

УДК 532.592:534.2

О ВОЗМОЖНОСТИ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА КРУПНОМАСШТАБНЫМ ВИХРЕМ В СЛАБОМ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

© 1998 г. В. Ф. Копьев, С. А. Чернышев

ГосНИЦ ЦАГИ, акустическое отделение
107005 Москва, ул. Радио, 17

Поступила в редакцию 06.05.97 г.

Одним из механизмов возбуждения нестационарных возмущений в вихревых течениях, а следовательно и излучения звука, является эволюция неустойчивых мод, обладающих комплексными собственными частотами. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что в процессе шумообразования помимо обычной неустойчивости может играть роль другой механизм возбуждения нестационарных возмущений в вихревом течении – так называемая алгебраическая неустойчивость. При алгебраической неустойчивости происходит рост амплитуды тех колебаний, частоты которых являются действительными. Это означает, что возбуждение возмущений в потоке и генерация шума этими возмущениями могут происходить даже тогда, когда обычная неустойчивость отсутствует или по каким-либо причинам оказывается подавлена. Для включения этого процесса достаточно присутствия неоднородности завихренности (вихревые пятна) вблизи критического слоя одной из мод дискретного спектра. Пятна завихренности пассивно сносятся средним течением и сами по себе неэффективно генерируют звук. Однако они оказываются в резонансной связи с возмущениями другого типа, которые в свою очередь являются эффективными генераторами звука. Это – колебания дискретного спектра, представляющие собой деформацию границы вихря.

Хорошо известно, что в сдвиговых турбулентных течениях формируются отдельные относительно долго живущие вихревые структуры, играющие важную роль в развитии нестационарных процессов, в том числе в процессе аэродинамической генерации звука [1]. Формирование крупных вихрей, их эволюция и разрушение связаны с различными механизмами неустойчивости, обеспечивающими передачу энергии из среднего течения в колебательные степени свободы. Исследование механизмов неустойчивости, которые приводят к нарастанию возмущений и, как следствие, к излучению звука, представляет собой важную, но очень сложную задачу, поддающуюся в общем виде только численному исследованию. Существенное упрощение задачи может быть достигнуто при рассмотрении отдельной, по возможности наиболее простой, вихревой структуры, неустойчивость которой не связана с коллективным движением вихрей и может исследоваться аналитически. Такое исследование динамических процессов в отдельных вихрях может дать понимание некоторых аспектов акустического излучения в сложных турбулентных течениях в тех случаях, когда акустика течения определяется в первую очередь вкладом каждой отдельной вихревой структуры.

Одним из простейших модельных вихревых течений является цилиндрический вихрь с постоянной завихренностью в ядре (вихрь Ранкина).

Хорошо известны его собственные колебания [2], впервые рассмотренные в работах Кельвина. Однако в идеальной несжимаемой жидкости этот вихрь устойчив. Неустойчивость возникает при учете сжимаемости за счет переноса энергии звуковыми волнами на бесконечность [3, 4]. В слабосжимаемых течениях акустическая неустойчивость малоэффективна, так как инкремент этой неустойчивости пропорционален четвертой степени числа Маха. Поэтому для выяснения механизмов возбуждения пульсаций обычно исследуются вихревые течения с более сложной геометрией (обладающие кривизной вихревых линий или эллиптической формой линий тока в сечении вихря), в которых были обнаружены другие механизмы неустойчивости [2, 5, 6].

В настоящей работе авторы хотят привлечь внимание к принципиально иному механизму возбуждения гидродинамических пульсаций, способных генерировать звук, – механизму алгебраической неустойчивости. Впервые возможность интенсификации звукового излучения за счет эволюции локализованных начальных возмущений в ядре вихревого кольца была продемонстрирована авторами в [7]. Более детальное исследование этого явления было проведено на примере осесимметричных вихревых пятен в ядре вихревого кольца [8]. Оказалось, однако, что этот механизм проявляется и в более простом случае двумерного вихря Ран-

кина. Поскольку в этом случае алгебраическая неустойчивость не проявляется для вихревых пятен, располагающихся внутри твердотельно вращающегося вихревого ядра, то для ее исследования необходимо рассмотреть возмущения более общего вида, предполагая, что в начальный момент вихревое ядро окружено вихревыми пятнами, расположенными в его окрестности.

Алгебраическая неустойчивость подробно исследовалась в плоскопараллельных течениях. Известно, что плоскопараллельные течения несжимаемой жидкости обладают собственными колебаниями как дискретного, так и непрерывного спектра [9–11]. Колебания непрерывного спектра (волны Кейза [9]) представляют собой обобщенные решения уравнения Рэлея, описывающего малые гармонические по времени возмущения плоскопараллельных течений. В наиболее простом случае течения Куэтта этим решениям соответствуют δ -образные вихревые слои, расположенные на линиях тока стационарного течения. Волны непрерывного и дискретного спектра могут находиться в резонансном взаимодействии, в результате чего возникают возмущения, нарастающие линейно со временем (алгебраическая неустойчивость) [12–14].

В настоящей работе исследуется алгебраическая неустойчивость в течениях с круговыми линиями тока. Рассмотрены 2-мерные возмущения кругового вихря с постоянной завихренностью (вихрь Ранкина). Множество исследуемых собственных колебаний включает в себя моды дискретного и непрерывного спектра. Моды дискретного спектра хорошо известны и сводятся только к деформации границы вихря [15]. Моды непрерывного спектра имеют более сложную структуру и представляют собой бесконечно тонкий вихревой слой на линии тока стационарного течения, который сопровождается соответствующей деформацией границы вихря.

Рассматривается эволюция возмущений завихренности в идеальной несжимаемой жидкости, локализованных в начальный момент в некоторой области малого размера (вихревые пятна). Поскольку любое начальное возмущение завихренности может быть разложено по модам дискретного и непрерывного спектра, которые представляют собой полную систему функций, то для исследования эволюции начальных возмущений необходимо полное решение спектральной задачи, включающее описание возмущений непрерывного спектра. Особый интерес представляют собой вихревые пятна, лежащие на критическом слое одной из мод дискретного спектра (т.е. на линии тока, где фазовая скорость возмущений дискретного спектра совпадает со скоростью среднего потока). Показано, что для таких вихревых пятен возмущения, лежащие вблизи критического слоя, будут резонансно взаимодействовать с воз-

мущениями границы вихря аналогично взаимодействию возмущений в плоскопараллельных потоках [12–14]. Это резонансное взаимодействие связано с совпадением частот колебаний дискретного и непрерывного спектра. В результате амплитуда деформации границы вихря со временем будет нарастать, в то время как само пятно будет расплываться вследствие неизохронности стационарного течения. Как и в плоскопараллельных потоках, этот эффект базируется на возможности передачи энергии от среднего течения к нестационарным возмущениям.

Во второй части работы описанные эффекты анализируются при учете слабой сжимаемости. В отличие от плоскопараллельных течений, где возмущения с дозвуковой фазовой скоростью не генерируют звуковое излучение, в случае течений с круговыми линиями тока ситуация существенно иная: колебания такого течения могут излучать звук. Показано, что описанное в первой части работы резонансное взаимодействие пятен завихренности с колебаниями вихревого ядра может приводить к появлению звукообразующих пульсаций, в результате чего происходит заметная интенсификация звукового излучения. Таким образом, в простейшей вихревой системе, представляющей собой вихревое ядро, погруженное в слаботурбулентную среду, интенсивный звук может возникнуть со временем как проявление алгебраической неустойчивости начальных возмущений.

В цилиндрических координатах рассмотрим круговой вихрь радиуса a с постоянной завихренностью Ω_0 , направленной вдоль координаты z . Внутри вихря φ – компонента скорости имеет вид $U_0^\varphi = \Omega_0 r/2$, а вне вихря, где течение потенциально, $U_0^\varphi = \Omega_0/2r$.

Далее будем использовать безразмерные переменные: в качестве масштаба времени выберем Ω_0^{-1} , а длины – радиус вихря a . Тогда для угловой скорости и завихренности получим

$$V_0 \equiv \frac{U_0^\varphi}{r} = \frac{1}{2}\theta(1-r) + \frac{1}{2r^2}\theta(r-1), \quad (1)$$

$$\Omega_0 \equiv \frac{1}{r} \frac{d(rU_0^\varphi)}{dr} = \theta(1-r), \quad (2)$$

где $\theta(x)$ – функция Хэвисайда: $\theta(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. Внутри вихря происходит твердотельное вращение жидкости с периодом $T = 4\pi$, вне вихря период обращения $T = 4\pi r^2$ зависит от линии тока и меняется от величины 4π на границе вихря до бесконечности при удалении от границы.

Для описания эволюции произвольного начального возмущения необходимо иметь полное решение спектральной задачи, включая описание

непрерывного спектра. Для вихря Ранкина имеется бесконечный набор собственных колебаний дискретного спектра [15], которые сводятся только к деформации границы вихря. Для этих колебаний завихренность остается постоянной внутри деформированного контура $r = 1 + \varepsilon f_m(\varphi, t)$, $\varepsilon \ll 1$, т.е.

$$\Omega = \theta[1 + \varepsilon f_m(\varphi, t) - r],$$

$$f_m(\varphi, t) = \text{Re}[\exp(im\varphi - i\omega_0 t)].$$

Частота этих колебаний

$$\omega_0 = (m-1)/2. \quad (3)$$

Раскладывая θ -функцию в ряд и ограничиваясь линейным членом, легко представить возмущения завихренности в виде δ -образного слоя на границе $r = 1$

$$\Omega = -\varepsilon \delta(r-1) e^{im\varphi - i\omega_0 t}. \quad (4)$$

Отметим, что возмущения скорости для колебаний дискретного спектра являются непрерывными функциями. Появление δ -функции в выражении (4) связано только с переносом возмущений на границу $r = 1$.

Наряду с модами дискретного спектра имеются также собственные колебания непрерывного спектра, которые представляют собой разрывные решения уравнений Эйлера (разрывной является φ -компонента скорости). Эти решения представляют собой δ -образные возмущения завихренности, расположенные на линиях тока стационарного течения и сопровождающиеся соответствующей деформацией границы. Колебания непрерывного спектра вместе с колебаниями (4) представляют собой полный набор функций, по которому могут быть разложены любые начальные возмущения завихренности, включая вихревые пятна внутри и вне вихревого ядра.

Найдем решения непрерывного спектра. Линеаризованное двумерное уравнение Гельмгольца, описывающее возмущения с единственной отличной от нуля z компонентой завихренности Ω , имеют вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} + v^r \frac{d\Omega_0}{dr} = 0, \quad (5)$$

где V_0 и Ω_0 определяются соотношениями (1) и (2), v^r — компонента возмущений скорости, связанная с возмущением завихренности в соответствии с законом Био-Савара:

$$v^r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad (6)$$

$$\psi(r, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int \ln(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')) \times \quad (7)$$

$$\times \Omega(r', \varphi') r' dr' d\varphi',$$

где ψ — функция тока.

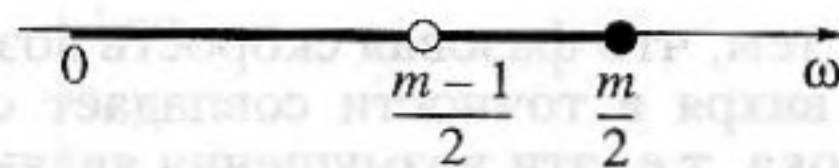


Рис. 1. Вырожденные моды непрерывного спектра ●, изолированная мода (○) и непрерывный спектр для m -й гармоники.

Будем искать решения непрерывного спектра в виде

$$\Omega = \varepsilon [\delta(r-\rho) + \alpha \delta(r-1)] e^{im\varphi - i\omega_\alpha t}. \quad (8)$$

Первый член в квадратных скобках в этом выражении есть возмущение завихренности единичной амплитуды на некоторой линии тока $r = \rho$. Второй член есть неизвестное смещение границы вихря с амплитудой α , соответствующее этому возмущению. Подставляя (8) в (5) и приравнявая нулю множители при δ -функциях, получим:

$$-i\omega_\alpha + imV_0 = 0, \quad r = \rho \quad (9)$$

$$-i\omega_\alpha \alpha + imV_0 \alpha - v_2^r = v_1^r, \quad r = 1 \quad (10)$$

где v_1 и v_2 — поля скорости, создаваемые первым и вторым членами завихренности (8) в соответствии с (6) и (7).

Уравнение (9) определяет собственные частоты в зависимости от величины ρ :

$$\omega_\alpha = mV_0(\rho). \quad (11)$$

Для всех возмущений, лежащих внутри вихря, собственные частоты вырождаются и имеют одинаковое значение $\omega_\alpha = m/2$. Возмущения, лежащие вне вихря, имеют частоты, заполняющие интервал $\omega_\alpha = m(V_{0\min}, V_{0\max})$, где $V_{0\min} = 0$, $V_{0\max} = 1/2$. Взаимное расположение частот дискретного и непрерывного спектра для колебаний, имеющих вид m -той гармоники, представлено на рис. 1.

Уравнение (10) определяет амплитуду отклика границы вихря на возмущения, создаваемые δ -образной завихренностью, расположенной на линии $r = \rho$. Вычисляя последовательно ψ , v_1 и v_2 , получим

$$\alpha = -\frac{\rho^{m+1}}{2(\omega_\alpha - \omega_0)}, \quad \rho < 1,$$

$$\alpha = \frac{1}{2\rho^{m-1}(\omega_\alpha - \omega_0)}, \quad \rho > 1,$$

где ω_0 — частота дискретной моды (3), ω_α определяется выражением (11).

Для δ -возмущений, лежащих в области $\rho < 1$, частота равна $\omega_\alpha = m/2$. Отсюда

$$\Omega = \varepsilon [\delta(r-\rho) - \rho^{m+1} \delta(r-1)] e^{im\varphi - imt/2}. \quad (12)$$

Вычисляя для таких возмущений интеграл (7), легко увидеть, что эти колебания вообще не создают возмущений во внешней области $r > 1$. Это

связано с тем, что фазовая скорость возмущений границы вихря в точности совпадает со скоростью потока, т.е. эти возмущения являются вписанными в основной поток. Такие колебания не представляют интереса с точки зрения акустики и далее рассматриваться не будут.

Для δ -возмущений, лежащих в области потенциального потока ($r > 1$), частота равна $\omega_\alpha = m/2\rho^2$, а возмущение завихренности имеет вид

$$\Omega = \varepsilon[\delta(r-\rho) - \rho^2 \delta(r-1)] e^{i\varphi - it/2\rho^2}, \quad m = 1,$$

$$\Omega = \varepsilon \left[\delta(r-\rho) + \frac{1}{(m-1)\rho^{m-3}(\rho^2 - \rho_0^2)} \delta(r-1) \right] \times$$

$$\times e^{im\varphi - imt/2\rho^2}, \quad m \geq 2, \quad (13)$$

где $\rho_0^2 = m/(m-1)$. Колебания с $m = 1$ не создают возмущений в области $r > \rho$ и, аналогично возмущениям (12), далее рассматриваться не будут. В случае $m \geq 2$ амплитуда возмущения границы обращается в бесконечность при $\rho = \rho_0$, то есть отклик границы имеет резонансный характер.

Рассмотрим теперь начальную задачу. Пусть в момент времени $t = 0$ граница вихря не возмущена, а на линии $r = \rho > 1$ имеется возмущение завихренности вида $\Omega = \gamma\delta(r-\rho)e^{im\varphi}$, где $\gamma \ll 1$. Эта завихренность создает возмущения скорости, воздействующие на вихревое ядро и вызывающие деформацию его границы. Обратное влияние на δ -слой приводит к его смещению от линии $r = \rho$. Учет этого смещения будет приводить, очевидно, к квадратичным по γ добавкам к полю скорости, поэтому в линейном приближении эволюция завихренности может быть описана выражением

$$\Omega = [\gamma\delta(r-\rho)e^{i(m\varphi - mt/2\rho^2)} + \alpha(t)\delta(r-1)e^{im\varphi}] \theta(t), \quad (14)$$

где первый член описывает перенос основным потоком вихревого слоя, расположенного на линии $r = \rho$, а второй член описывает деформацию границы вихря. Поскольку предполагается, что в начальный момент деформация границы вихря отсутствует, то $\alpha(0) = 0$. Для нахождения $\alpha(t)$ воспользуемся односторонним преобразованием Фурье:

$$\alpha(\omega) = \int_0^\infty \alpha(t) e^{i\omega t} dt, \quad (15)$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} \alpha(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (16)$$

В интеграле (16) величина σ выбрана так, чтобы контур интегрирования проходил выше всех особенностей подинтегрального выражения.

Подставим (14) в уравнение Гельмгольца (5) и применим преобразование (15). Тогда после инте-

грирования по частям с учетом условия $\alpha(0) = 0$ получим

$$\alpha(\omega) = \frac{\gamma\rho^{-m+1}}{2i(\omega - mV_0)(\omega - \omega_0)}.$$

При $t > 0$ замкнем контур интегрирования в нижней полуплоскости. Тогда контурный интеграл (16) сведется по формуле Коши к сумме вычетов в полюсах $\omega = mV_0$ и $\omega = \omega_0$. В результате получим

$$\alpha(t) = \frac{\gamma(e^{-i\omega_\alpha t} - e^{-i\omega_0 t})}{2\rho^{m-1}(\omega_\alpha - \omega_0)}. \quad (17)$$

Особым является случай, когда δ -слой расположен на линии тока $\rho = \rho_0$, где $\omega_\alpha(\rho) = \omega_0$. В этом случае знаменатель и числитель в (17) обращаются в нуль, и для амплитуды деформации границы получим другое выражение, соответствующее вычету в полюсе второго порядка:

$$\alpha(t) = -\frac{i\gamma t}{2\rho^{m-1}} e^{im\varphi - i\omega_0 t}.$$

Амплитуда границы в этом выражении нарастает линейно со временем. Рост амплитуды связан с тем, что возмущения завихренности, расположенные на линии $r = \rho$, имеют ту же фазовую скорость, что и собственное колебание (4), которое представляет собой деформацию границы вихря. Таким образом, воздействие со стороны вихревого слоя оказывается все время в фазе с деформацией границы, и амплитуда этой деформации будет непрерывно расти со временем. Отметим, что рост амплитуды колебаний получен в рамках линейного приближения и может ограничиваться нелинейными эффектами, приводящими к тому, что вихревой слой за счет воздействия на него возмущений границы смещается с резонансной линии тока $r = \rho_0$.

Неограниченное нарастание амплитуды связано с идеализацией картины течения, при которой предполагается, что вся возмущающая завихренность сконцентрирована на линии $r = \rho$. Если возмущение завихренности занимает конечную область, то нарастание амплитуды будет ограничено временем рассогласования (расфазирования) завихренности в слое за счет отличия скорости течения на близких линиях тока.

Действительно, пусть начальное возмущение завихренности вида $e^{im\varphi}$ с плотностью $\gamma(r)$ сосредоточено в узком слое $\rho_1 - h < r < \rho_1 + h$, $h/\rho_1 \ll 1$. Тогда, интегрируя решения (14) с весом $\gamma(r)$ по ширине слоя, получим

$$\Omega(r, t) = e^{im\varphi} [\gamma(r) e^{-imV_0(r)t} + \alpha(t)\delta(r-1)],$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\rho_1-h}^{\rho_1+h} d\rho \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} d\omega \frac{\gamma(\rho) e^{-i\omega t} \rho^{-m+1}}{2i(\omega - mV_0(\rho))(\omega - \omega_0)}.$$

Переходя к новой переменной $u = mV_0(\rho)$ и используя условие $h/\rho_1 \ll 1$, получим:

$$\alpha(t) = \frac{1}{4\pi i} \frac{\gamma(\rho_1)}{m\rho_1^{m-4}} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_0} \ln \frac{\omega - u^+}{\omega - u^-} d\omega, \quad (18)$$

$$u^+ = \omega_0(1 - 2h/\rho_1), \quad u^- = \omega_0(1 + 2h/\rho_1).$$

Подынтегральная функция в (18) имеет простой полюс в точке $\omega = \omega_0$ и логарифмические точки ветвления при $\omega = u^\pm$. Проведем разрезы из точек $\omega = u^\pm$ вертикально вниз. После замыкания контура интегрирования в нижней полуплоскости интеграл (18) сведется к вкладу от простого полюса $\omega = \omega_0$ и вкладу от двух разрезов (рис. 2). При больших t вклад от точек ветвления исчезает, поскольку интегралы по берегам разрезов убывают как $1/t$, и останется только вклад от полюса. Таким образом, предельное значение амплитуды колебаний границы, которое достигается за время полного расфазирования возмущений в вихревом слое, будет определяться вычетом в точке $\omega = \omega_0$. Если ρ_1 не находится вблизи критического слоя ρ_0 , то величина вычета имеет порядок $O(h/\rho_1)$. В случае, когда $\rho_1 - \rho_0 = O(h)$, величина вычета имеет порядок $O(1)$, то есть происходит существенное нарастание амплитуды колебаний границы. В частности, при $\rho_1 = \rho_0$

$$\alpha(\infty) = -\frac{i\pi}{2m} \rho_0^{4-m} \gamma(\rho_0) e^{-i\omega_0 t}.$$

Время расфазирования T легко оценить из того условия, что возмущения на верхней и нижней границах слоя, первоначально находящиеся в одной фазе, сдвигаются на половину периода друг относительно друга, то есть $T = \pi\rho_0/4(m-1)h$. Можно показать, что, как и в случае плоскопараллельного течения [14], нарастание амплитуды колебаний происходит за счет передачи энергии между средним течением и колебаниями дискретного спектра.

Найдем теперь звуковое излучение рассматриваемой вихревой системой, предполагая для простоты, что $\rho_1 = \rho_0$. Определим сначала потенциал Φ поля скорости несжимаемой жидкости ($\mathbf{v} = \nabla\Phi$) во внешней области $r > \rho_0 + h$. Проводя несложные вычисления, получим

$$\Phi(r, t) = - \left[\int_{\rho_0-h}^{\rho_0+h} \rho^{m+1} \gamma(\rho) e^{-imV_0(\rho)t} d\rho + \alpha(t) \right] \frac{ie^{im\varphi}}{2mr^m} \quad (19)$$

Потенциал внешнего течения состоит из двух членов, то есть $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Первый член связан с завихренностью в слое. Второй член связан с нарастающей деформацией границы основного вихря. Пока амплитуда деформации границы $\alpha(t)$

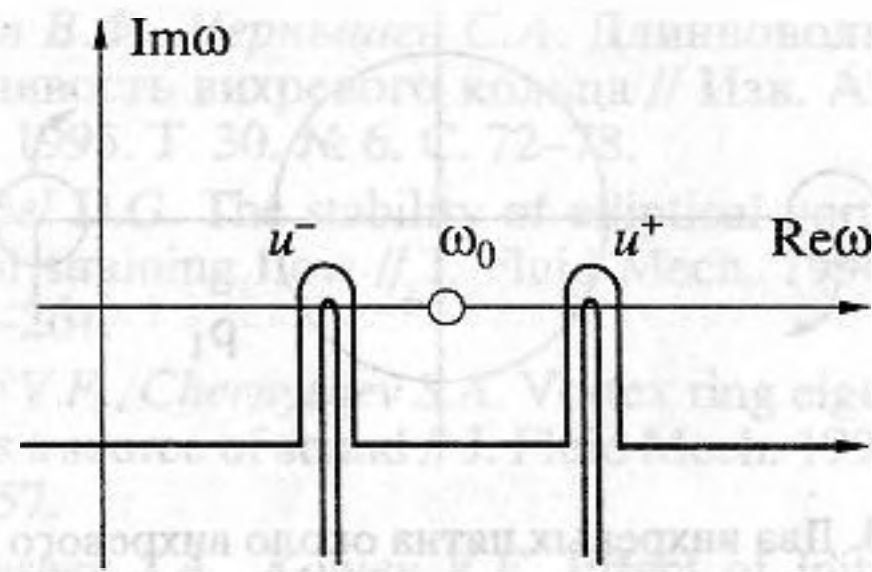


Рис. 2. Контур интегрирования при $t \rightarrow \infty$.

мала, потенциал определяется только первым членом, который убывает со временем из-за расфазирования возмущений в слое. В начальный период времени этот вклад максимален и представляет собой гармонику с частотой ω_0 вида

$$\Phi_1 = -\frac{ih\gamma(\rho_0)\rho_0^{m+1} J}{mr^m} e^{im\varphi - i\omega_0 t}, \quad (20)$$

$$J = \int_{-1}^1 \Gamma(u) du, \quad \Gamma(r) = \frac{\gamma(r)}{\gamma(\rho_0)},$$

где $u = (\rho - \rho_0)/h$ – внутренняя переменная в вихревом слое. Величина J имеет порядок $O(1)$. Чем меньше толщина h (и, соответственно, чем меньше интенсивность возмущающего слоя), тем меньше и возмущения потенциала во внешней области.

Второй член в (19) в отличие от первого возрастает со временем, достигая предельного уровня

$$\Phi_2|_{t \rightarrow \infty} = -\frac{\pi\gamma(\rho_0)\rho_0^{4-m}}{4m^2 r^m} e^{im\varphi - i\omega_0 t} \quad (21)$$

Сравнивая (20) и (21), получим $\Phi_1/\Phi_2 = O(h)$. Таким образом, величина Φ при $t \rightarrow \infty$ имеет вид той же гармоники (20), что и в начальный период, имея при этом существенно большую амплитуду. Таким образом, резонансное нарастание деформации границы приводит к значительному изменению возмущений во внешней области. Это изменение будет сказываться прежде всего на интенсификации аэродинамического звука, излучаемого вихрем при учете сжимаемости, поскольку звуковое поле определяется именно дальней асимптотикой несжимаемого потенциала поля скорости.

Действительно, при учете слабой сжимаемости легко перейти от гармонических по времени возмущений потенциала несжимаемого течения при $r \rightarrow \infty$ к потенциалу звуковой волны. Для каждой гармоники вида $e^{im\varphi - i\omega_0 t}$ звуковое поле должно иметь вид функции Ганкеля, описывающей уходящие волны,

$$\Phi_a = CH_m^{(1)}(kr), \quad k = \frac{\omega_0}{c} \equiv M(m-1)$$

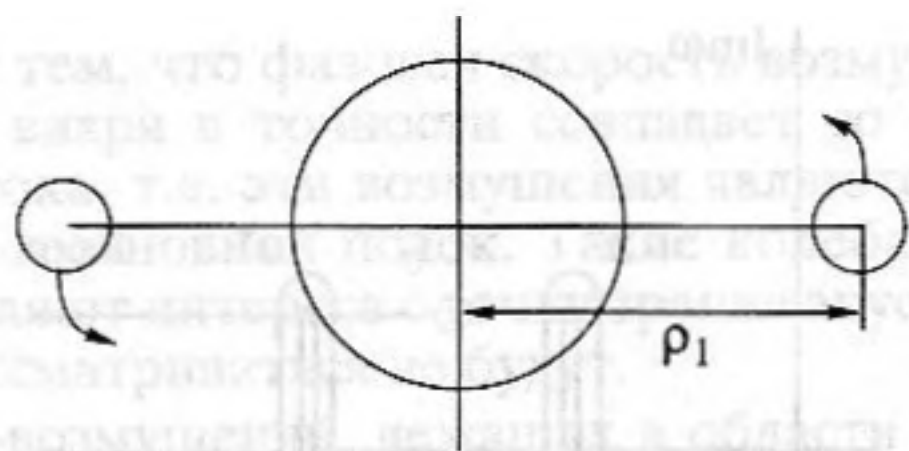


Рис. 3. Два вихревых пятна около вихревого ядра.

где ω_0 – частота колебаний, $M = \Omega_0 a / 2c$ – характерное число Маха. Рассматривая выражения (20) и (21) как главный член асимптотического разложения для Φ_a при $r \rightarrow 0$, легко определить амплитуду звуковой волны как в начальный период, так и через большой промежуток времени:

$$\Phi_a = \frac{h\pi\rho_0^{m+1}JM^m(m-1)^m}{2^m m!} \times \quad (22)$$

$$\times \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr - i\omega_0 t + im\varphi - i\pi/4 - i\pi m/2}, \quad t \ll \rho_0/h,$$

$$\Phi_a = \frac{i\pi^2 \gamma(\rho_0)\rho_0^{4-m}M^m(m-1)^m}{2^{m+2}mm!} \times \quad (23)$$

$$\times \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr - i\omega_0 t + im\varphi - i\pi/4 - i\pi m/2}, \quad t \gg \rho_0/h,$$

где величина J определена формулой (20). Таким образом, за время резонансного взаимодействия происходит существенная интенсификация звукового излучения.

Пусть теперь в окрестности основного вихря в начальный момент расположены локализованные вихревые пятна малого размера h . Эволюция такого течения может быть легко описана на основе полученного выше решения об эволюции вихревого слоя.

Раскладывая начальную завихренность в ряд Фурье, получим

$$\Omega(\rho, \varphi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\rho) \cos n\varphi, \quad (24)$$

$$\gamma_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int \Omega(\rho, \varphi, 0) \cos n\varphi d\varphi.$$

Легко показать, что коэффициенты γ_n имеют порядок, не больший чем $O(\Omega h)$. Тогда для того, чтобы поле скорости, создаваемое вихревыми пятнами, могло рассматриваться как возмущение, необходимо, чтобы

$$\Omega h \ll 1. \quad (25)$$

Отметим, что это условие выполняется также и в том случае, когда завихренность в пятнах имеет

величину того же порядка, что и в основном вихре. Необходимо лишь, чтобы был мал размер пятен.

Пусть для определенности имеется два вихревых пятна, расположенные при $t = 0$ по разные стороны от основного вихря на некотором расстоянии $r = \rho_1$ (рис. 3). Пятна имеют круговую форму радиуса $h \ll 1$. Представим начальную завихренность в виде ряда (24), где каждая гармоника представляет собой слой завихренности, расположенный в полосе $|\rho - \rho_1| \leq h$. При выполнении условия (25) эволюция каждой гармоники происходит независимо и описывается решением (18).

Найдем теперь звуковое излучение рассматриваемой вихревой системы, предполагая для простоты, что ρ_1 в точности совпадает с одной из резонансных линий тока $r = \rho_0$. С точки зрения акустики наибольший интерес представляет вторая угловая гармоника $m = 2$, поскольку остальные гармоники, имеющие более высокую мультипольность, будут давать вклад, который в соответствии с (22), (23) пропорционален более высоким степеням малого числа M . Поэтому будем полагать, что линия тока $r = \rho_0$ – критический слой колебания с $m = 2$. Коэффициент γ_2 в предположении круговой формы пятен имеет вид

$$\gamma_2(\rho) = \frac{2h\Omega}{\pi\rho_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho - \rho_0}{h}\right)^2}, \quad |\rho - \rho_0| \leq h. \quad (26)$$

Звуковое излучение рассматриваемой системы будет определяться формулами (22), (23) с величиной γ (26) и $m = 2$. Поскольку $\gamma(\rho_0) = O(\Omega h)$, то излучение в начальный период (20) имеет величину $O(\Omega h^2)$. С течением времени амплитуда квадрупольного звукового излучения в соответствии с (21) возрастет в h^{-1} раз, где h – масштаб неоднородности.

Рассмотренные выше пятна завихренности могут служить прообразом мелкомасштабных возмущений в окрестности ядра крупномасштабного вихря в турбулентном течении. Если предположить, что в начальный момент вихревое ядро погружено в газ слабых вихревых пятен разного масштаба, то первоначально звуковое излучение будет представлять собой широкополосный сигнал, связанный в линейном приближении с вращением вихревых пятен на различных линиях тока. Однако проявление описанного выше механизма может привести к тому, что те пятна, которые лежат на линии тока, соответствующей критическому слою моды дискретного спектра с $m = 2$, будут возбуждать вторую гармонику деформации границы ядра, и в излучении может появиться выделенная дискретная составляющая.

Если мелкомасштабная турбулентность в окрестности ядра рассматривается усредненно и учитывается только как турбулентная вязкость, то рассмотренного в работе эффекта не возника-

ет. В этом случае мелкомасштабная турбулентность приводит к неустойчивости дискретных мод с $m \geq 3$ [16], то есть наиболее эффективно излучающая звук мода $m = 2$ в таком приближении не нарастает. Учет пространственной неоднородности мелкомасштабных вихрей может приводить к эффекту возбуждения всех дискретных мод, включая и моду с $m = 2$ за счет механизма алгебраической неустойчивости.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00568) и Американского фонда гражданских исследований и разработок (CRDF) (грант RE2-134).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов Е.В., Гиневский А.С. Когерентные структуры в турбулентных струях и следах // Итоги науки и техники. Сер. "Механика жидкости и газа". Т. 20. ВИНТИ. 1986. С. 3–84.
2. Saffman P.G. Vortex Dynamics // Cambridge University Press. 1992.
3. Broadbent E.G., Moore D.W. Acoustic destabilisation of vortices // Phil. Thans. Roy. Soc. 1979. V. A290. P. 353–371.
4. Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А. Об акустической неустойчивости аксиального вихря // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 192–198.
5. Копьев В.Ф., Чернышев С.А. Длинноволновая неустойчивость вихревого кольца // Изв. АН СССР. МЖГ. 1995. Т. 30. № 6. С. 72–78.
6. Dritschel D.G. The stability of elliptical vortices in an external straining flow // J. Fluid Mech. 1990. V. 210. P. 223–261.
7. Kopiev V.F., Chernyshev S.A. Vortex ring eigen-oscillations as a source of sound // J. Fluid Mech. 1997. V. 341. P. 19–57.
8. Chernyshev S.A., Kopiev V.F. Effect of initial disturbances on excitation of sound generating oscillations in a localized vortex // AIAA Paper-97-1670. 1997. 11 p.
9. Case, K.M. Stability of inviscid plane Couette flow // Phys. Fluids. 1960. V. 3. № 2. P. 143–148.
10. Maslowe S.A. Shear flow instabilities and transition. In: Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence / Eds H.L. Swiney, J.P. Gollub. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1981. P. 181–228.
11. Сазонов И.А. Возбуждение волн Ван Кампена-Кейса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. Т. 22. № 1.
12. Landahl, M.T. A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. Pt. 2. P. 243–251.
13. Chimonas, G. Algebraic disturbances in stratified shear flows // J. Fluid Mech. 1979. V. 90. Pt. 1. P. 1–19.
14. Сазонов, И.А. Взаимодействие волн непрерывного спектра между собой и с волнами дискретного спектра // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. Т. 24. № 4.
15. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
16. Рабинович М.И., Суцук М.М. Когерентные структуры в турбулентных течениях. Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С. 56–85.

Possible Intensification of Sound Emission by a Large-scale Vortex in a Weak Spatially Inhomogeneous External Field

V. F. Kop'ev and S. A. Chernyshev

One of the mechanisms whereby unsteady disturbances are excited in vortex flows and, hence, sound is generated, is the evolution of unsteady modes possessing complex natural frequencies. The aim of this study was to demonstrate that, in addition to an ordinary instability, noise generation may involve another mechanism, known as algebraic instability, whereby unsteady disturbances are excited in vortex flow.

With algebraic instability, an increase takes place in the amplitude of the vibrations whose frequencies are real. This signifies that disturbances can be excited in the flow and noise can be generated by such disturbances even when the ordinary instability is absent or suppressed for some reason. It is enough for a vortex inhomogeneity (vortex spots) to be present near the critical layer of one of the discrete-spectrum modes to trigger this process. The vortex spots are passively displaced by the mainstream and are ineffective in generating sound by themselves. However, they are resonantly coupled to another type of disturbances which are effective sound generators. They are discrete-spectrum vibrations which are the deformations of the vortex boundary.