

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ В СЛУЧАЕ ТУРБУЛИЗАЦИИ СРЕДЫ

© 1998 г. Р. Г. Галиуллин, Э. Р. Галиуллина, Е. И. Пермяков

Казанский государственный университет
420008 Казань, ул. Кремлевская, 18

Поступила в редакцию 10.04.97 г.

Распространение звуковых волн в каналах в ламинарном режиме течения изучено весьма подробно [1]. В исследовании [1] рассматриваются условия, когда нелинейность уравнений движения слабо искажает форму колебаний. Для этого необходимо, чтобы длина образования разрыва в звуковой волне $l_s = 2c_0^2 / ((\kappa + 1)\omega u_r)$ [2] была велика по сравнению с длиной волны λ , т.е.

$$l_s / \lambda \gg 1. \quad (1)$$

(Здесь c_0 – скорость звука в невозмущенной среде, $\kappa = c_p / c_v$, ω_0 – циклическая частота колебаний, u_r – амплитуда колебаний скорости излучателя.) Очевидно, условие (1) хорошо выполняется для малых амплитуд колебаний и невысоких частот.

Однако, сейчас можно считать хорошо установленным, что колеблющееся течение в канале становится турбулентным при выполнении условия [3]:

$$Re_\omega = \frac{u_m^2}{\omega \nu} \gg 1.6 \times 10^5, \quad (2)$$

где u_m – амплитуда колебаний скорости в волне, ν – коэффициент кинематической вязкости среды. Условия (1) и (2) могут быть удовлетворены одновременно. Например, в воздухе для $u_m \approx 10$ м/с $l_s / \lambda \approx 4.4$ и должно быть $\omega < 42$. Таким образом, в случае большой амплитуды колебаний и низкой частоты движение в звуковой волне должно быть турбулентным, причем нелинейность уравнений движения проявляется лишь на расстояниях порядка нескольких длин волн.

Ранее в работах [3, 4] решалась задача об осциллирующем турбулентном течении в канале. В [3] было получено аналитическое решение, а в [4] эта задача решалась численно с использованием нестационарной версии k - ϵ -модели. Все эти результаты относятся к случаю квазистационарной турбулентности, который имеет место при малых значениях числа Струхала: $Sh = \omega R / u_m \ll 1$ (R – полуширина канала). Границы области квазистационарной турбулентности не слишком широки [3], поэтому представляют интерес результаты, отно-

сящиеся к более широкой области, когда предположение о квазистационарном характере турбулентности не выполняется.

В настоящей работе предлагается полуэмпирическая модель турбулентности, позволяющая получить аналитические формулы, описывающие движение звуковой волны в плоском канале. Предложенная модель турбулентности не использует предположение о квазистационарности. Полученные теоретические результаты сравниваются с данными экспериментов.

Положим, что длина канала $L \gg R$. Предположим далее, что процесс распространения звуковых волн – адиабатический. Это предположение, выполнимое для слабосжимаемых жидкостей, позволяет сильно упростить вычисления.

Введем безразмерные переменные: $\bar{u} = u / c_0$, $\bar{v} = v / c_0$, $\bar{p} = (p - p_0) / \rho_0 c_0^2$, $\bar{\rho} = (\rho - \rho_0) / \rho_0$, где u , v , p и ρ – продольная и поперечная компоненты скорости, давление и плотность соответственно, индексом “0” обозначены величины в невозмущенной среде. Далее будем использовать безразмерные поперечную и продольную координаты: $\bar{y} = y / R$, $z = x / L$ и безразмерное время $\tau = \omega t$. Считаем, что движение характеризуется тремя безразмерными параметрами: Re_ω , $k = \omega L / c_0$ и $H = R \sqrt{\omega / \nu}$.

Будем использовать гипотезу о турбулентной вязкости, т.е. заменим в уравнениях движения $\nu \rightarrow \nu_{ef} = \nu [1 + w(1 - \bar{y})]$ [5]. Здесь w – комплексная постоянная, зависящая от Re_ω . Эту зависимость можно определить из сравнения теории и эксперимента. Уравнения движения при сделанных предположениях имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left\{ [1 + w(1 - \bar{y})] \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right\} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \frac{L}{kR} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0, \quad \bar{p} = \bar{p}.$$

Граничные условия таковы: на стенке канала $\bar{y} = 1$, $\bar{u} = \bar{v} = 0$; в центре канала ($\bar{y} = 0$) из соображений симметрии следует: $\partial \bar{u} / \partial \bar{y} = 0$, $\bar{v} = 0$.

Решения системы уравнений (3) ищем в виде: $\bar{u} = u(\bar{y})f(z)\exp(i\tau)$, $\bar{p} = h(z)\exp(i\tau)$. Тогда

$$u(\bar{y}) = C_1 J_0(\eta) + C_2 Y_0(\eta) + \frac{i h'}{k f}, \tag{4}$$

$$\eta = 2i^{3/2} H \sqrt{\frac{w_1 - \bar{y}}{w}}, \quad w_1 = \frac{w+1}{w},$$

где C_1 и C_2 – константы, $J_0(\eta)$ и $Y_0(\eta)$ – функции Бесселя [6]. Подставляя (4) в граничные условия, получим

$$\bar{u} = \frac{i}{k} h'(z) \times \left\{ 1 - \frac{1}{K} [J_0(\eta) Y_1(\Omega_1) - J_1(\Omega_1) Y_0(\eta)] \right\} \exp(i\tau),$$

$$K = J_0(\Omega) Y_1(\Omega_1) - J_1(\Omega_1) Y_0(\Omega), \tag{5}$$

$$\Omega_1 = \eta(\bar{y} = 0) = 2i^{3/2} H \sqrt{\frac{w+1}{w}},$$

$$\Omega = \eta(\bar{y} = 1) = 2i^{3/2} \frac{H}{w}.$$

Используя (5) из третьего уравнения системы (3) легко вычислить \bar{v} :

$$\bar{v} = -\frac{R}{kL} \frac{w}{2H^{3/2}} \left\{ \frac{\eta^2}{2} (h'' + k^2 h) - \frac{h'' \eta}{K} [J_1(\eta) Y_1(\Omega_1) - J_1(\Omega_1) Y_1(\eta)] + \Phi(z) \right\} \exp(i\tau).$$

Граничные условия для \bar{v} приводят к системе уравнений:

$$\frac{\Omega^2}{2} (h'' + k^2 h) - \frac{h'' \Omega M}{K} + \Phi(z) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\Omega_1^2}{2} (h'' + k^2 h) + \Phi(z) = 0,$$

где $M = J_1(\Omega) Y_1(\Omega_1) - J_1(\Omega_1) Y_1(\Omega)$. Из (6) следует, что

$$\Phi(z) = -\frac{\Omega_1^2}{2} (h'' + k^2 h), \tag{7}$$

$$\left(1 - \frac{i^{1/2} M}{KH} \right) h'' + k^2 h = 0.$$

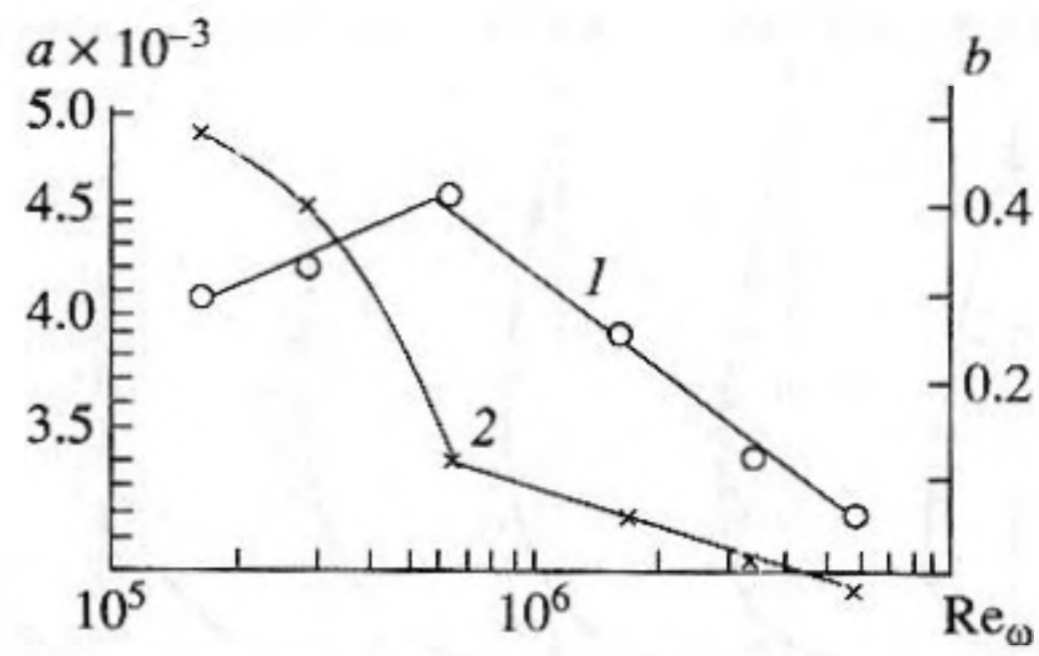


Рис. 1. Зависимости $a(\text{Re}_\omega)$ и $b(\text{Re}_\omega)$. 1 – a , 2 – b .

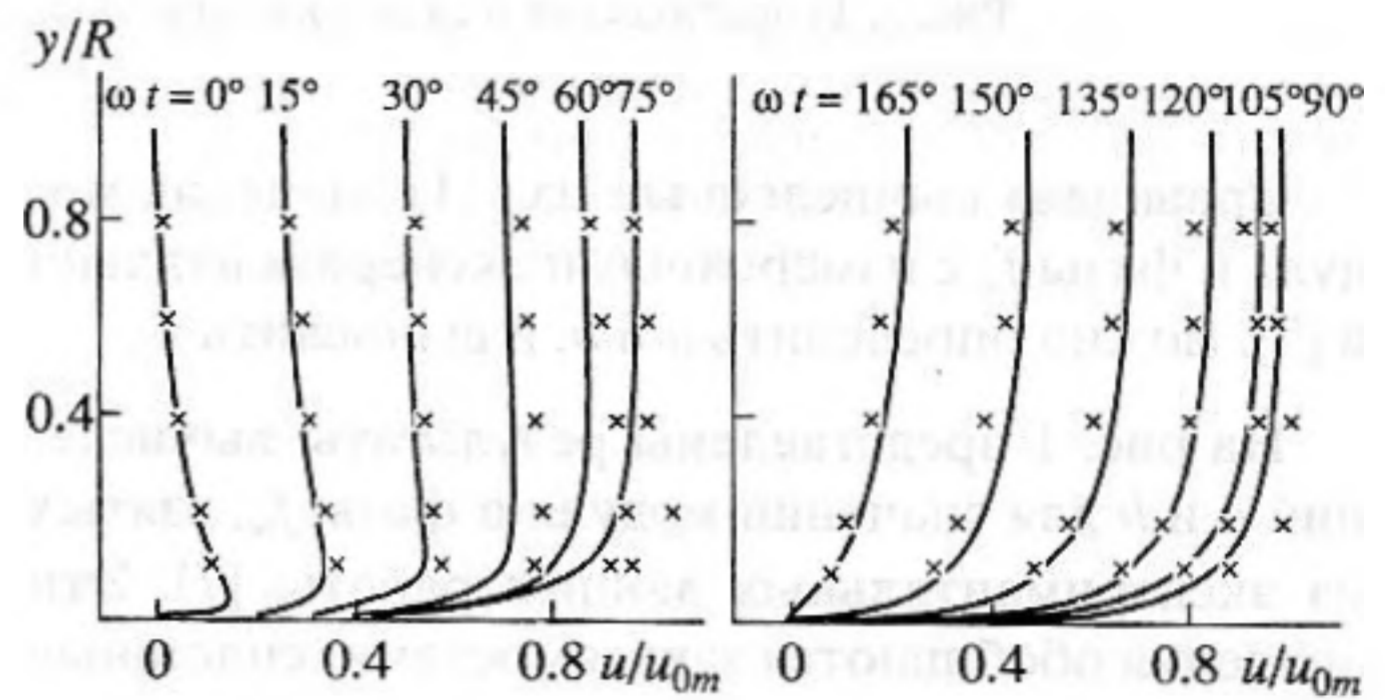


Рис. 2. Теоретические и экспериментальные (точки [7]) профили скорости.

Решение (7) очевидно: $h(z) = A \exp(i\Gamma z) + B \exp(-i\Gamma z)$, где A и B – в общем случае комплексные константы,

$$\Gamma = k \left(1 - \frac{i^{1/2} M}{KH} \right)^{-1/2}. \tag{8}$$

Найдем зависимость постоянной w в (3) от Re_ω . Представим w в виде: $w = a \exp(ib)$. Вычисляя касательное напряжение τ_w на стенке, получим

$$\tau_w = \rho v_{ef} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=R}, \tag{9}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho u_{0m}^2} = -\frac{2i^{3/2} H}{K \text{Re}} [J_1(\Omega) Y_1(\Omega_1) - Y_1(\Omega) J_1(\Omega_1)] \exp(i\tau),$$

где u_{0m} – амплитуда колебаний скорости на оси канала (при $\bar{y} = 0$), $\text{Re} = 2R u_{0m} / \nu$. Вводя коэффициент трения f_w по формуле [7]:

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho f_w u_{0m}^2 \tag{10}$$

и приравнявая τ_w из (9) и (10), получаем

$$f_w = -\frac{4i^{3/2} H}{K \text{Re}} \times [J_1(\Omega) Y_1(\Omega_1) - Y_1(\Omega) J_1(\Omega_1)] \exp(i\tau). \tag{11}$$

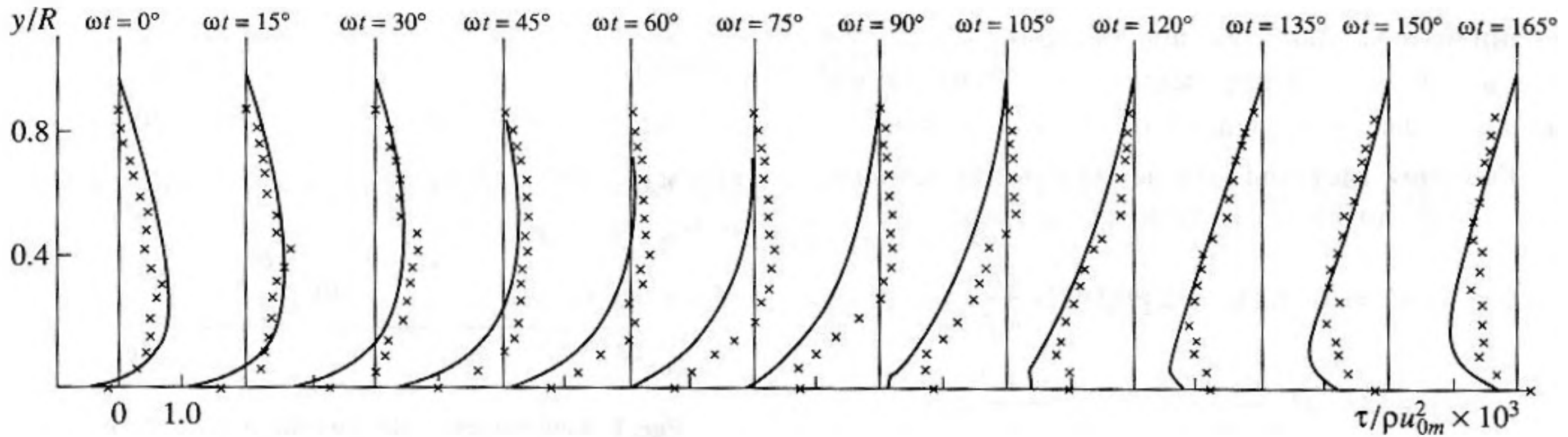


Рис. 3. Теоретические и экспериментальные (точки) [7] профили касательного напряжения.

Сравнивая вычисленные из (11) значения модуля и фазы f_w с измеренными экспериментально в [7], можно определить a и b , и вычислить w .

На рис. 1 представлены результаты вычислений a и b для значений модуля и фазы f_w , взятых из экспериментальных данных работы [7]. Эти значения обобщаются зависимостями (сплошные линии на рис. 1): $a = 40215 \text{Re}_\omega^{-0.164}$ при $6.5 \times 10^5 \leq \text{Re}_\omega \leq 6 \times 10^6$, $a = 1604 \text{Re}_\omega^{0.077}$ при $1.6 \times 10^5 \leq \text{Re}_\omega \leq 6.5 \times 10^5$; $b = \ln(2.56 \text{Re}_\omega^{-0.061})$ при $6.5 \times 10^5 \leq \text{Re}_\omega \leq 6 \times 10^6$, $b = 0.57[1 + 0.63(553.5)^r]^{-1}$, где $r = 10^{-6} \text{Re}_\omega$, при $1.6 \times 10^5 \leq \text{Re}_\omega \leq 6.5 \times 10^5$.

Профили скорости, рассчитанные по (5) и измеренные экспериментально в работе [7] при $\text{Re}_\omega = 6 \times 10^6$, $u_{0m} = 2$ м/с в воде изображены на рис. 2. Совпадение экспериментальных данных с теоретическими можно считать удовлетворительным.

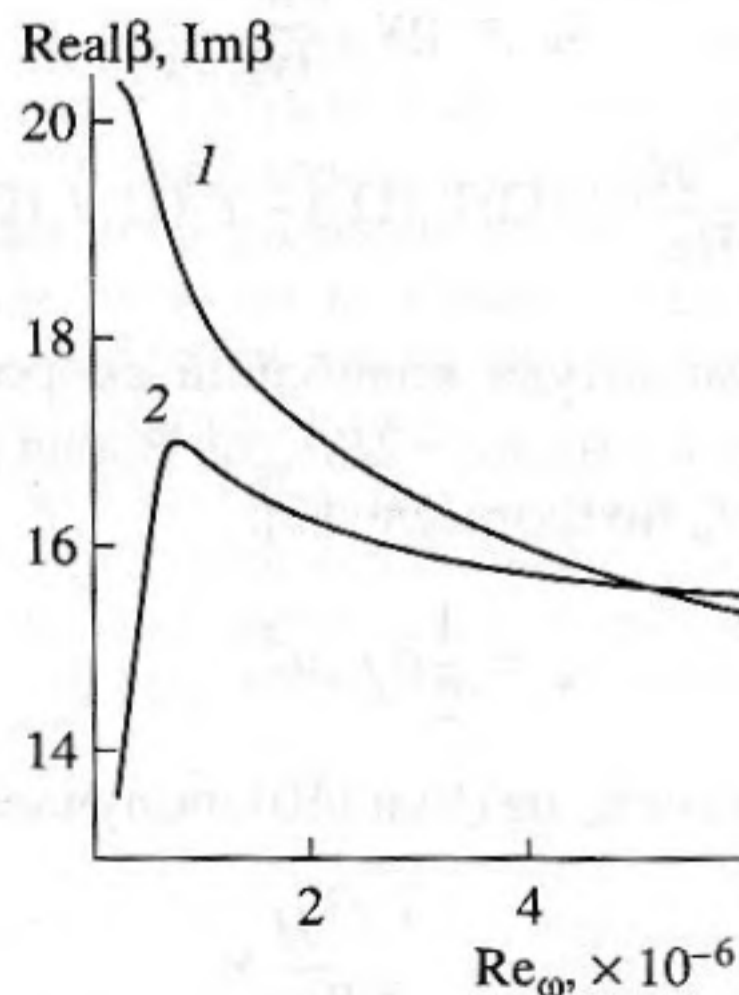


Рис. 4. Зависимости $\text{Real} \beta$ (1) и $\text{Im} \beta$ (2) от Re_ω .

Выпишем выражение для касательного напряжения, следующее из (5) и (9):

$$\frac{\tau}{\rho u_{0m}^2} = -\frac{2i^{3/2} H}{K \text{Re} \sqrt{w}} \frac{1 + w(1 - \bar{y})}{\sqrt{w_1 - \bar{y}}} \times [J_1(\eta) Y_1(\Omega_1) - Y_1(\eta) J_1(\Omega_1)] \exp(i\tau). \quad (12)$$

Хорошее качественное совпадение экспериментальных данных [7] для тех же условий, что и на рис. 2, с расчетными кривыми (формула (12)) продемонстрировано на рис. 3. Количественное совпадение хуже, чем для профилей скорости, однако следует учесть, что и точность измерения касательного напряжения обычно хуже, чем скорости [8].

Для целей акустики представляют интерес зависимости дисперсии и коэффициента поглощения звука от частоты, вязкости и т.п. В рассматриваемом случае эти зависимости следуют из (8). Сравнительно простые формулы можно получить в двух предельных случаях: $2H/\sqrt{w} \ll 1$ (аналог низкочастотного случая в ламинарном режиме течения), который достигается при $H \ll 30$, и $2H/\sqrt{w} \gg 1$, $2H/w \ll 1$ – высокочастотный случай. Второе неравенство в высокочастотном случае учитывает тот факт, что $w \gg 1$. Используя для анализа (8) асимптотические разложения функций Бесселя [6], получим при $2H/\sqrt{w} \ll 1$

$$\Gamma \approx \frac{k}{H} \beta(\text{Re}_\omega),$$

$$\beta(\text{Re}_\omega) = -i^{3/2} \sqrt{\frac{w}{w_1 [\ln(1+w) - 3/2]}} = \text{Real} \beta(\text{Re}_\omega) - i \text{Im} \beta(\text{Re}_\omega).$$

Графики функций $\text{Real} \beta(\text{Re}_\omega)$ и $\text{Im} \beta(\text{Re}_\omega)$ в исследуемом диапазоне чисел Re_ω представлены на

рис. 4. В высокочастотном случае

$$\Gamma \approx k \left\{ 1 - \frac{i\omega}{2\pi H^2} \times \frac{1}{\operatorname{tg}(\Omega_1 - 3\pi/4) - (2/\pi)[\ln(\Omega/2) + \gamma]} \right\},$$

где $\gamma = 0.5772$ – постоянная Эйлера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tijdeman H.* On the propagation of sound waves in cylindrical tubes // *J. of Sound and Vibration.* 1975. V. 39. № 1. P. 1–33.
2. *Руденко О.В., Солюян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.

3. *Пермяков Е.И.* Стационарные течения в осциллирующих потоках в трубах в случае квазистационарной турбулентности // *ПМТФ.* 1993. № 5. С. 56–62.
4. *Mankbadi Reda R., Mobark Amin.* Quazi-steady turbulence modeling of unsteady flows // *Int. J. Heat and Fluid Flow.* 1991. V. 12. № 2. P. 122–129.
5. *Галицкий Б.М., Рыжов Ю.А., Якуш Е.В.* Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977. 256 с.
6. *Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.* М.: Наука, 1979. 830 с.
7. *Jensen B.L., Sumer B.M., Fredsøe J.* Turbulent oscillatory boundary layers at high Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* 1989. № 206. P. 265–297.
8. *Фафурин А.В., Кузьмин В.В., Григорьев М.М.* Трение и баланс количества движения при нестационарном турбулентном течении в цилиндрическом канале // В кн. *Теплообмен и трение в двигателях и энергетических установках летательных аппаратов.* Казань, 1989. С. 58–66.