

УДК 534.26

## О СРАВНЕНИИ МОДЕЛЕЙ ДЕФЕКТОВ ПЛАСТИН В ГРАНИЧНО-КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ

© 1998 г. И. В. Андронов

Санкт-Петербургский государственный университет

198904 Санкт-Петербург, ул. Ульяновская, 1/1

Поступила в редакцию 12.03.97 г.

Предложены явно решаемые модели дефектов пластин, которые в отличие от классических учитывают размер дефекта. Проведено сравнение рассеянных полей на дефектах описываемых классическими точечными моделями и моделями, предложенными в статье. Обсуждены области применимости.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию процессов дифракции на тонкостенных упругих конструкциях, погруженных в акустическую среду, посвящено большое число публикаций. Анализ дифракционных эффектов наиболее прост в тех случаях, когда решение задачи может быть получено в явном виде. В связи с этим часто для моделирования дефектов или неоднородностей пластин и оболочек используют так называемые точечные модели [1–4]. Указанные модели формулируются в виде контактных условий, фиксируемых в средней точке рассеивателя (в данной работе рассматриваются задачи с трансляционной симметрией, сводящиеся к задачам на плоскости). Поскольку реально встречающиеся сочленения, трещины, ребра жесткости, и иные неоднородности имеют в ряде случаев хоть и малые, но все же конечные размеры, для всех точечных моделей может быть поставлен вопрос об области их применимости.

Этот вопрос недостаточно изучен. Отметим работу [7], в которой получена поправка на высоту выступающего в среду ребра жесткости и установлено, когда этой поправкой можно пренебречь. В [5] проанализирована задача дифракции на узкой трещине ширины  $2a$  в пластине, покрывающей однородное акустическое полупространство. Получены асимптотики диаграммы направленности расходящейся от трещины цилиндрической волны и установлено, что для тонких пластин ( $kh \ll 1$ , где  $k$  – волновое число в среде,  $h$  – толщина пластины) точечной моделью трещины можно пользоваться лишь при  $ka \ll \exp(-(kh)^{8/5})$ , то есть для экспоненциально узких трещин.

В данной работе для узкой трещины предлагается более точная модель, которая воспроизводит в рассеянном поле не только члены порядка  $O(1)$ , но и логарифмическую поправку по  $ka$ . Модель по-прежнему формулируется в виде некоторого набора условий, фиксируемых в точке, и

вследствие этого допускает представление явного решения в квадратурах. Рассматриваются также и некоторые другие модели неоднородностей.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Рассмотрим бесконечную упругую пластину, колебания которой описываются в рамках модели Кирхгофа. Однородная акустическая среда находится с одной стороны от пластины. Пусть на отрезке  $[-a, a]$  пластина отсутствует, а края двух полубесконечных пластин свободны. Колебания в системе возбуждаются некоторым бесконечно удаленным источником. Этот источник может располагаться в среде и породить плоскую акустическую волну или на пластине и генерировать изгибную волну. Для численного анализа мы ограничимся только первым случаем. Зависимость от времени принята в виде  $\exp(-i\omega t)$ .

Математическая постановка задачи записывается в виде следующих уравнений

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad y > 0, \quad (1)$$

$$D \frac{d^4 \xi}{dx^4} - \rho h \omega^2 \xi + u|_{y=0} = 0, \quad |x| > a, \quad (2)$$

$$u|_{y=0} = 0 \quad |x| < a, \quad (3)$$

$$\xi''(\pm 0) = 0 \quad \xi'''(\pm 0) = 0. \quad (4)$$

Кроме того, предполагаются выполненными условия Майкснера в окрестности точек  $(\pm a, 0)$ , а рассеянное поле удовлетворяющим условию излучения. В (1), (2) введены следующие величины:  $k = \omega/c$  – волновое число в акустической среде,  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $\rho$  и  $\rho_0$  – плотности материала пластины и акустической среды,  $h$  – толщина пластины. Для дальнейшего

исследования удобно ввести волновое число изгибных колебаний  $k_0$  и параметр  $\nu$

$$k_0 = \sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D}}, \quad \nu = \frac{\rho_0 \omega^2}{D}.$$

Пусть падающее поле является плоской волной

$$u_0 = \exp(ik(x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0)),$$

которая порождает отраженную волну

$$u_1 = R(\varphi_0) \exp(ik(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0))$$

с коэффициентом отражения

$$R(\varphi_0) = \frac{-\overline{L(\varphi_0)}}{L(\varphi_0)}, \tag{5}$$

$$L(\varphi_0) = ik \sin \varphi_0 (k^4 \cos^4 \varphi_0 - k_0^4) + \nu$$

и рассеянное поле  $u_3$ . На больших расстояниях от трещины формируется цилиндрическая волна с диаграммой  $\Psi(\varphi, \varphi_0)$  и две волны, сосредоточенные вблизи пластины. В [5] получена асимптотика диаграммы  $\Psi(\varphi, \varphi_0)$  по малому параметру  $ka$

$$\Psi(\varphi, \varphi_0) = \frac{i\nu k^2 \sin \varphi \sin \varphi_0}{\pi L(\varphi)L(\varphi_0)} \left\{ \frac{k^4}{D_4} \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi_0 - \frac{k^6}{D_6} \cos^3 \varphi \cos^3 \varphi_0 - \right. \tag{6}$$

$$\left. - \frac{\pi \nu M(\varphi)M(\varphi_0)}{\ln(ka/4) + \gamma - i\pi/2 + \pi J + \nu B_2^2/D_4} + \dots \right\}.$$

Здесь  $\gamma$  – постоянная Эйлера, и введены следующие обозначения

$$M(\varphi) = \frac{1}{\nu} (k^4 \cos^4 \varphi - k_0^4) + \frac{k^2 B_2}{D_4} \cos^2 \varphi,$$

$$D_j = \frac{1}{2\pi} \int e^{+i0} \frac{(i\mu)^j \sqrt{\mu^2 - k^2}}{l(\mu)} d\mu, \tag{7}$$

$$B_j = \frac{1}{2\pi} \int \frac{(i\mu)^j}{l(\mu)} d\mu, \quad J = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\mu}{l(\mu) \sqrt{\mu^2 - k^2}}. \tag{8}$$

Интегрирование в (7), (8) проводится вдоль вещественной оси  $\mu$ , при этом особенности фурье-символа  $l(\mu)$  граничного условия (2) на пластине (полюсы и точки ветвления) огибаются контуром в соответствии с принципом предельного поглощения.

Сравнение асимптотики (6) с точным выражением для диаграммы в задаче рассеяния на точечной трещине [2] показывает, что два старших члена в (6) отвечают точечной модели. Поправочный член имеет логарифмический порядок

малости и моделью [2] не воспроизводится. Однако, как установлено в [5], для тонких пластин этот член является старшим по параметру  $kh$ , и его учет необходим. Таким образом, возникает потребность модифицировать модель [2].

### 3. МОДЕЛЬ

При построении рассеянного поля  $u_3$  в гранично-контактных задачах акустики часто пользуются следующим приемом. Сначала строят общее решение  $U$ , то есть решение, которое удовлетворяет всем условиям задачи, кроме контактных. Это общее решение содержит некоторое число параметров, которые затем находятся из линейной системы порождаемой контактными условиями. В общем случае  $U$  удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta U + k^2 U = 0, & y > 0 \\ \left( \frac{d^4}{dx^4} - k_0^4 \right) \frac{\partial U}{\partial y} + \nu U = c_0 \delta(x) + c_1 \delta'(x) + \\ + c_2 \delta''(x) + c_3 \delta'''(x) & y = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь  $\delta(x)$  – дельта функция Дирака, постоянные  $c_j$  являются произвольными параметрами.

С физической точки зрения общее решение  $U$  – поле, создаваемое точечным источником на пластине.

После подстановки выражения для  $U$  в контактные условия возникает линейная система уравнений относительно неизвестных  $c_j$ . Для того, чтобы решение этой системы существовало, а гранично-контактная задача имела единственное решение, контактные условия должны быть правильно поставлены [6], [7]. А именно, на решении  $u$  должна обращаться в нуль следующая граничная форма

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial y} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^3 \partial y} \right] \Big|_{x=-0}^{x=+0} = 0, \quad y = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Для того, чтобы сформулировать модель дефекта, учитывающую его размер, к пассивным источникам на пластине добавляется пассивный источник в акустической среде. То есть рассеянное поле ищется в виде общего решения следующей задачи

$$\begin{cases} \Delta U + k^2 U = C \delta(x) \delta(y), & y > 0 \\ \left( \frac{d^4}{dx^4} - k_0^4 \right) \frac{\partial U}{\partial y} + \nu U = c_0 \delta(x) + c_1 \delta'(x) + \\ + c_2 \delta''(x) + c_3 \delta'''(x) & y = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Первое уравнение понимается в смысле предела. Сначала источник помещается в точку  $(0, y_0)$ , а затем в решении  $y_0$  устремляется к нулю.

В новой модели появляется дополнительный параметр  $S$ , и, следовательно, для его определения необходимо задать дополнительное условие. Как и в случае классических точечных моделей, условия, фиксируемые на рассеивателе, должны приводить к обращению в нуль некоторых выражений. Рассмотрим область  $\Omega_{R,\varepsilon}$  ограниченную дугой окружности большого радиуса  $R$ , пластиной и дугой малого радиуса  $\varepsilon$  вокруг дефекта. Применим в этой области к  $u$  и  $\bar{u}$  вторую формулу Грина. Далее перейдем к пределу  $R \rightarrow +\infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Если предел интеграла по дуге малого радиуса и подстановок в точках  $x = \pm\varepsilon$  равен нулю, возникает тождество, носящее название оптической теоремы [11]. Выясним, какие условия, поставленные на рассеивателе, приводят к обращению в нуль указанных пределов и тем самым порождают рассеянное поле, удовлетворяющее оптической теореме. Находим условие (10) и условие

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \left( \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) r d\varphi = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим асимптотику общего решения  $U$  при малом  $r$ . Несложно показать, что это поле имеет логарифмическую особенность

$$U = \frac{C}{\pi} \ln(\hat{r}) + D + \dots, \quad \hat{r} \rightarrow 0 \quad (13)$$

Здесь, поскольку формула носит характер предела,  $\hat{r}$  — произвольным образом обезразмеренное расстояние  $r$ . Постоянная  $C$  — такая же как и в (11), а постоянная  $D$  зависит от падающего поля и параметров  $S$  и  $c_j$ .

Подставляя асимптотику (13) в условие (12) приходим к требованию

$$C\bar{D} - D\bar{C} = 0,$$

из которого следует, что  $C$  и  $D$  в (13) должны быть пропорциональны друг другу с вещественным коэффициентом

$$C = \chi D. \quad (14)$$

В случае  $\chi = 0$  получаются классические модели точечных дефектов.

Отметим, что с математической точки зрения условие (14) фиксирует некоторое самосопряженное расширение оператора задачи в виде потенциала нулевого радиуса [8, 9, 10].

Объединяя (13) и (14) и переходя от  $\chi$  к  $\hat{S} = e^{-\pi/\chi}$ , дополнительное условие на трещине можно записать в размерных величинах  $r$  и  $S$

$$U = \frac{C}{\pi} \ln(r/S) + o(1), \quad r \rightarrow 0. \quad (15)$$

Здесь  $S$  — заданная величина, имеющая размерность длины, а  $C$  произвольно.

#### 4. ВЫБОР ПАРАМЕТРА

Таким образом, в задаче рассеяния на трещине, описываемой новой моделью, следует заменить условие Майкснера на условие (15). Контактные условия при этом сохраняются. Возникает вопрос, каким следует выбрать параметр  $S$  в условии (15) для того, чтобы рассеянное поле отвечало рассеянному полю на узкой трещине.

Наиболее очевидным способом определения  $S$  является сравнение дальнего поля с асимптотикой (6). Несложно установить, что логарифмически малые члены отвечают

$$S = \frac{a}{2}. \quad (16)$$

В этом случае точное выражение для диаграммы направленности рассеянного поля таково:

$$\Psi(\varphi, \varphi_0) = \frac{ivk^2 \sin \varphi \sin \varphi_0}{\pi L(\varphi)L(\varphi_0)} \left\{ \frac{k^4 \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi_0}{D_4} - \frac{k^6 \cos^3 \varphi \cos^3 \varphi_0}{D_6} - \frac{\pi v M(\varphi)M(\varphi_0)}{\ln(ka/4) + \gamma - i\pi/2 + \pi J + vB_2^2/D_4} \right\}. \quad (17)$$

Отличие выражения (17) от асимптотики (6) имеет порядок  $o(1/\ln(ka))$ .

Итак, значение  $S$  определено. Это значение не зависит ни от падающего поля, ни от параметров пластины и характеризуется лишь шириной трещины. Таким образом, значение параметра  $S$  можно было бы получить и из рассмотрения задачи дифракции на щели в абсолютно жестком экране [12].

Параметр  $S$  играет роль радиуса эквивалентного цилиндра, которым можно заменить узкую трещину. Действительно, пренебрегая членами меньшего порядка при  $r \rightarrow 0$ , находим из (15)

$$U|_{r=S} = 0.$$

#### 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматриваются следующие модели рассеивателей

1. Точечная модель трещины [2], характеризуемая условиями

$$C = 0, \quad \xi''(\pm 0) = 0, \quad \xi'''(\pm 0) = 0. \quad (18)$$

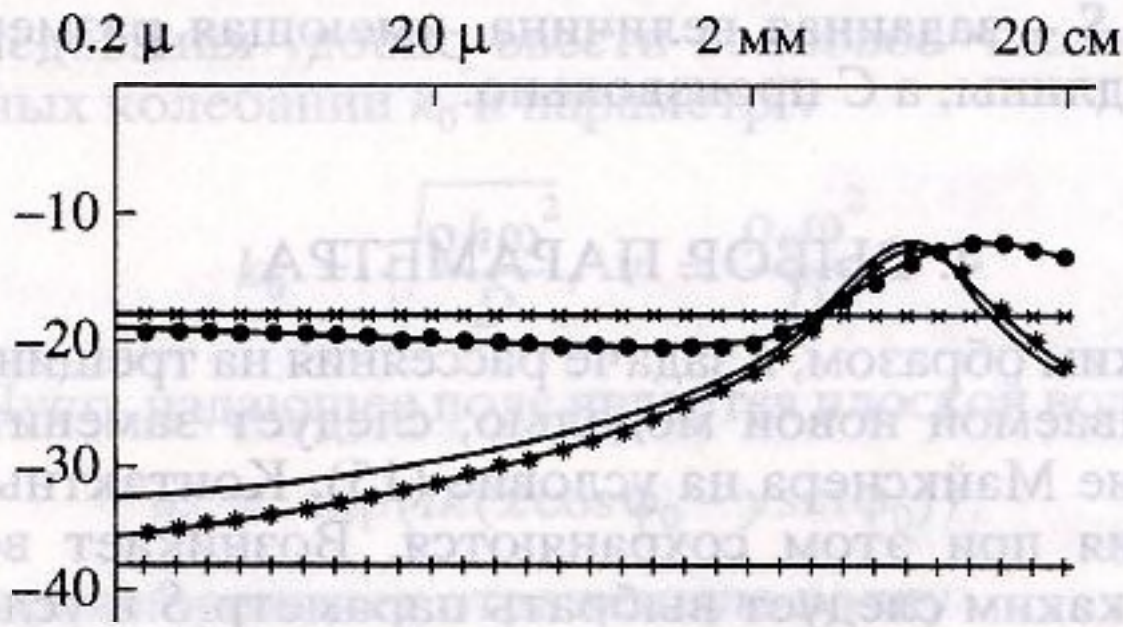


Рис. 1. Зависимость эффективного сечения рассеяния (в дБ) на моделях 1–5 в стальной пластине от полуширины  $a$ .

2. Модель узкой трещины со свободными краями –

$$U \sim \frac{C}{\pi} \ln(2r/a) + o(1), \quad r \rightarrow 0, \quad (19)$$

$$\xi''(\pm 0) = 0, \quad \xi'''(\pm 0) = 0.$$

3. Модель защемления [1] –

$$C = 0, \quad \xi(\pm 0) = 0, \quad \xi'(\pm 0) = 0. \quad (20)$$

4. Модель узкой щели с защемленными краями –

$$U \sim \frac{C}{\pi} \ln(2r/a) + o(1), \quad r \rightarrow 0, \quad (21)$$

$$\xi(\pm 0) = 0, \quad \xi'(\pm 0) = 0.$$

5. Модель пузырька –

$$U \sim \frac{C}{\pi} \ln(2r/a) + o(1), \quad r \rightarrow 0, \quad (22)$$

$$\xi \in C^3 = 0.$$

Отметим, что при  $a \rightarrow 0$  модели 2 и 4 близки к классическим моделям 1 и 3 соответственно. Пу-

зырек (модель 5) не описывается классическими контактными условиями. На рис. 1 приведены зависимости эффективного сечения рассеяния от полуширины  $a$  для моделей 1–5 в стальной пластине толщиной  $h = 2$  мм, погруженной в воду. Частота падающей плоской волны равна 20 кГц, угол падения  $\varphi_0 = 30^\circ$ . Сплошная линия соответствует модели 2, зависимости для остальных моделей помечены значками: + для модели 1, x для модели 3, • для модели 4 и \* для модели 5. Расчеты подтверждают сделанный в [5] вывод о том, что точечной моделью трещины можно пользоваться лишь при экспоненциально малых полуширинах  $a$ . Рассеянные поля в случае моделей 3 и 4 различаются меньше.

На рис. 2 приведены частотные зависимости эффективного сечения рассеяния для перечисленных выше моделей (маркировка кривых – такая же как и на рис. 1). Расчеты показывают, что в низкочастотной области рассеянные поля в моделях 1 и 2 сильно различаются; поля в моделях 3 и 4 также различны, но отличие существенно меньше; поле, рассеянное на узкой трещине, близко к полю, рассеянному на пузырьке. Зависимости для стальной пластины и пластины из плексигласа качественно одинаковы. В обоих случаях толщина пластины взята равной 2 мм, полуширина  $a = 1$  мм, угол падения  $\varphi_0 = 30^\circ$ .

Для пластины в воде критическая частота  $f_0$ , при которой выполняется равенство  $k = k_0$  лежит в области  $kh \approx 0.9$  [13], в которой уже нельзя пользоваться моделью Кирхгофа. Для пластины в воздухе критическая частота существенно ниже, и модель Кирхгофа, по-видимому, остается справедливой. При увеличении частоты за критическую  $f > f_0$  скорость следа акустической волны на пластине может совпасть со скоростью изгибной

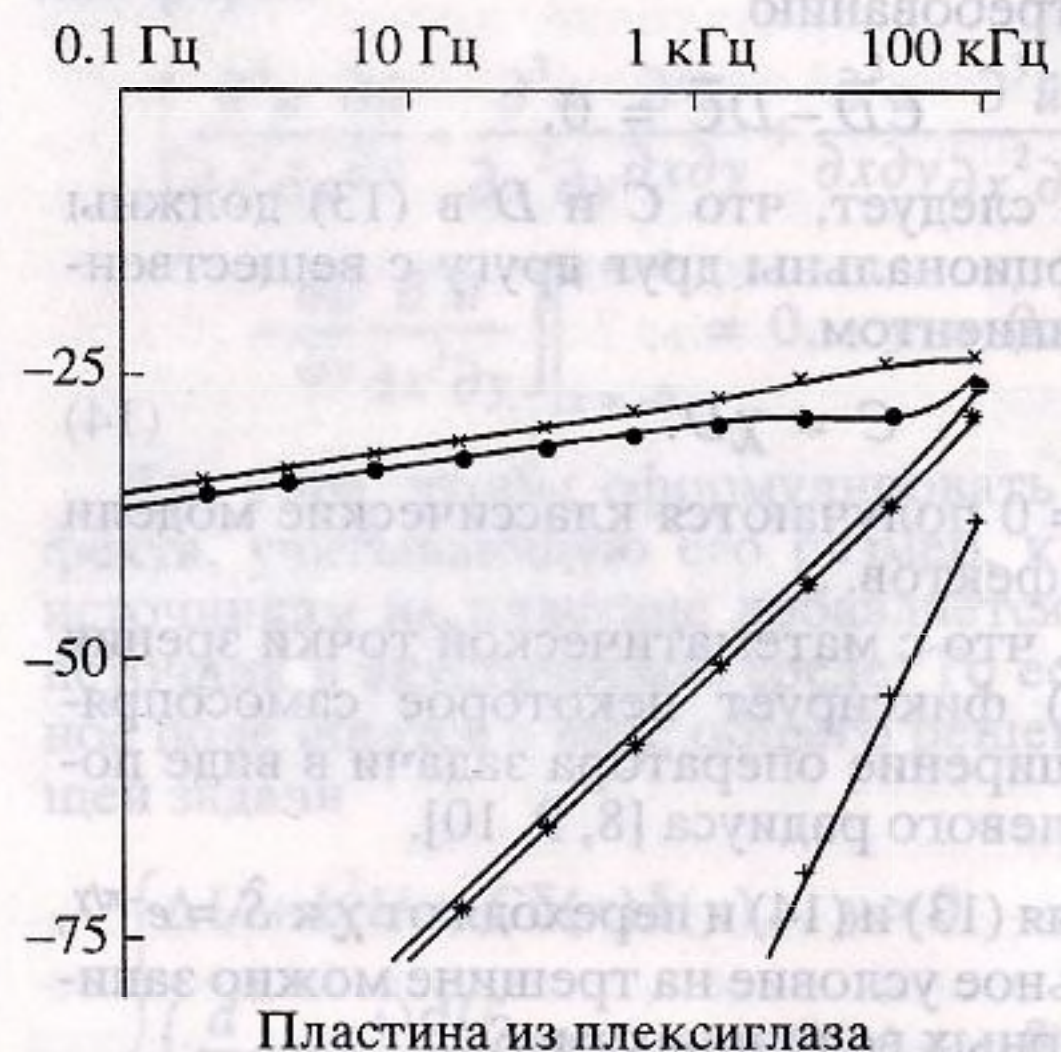
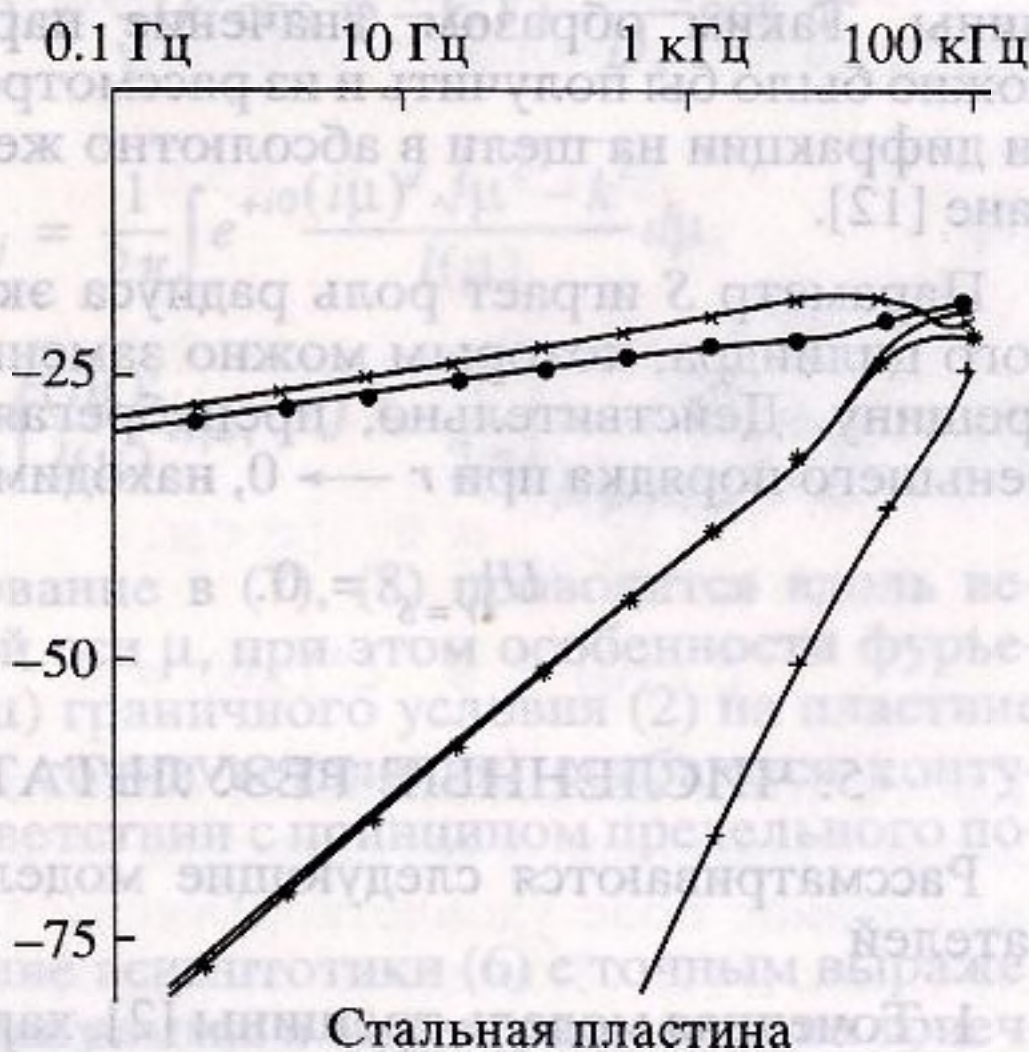


Рис. 2. Частотная зависимость эффективного сечения рассеяния (в дБ) для пластин в воде; а – стальная пластина, б – пластина из плексигласа.

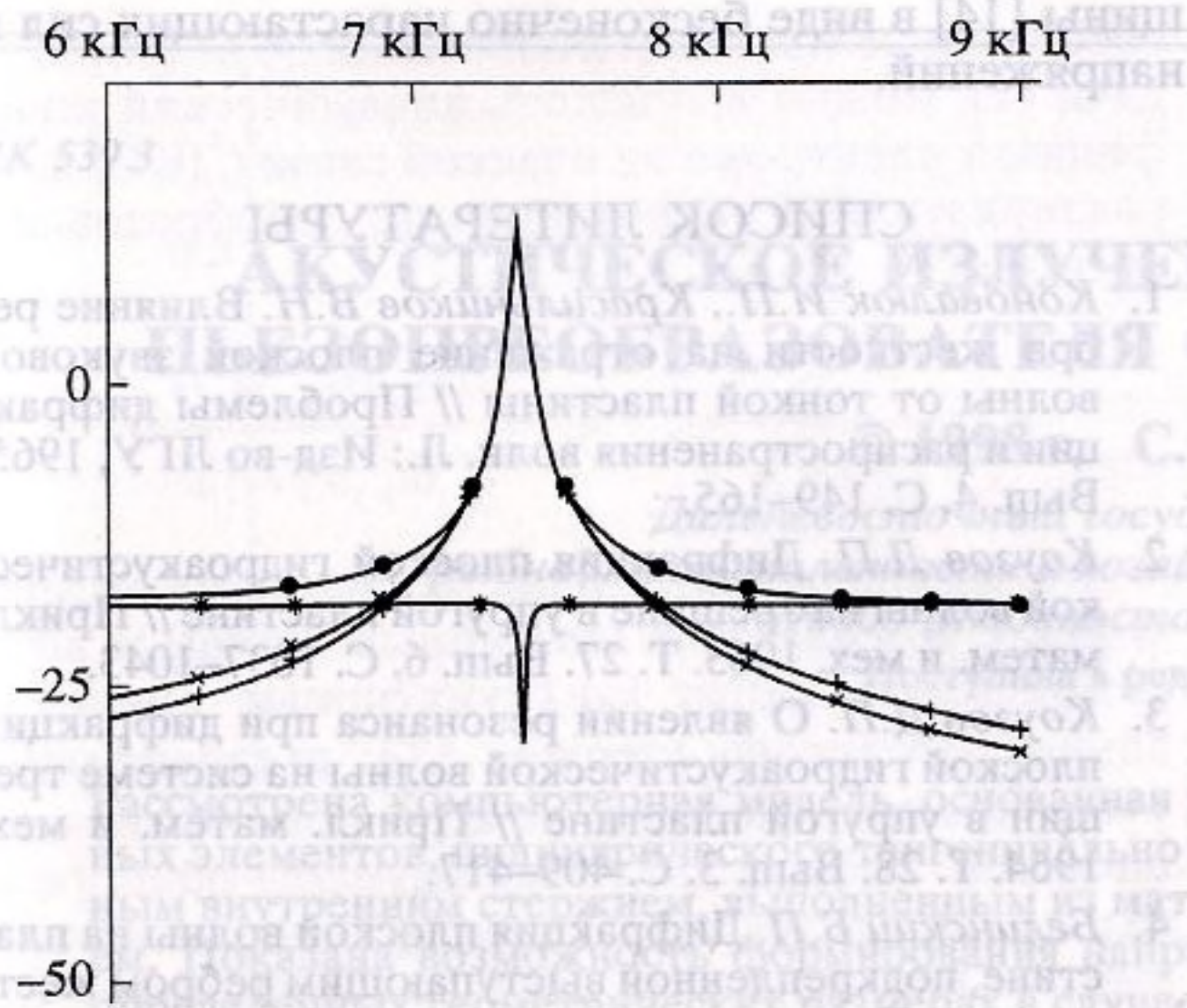


Рис. 3. Частотная зависимость эффективного сечения рассеяния (в дБ) в окрестность частоты совпадения для алюминиевой пластины в воздухе.

волны, то есть  $k \cos \varphi_0 = k_0$  (Обозначим соответствующую частоту  $f_1$ .) При этой частоте наблюдается максимум рассеянного поля в моделях 1 – 4, а поле, рассеянное на пузырьке, имеет минимум. На рис. 3 приведены зависимости эффективного сечения рассеяния для алюминиевой пластины толщиной 2 мм при  $a = 1$  мм для частот, близких к частоте совпадения  $f_1$ . В окрестности частоты совпадения модель узкой трещины не дает заметного отличия в рассеянном поле по сравнению с классической моделью. Таким образом, в окрестности частоты совпадения можно пользоваться точечной моделью и для достаточно широких трещин, вплоть до  $ka = 1$  и более.

Рисунок 4 иллюстрирует распределение энергии по каналам рассеяния, приведена доля энергии, сосредоточенной в прилегающем к пластине канале. Легко видеть, что в задачах рассеяния на классических точечных моделях 1 и 3 в докритической области при  $k < k_0$  основная доля энергии рассеянного поля переносится волнами, бегущими вдоль пластины. На низких частотах при этом 3/4 энергии составляет энергия изгибных колебаний пластины, а 1/4 сосредоточена в прилегающем к пластине тонком слое акустической среды [2]. При частотах выше критической почти вся энергия уносится цилиндрической волной. Для остальных моделей в области низких частот, также практически вся энергия переносится волнами, бегущими вдоль пластины, однако уже на частотах порядка 1 Гц для моделей 2, 5 и порядка 10 Гц для модели 4 начинает нарастать доля энергии цилиндрической волны. На критической частоте перестройки энергетического баланса в этих моделях не происходит.

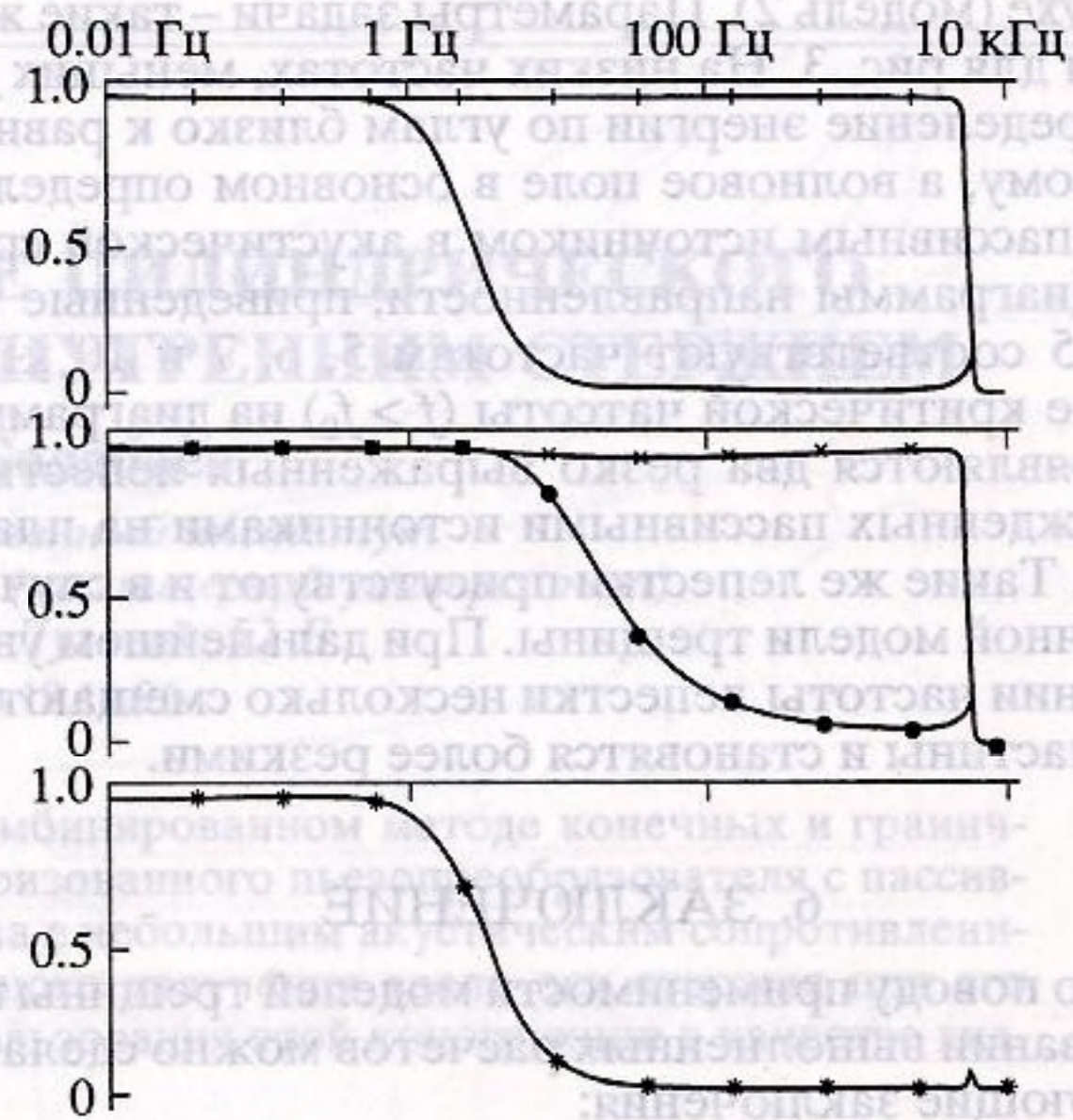


Рис. 4. Распределение энергии по каналам рассеяния для алюминиевой пластины в воздухе.

Рисунок 5 иллюстрирует распределение энергии цилиндрической волны по направлениям распространения. Здесь приведены диаграммы направленности в задаче рассеяния на узкой трещине в алюминиевой пластине, помещенной в

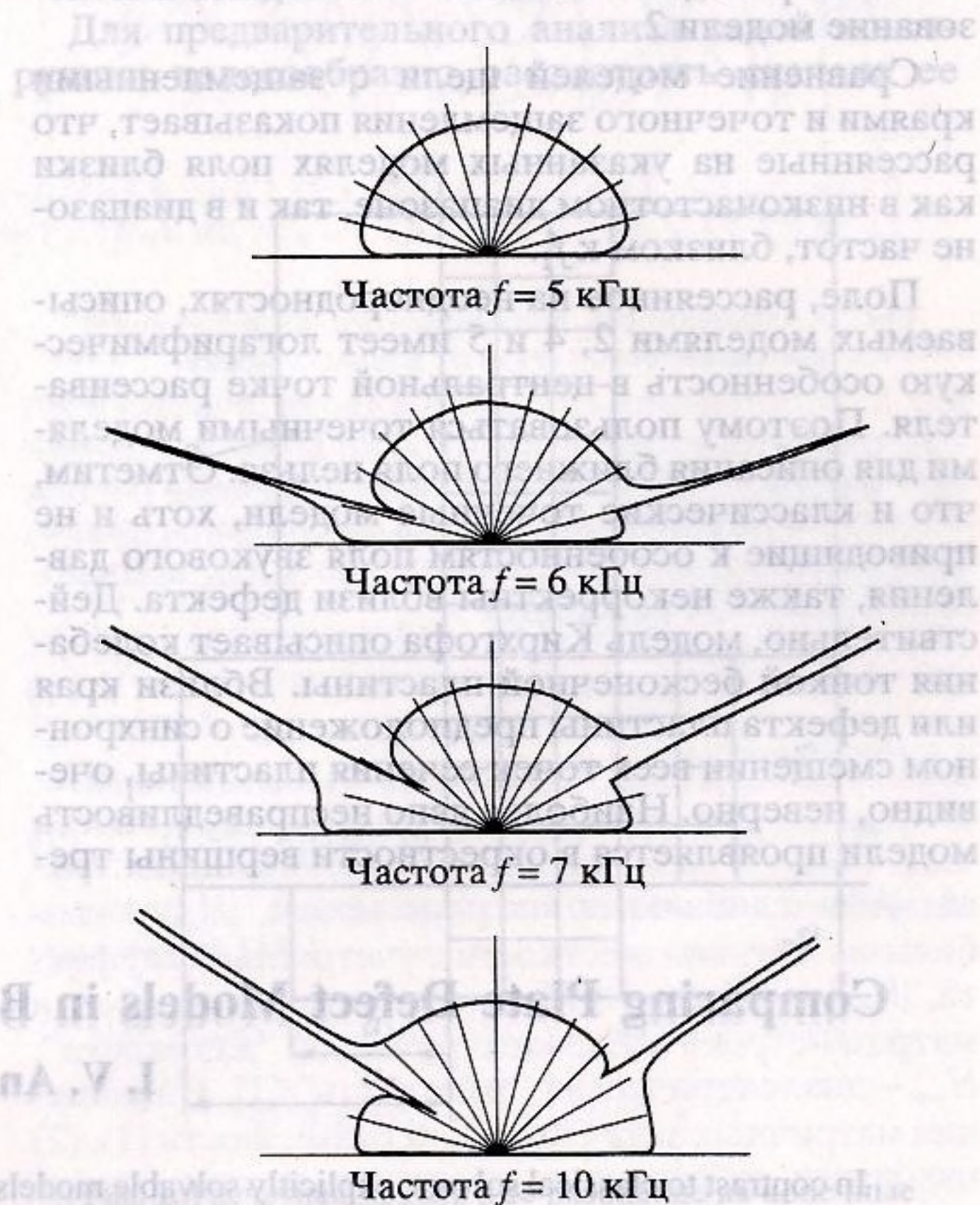


Рис. 5. Диаграммы направленности для модели 2.

воздухе (модель 2). Параметры задачи – такие же, как и для рис. 3. На низких частотах, меньших  $f_0$ , распределение энергии по углам близко к равномерному, а волновое поле в основном определяется пассивным источником в акустической среде. Диаграммы направленности, приведенные на рис. 5 соответствуют частотам 5, 6, 7 и 10 кГц. Выше критической частоты ( $f > f_0$ ) на диаграмме  $\Psi$  появляются два резко выраженных лепестка, порожденных пассивными источниками на пластине. Такие же лепестки присутствуют и в случае точечной модели трещины. При дальнейшем увеличении частоты лепестки несколько смещаются от пластины и становятся более резкими.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По поводу применимости моделей трещины на основании выполненных расчетов можно сделать следующие заключения:

1. Рассеяние на экспоненциально узкой трещине может быть описано классической точечной моделью.

2. В случае более широких трещин моделью 1 можно пользоваться лишь в окрестности частоты совпадения при неортогональном падении.

3. На частотах, заметно отличающихся от критической, поля, рассеянные на узкой трещине и на пузырьке, совпадают.

4. В переходных областях необходимо использование модели 2.

Сравнение моделей щели с заземленными краями и точечного заземления показывает, что рассеянные на указанных моделях поля близки как в низкочастотном диапазоне, так и в диапазоне частот, близком к  $f_1$ .

Поле, рассеянное на неоднородностях, описываемых моделями 2, 4 и 5 имеет логарифмическую особенность в центральной точке рассеивателя. Поэтому пользоваться точечными моделями для описания ближнего поля нельзя. Отметим, что и классические точечные модели, хоть и не приводящие к особенностям поля звукового давления, также некорректны вблизи дефекта. Действительно, модель Кирхгофа описывает колебания тонкой бесконечной пластины. Вблизи края или дефекта пластины предположение о синхронном смещении всех точек сечения пластины, очевидно, неверно. Наиболее явно несправедливость модели проявляется в окрестности вершины тре-

щины [14] в виде бесконечно нарастающих сил и напряжений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коновалюк И.П., Красильников В.Н. Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от тонкой пластины // Проблемы дифракции и распространения волн. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. Вып. 4. С. 149–165.
2. Коузов Д.П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // Прикл. матем. и мех. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1037–1043.
3. Коузов Д.П. О явлении резонанса при дифракции плоской гидроакустической волны на системе трещин в упругой пластине // Прикл. матем. и мех. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 409–417.
4. Белинский Б.П. Дифракция плоской волны на пластине, подкрепленной выступающим ребром жесткости // Прикл. матем. и мех. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 486–493.
5. Андронов И.В., Белинский Б.П. Рассеяние гидроакустических волн на узком вырезе в упругой пластине // Прикл. матем. и мех. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 202–209.
6. Коузов Д.П. Гранично-контактные задачи акустики (система пластина–жидкость). Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: Акуст. инст. АН СССР, 1988. С. 33.
7. Белинский Б.П. О единственности решения гранично-контактных задач акустики // Вестн. ЛГУ, Сер. мат.–мех.–астрон. 1983. № 13. Вып. 3. С. 5–10.
8. Павлов Б.С. Теория расширений и явно решаемые модели // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. Вып. 6. С. 99–131.
9. Зимнев М.М., Попов И.Ю. Выбор параметров щелей нулевой ширины // Журн. выч. матем. и матем. физики 1987. Т. 27. № 3. С. 466–470.
10. Андронов И.В. Применение потенциалов нулевого радиуса в задачах дифракции на малых неоднородностях в упругих пластинах // Прикл. матем. и мех. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 451–463.
11. Белинский Б.П., Коузов Д.П. Оптическая теорема для системы пластина–жидкость // Акуст. журн. 1980. Т. 26. Вып. 1. С. 13–19.
12. Хенд Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. С. 428.
13. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. С. 352.
14. Андронов И.В., Белинский Б.П. О потоках энергии в окрестности конца трещины в изгибно колеблющейся пластине // Изв. АН СССР. МТТ, 1990. № 3. С. 184–187.

## Comparing Plate Defect Models in Boundary–Contact Acoustic Problems

I. V. Andronov

In contrast to classical solvers, explicitly solvable models of plate defects proposed in this paper take into account the size of defects. The fields scattered from defects described by classic point models and models developed in this work are compared. The applicability range of these models is considered.