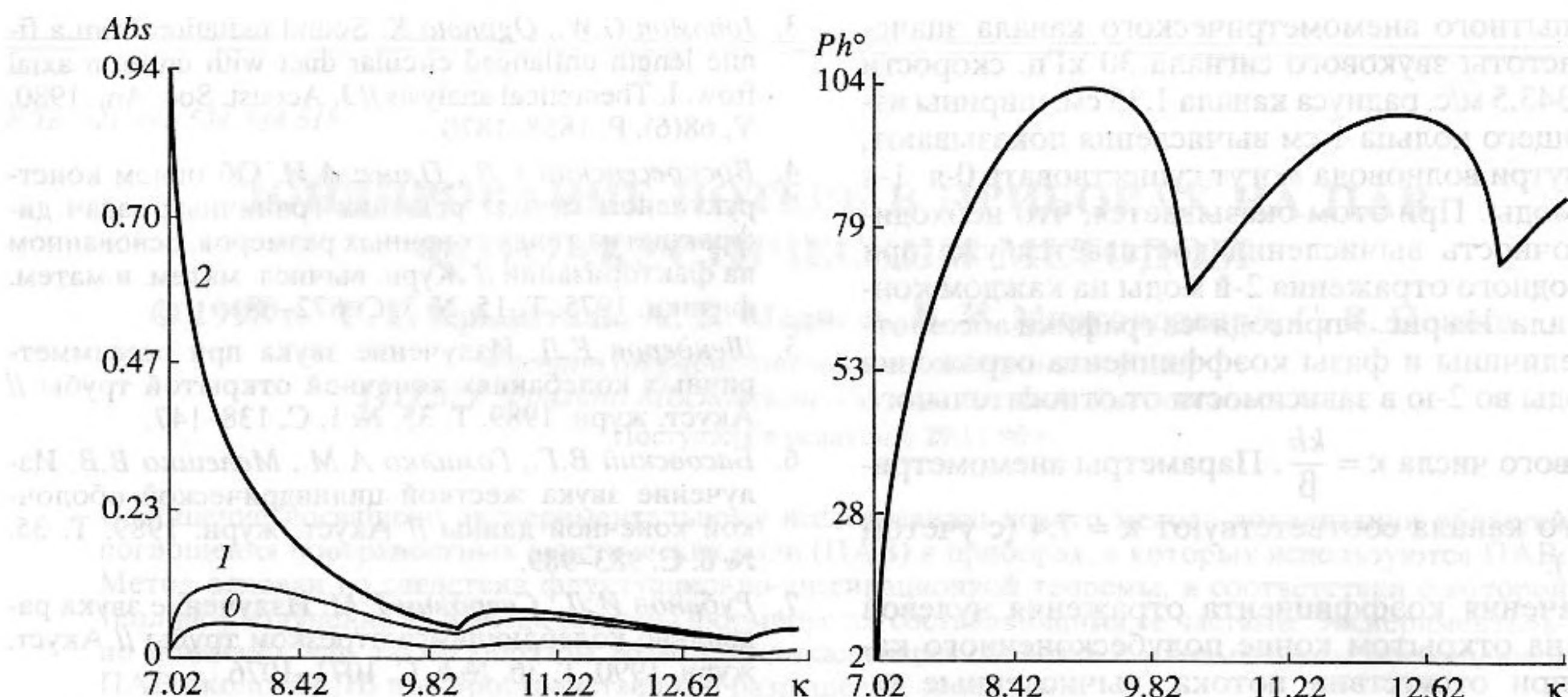


Рис. 3. Модули коэффициента коэффициентов трансформации 2-й моды в 1-ю и 0-ю и фаза коэффициента отражения 2-й моды на открытом конце полубесконечного волновода радиуса b с потоком в зависимости от величины $\kappa = \frac{kb}{\beta}$.

где $s > 0$, $I(w) = \frac{b}{\beta\pi} \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{iw}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \right) \Omega \left(\frac{b}{\beta}, \lambda \right) d\lambda$,

$\Omega(x, \lambda) = 1 - \frac{2}{x\pi\lambda(J_1^2(x\lambda) + Y_1^2(x\lambda))}$, C – постоянная Эйлера.

Для $s = 0$ аналогично может быть получена формула

$$\begin{aligned} \bar{f}^{(0)}(w) = & \frac{\zeta_{0b} b \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{\zeta_{nb}} \right) \exp \left(-\frac{iwb}{\beta n\pi} \right)}{\beta^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{\zeta_{nb}} \right) \exp \left(-\frac{ikb}{\beta n\pi} \right)} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{i(w-k)b}{\pi\beta} \left(C - 1 - \ln \frac{2\pi\beta}{kb} - \frac{i\pi}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{b}{\pi\beta} \sqrt{k^2 - w^2} \ln \left(\frac{-iw - \sqrt{k^2 - w^2}}{ik} \right) + I(w) - I(k) \right\}. \end{aligned}$$

Коэффициенты отражения и трансформации s -й нормальной моды в полубесконечном волноводе с потоком могут быть вычислены по формуле

$$B_m^{(s)} = \frac{-\beta^2}{\zeta_{mb} b^2 J_0(\mu_m)} \bar{f}^{(s)}(-\zeta_{mb}); \quad s, m = 0, 1, \dots \quad (6)$$

где $\bar{f}^{(s)}(w)$ – функция, соответствующая падению s -й нормальной моды.

Таким образом, предлагается следующий способ расчета акустического поля в конечном волноводе круглого сечения с потоком. Определяем количество распространяющихся в канале нормальных мод и их амплитуды с помощью формулы (3). Получаем вектор $\Phi_{\pm}^0 = (\Phi_{\pm 0}^0, \dots, \Phi_{\pm N}^0)^T$, где

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm n}^0 = & \frac{2i\nu \sin(\xi_n^\pm h)}{b\theta_n \zeta_n \xi_n^\pm J_0''(\mu_n)} J_0 \left(\frac{\mu_n r}{b} \right) \exp \left(i\xi_n^\pm \left(\frac{L}{2} \right) \right), \\ & n = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

Затем вычисляем при помощи формулы (6) элементы матриц $S_1 = \{ B_m^{(n)} \exp(i\xi_n^+ L), m, n = 0, \dots, N \}$ и $S_2 = \{ B_m^{(n)} \exp(i\xi_n^- (-L)), m, n = 0, \dots, N \}$ и рассчитываем акустическое поле по формуле

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = & g^\pm \Phi_{\pm}^0 + \\ & + g^+ \left[\sum_{n=1}^K (S_1 S_2)^n \Phi_+^0 + \sum_{n=0}^K (S_2 S_1)^n S_2 \Phi_-^0 \right] + \\ & + g^- \left[\sum_{n=0}^K (S_1 S_2)^n S_1 \Phi_+^0 + \sum_{n=1}^K (S_2 S_1)^n \Phi_-^0 \right], \end{aligned}$$

где g^\pm определены в (4), “+” берется справа, “-” – слева от источника, число суммируемых отражений K определяется требованиями точности.

Данный метод используется нами для расчета звукового давления в реальном анемометрическом канале. Для соответствующих характери-

кам опытного анемометрического канала значений частоты звукового сигнала 30 кГц, скорости звука 343.5 м/с, радиуса канала 1.35 см, ширины излучающего кольца 1 см вычисления показывают, что внутри волновода могут существовать 0-я, 1-я и 2-я моды. При этом оказывается, что необходимая точность вычислений достигается уже при учете одного отражения 2-й моды на каждом конце канала. На рис. 3 приводятся графики абсолютной величины и фазы коэффициента отражения 2-й моды во 2-ю в зависимости от относительного волнового числа $k = \frac{kb}{\beta}$. Параметры анемометрического канала соответствуют $k = 7.4$ (с учетом $M \ll 1$).

Значения коэффициента отражения нулевой моды на открытом конце полубесконечного канала при отсутствии потока, вычисленные по формуле (6) для различных kb , согласуются с результатами в [10] и [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкундин С.З., Лашин В.Б. Фазовый способ акустической анемометрии // Метрология. 1990. № 7. С. 39–43.
2. Шкундин С.З. Физико-техническое обоснование акустического контроля скоростей газоздушных потоков в системах обеспечения безопасности шахт: Дис. ... докт. техн. наук: 05.15.11, 05.26.01/МГИ. М., 1990. С. 313.

3. Johnston G.W., Ogimoto K. Sound radiation from a finite length unflanged circular duct with uniform axial flow. I. Theoretical analysis // J. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 68(6). P. 1858–1870.
4. Воскресенский Г.В., Плисс А.И. Об одном конструктивном методе решения граничных задач дифракции на телах конечных размеров, основанном на факторизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1975. Т. 15. № 3. С. 672–681.
5. Шендеров Е.Л. Излучение звука при осесимметричных колебаниях конечной открытой трубы // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 138–147.
6. Басовский В.Г., Гомилко А.М., Мелешко В.В. Излучение звука жесткой цилиндрической оболочкой конечной длины // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 6. С. 983–989.
7. Рубанов И.Л., Свердлин Г.М. Излучение звука радиально колеблющимся отрезком трубы // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 6. С. 1071–1076.
8. Миттра Р., Ли С.В. Аналитические методы теории волноводов / Пер. с англ. А.И. Плисса. Под ред. Г.В. Вознесенского. М., 1974. С. 327.
9. Лапин А.Д. Об излучении и распространении звука в цилиндрической трубе при наличии потока. // Акустико-аэродинамические исследования: Сборник / Под ред. Римского-Корсакова. М., 1975. С. 57–60.
10. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. С. 92–101.
11. Haj-Hariri H. Generalized modal expansion: A Wiener-Hopf problem // J. Acoust. Soc. Am. 1994. 96(6). P. 3039–3048.

A Method for Calculating Acoustic Fields in a Finite Cylindrical Channel with a Flow

O. A. Kremleva and S. Z. Shkundin

An approximate solution is presented to the problem of the acoustic potential inside a finite cylindrical waveguide with an annular radiator immersed in a uniform subsonic stream co-directional with the waveguide axis. It is based on the use of the generalized scattering matrix to take into account the diffraction at waveguide ends and the method of sewing to evaluate the conversion coefficients of normal modes. The solution evolves as an explicit function of the radiator frequency, stream velocity, velocity of sound in the unperturbed medium, channel length and diameter, and radiating ring height.