АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1998, том 44, № 4, с. 556–558

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.3:534.14001

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ *R*-ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

© 1998 г. В. Ф. Кравченко, В. Л. Рвачев, Н. Д. Сизова

Институт радиотехники и электроники Российской Академии наук
103907 Москва, центр, ГСП-3, ул. Моховая, 11
Институт проблем машиностроения НАН Украины
310046 Харьков 46, ул. Дм. Пожарского, 2/10

Поступила в редакцию 30.09.94 г.
После доработки 13.10.97 г.

В данной работе приводятся исследования некоторых задач дифракции упругих волн, выполненные с использованием теории *R*-функций (функций В.Л. Рвачева) [1, 2], которая привнесла в методы математической физики конструктивные элементы алгебры логики. Это в свою очередь позволило сформулировать понятие структуры решения (т.е. формы, в которой отыскивается решение) как функциональное соотношение

$$U = B(\Phi)$$

где U – решение задачи, B – известный оператор, учитывающий граничные условия краевой задачи, определяемый на множестве $\mathfrak{M}$, а элемент Φ выбирается так, чтобы наилучшим образом (в том или ином смысле) удовлетворить исходному уравнению.

Основная идея построения структурных формул, учитывающих граничные условия, состоит в разложении в ряд по степеням функции ω или ω_i [1], где ω, ω_i – левые части нормализованных уравнений границы области $\partial\Omega$ или их участков. Для задач дифракции волн в электродинамике такие структуры построены [2].

Как известно [3–6], линейное уравнение движения для идеальноупругого изотропного тела Ω имеет вид

$$\mu\Delta\mathbf{U} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\mathbf{U}) - p\ddot{\mathbf{U}} = 0, \qquad (1)$$

где λ, μ, p – физические константы среды, $\mathbf{U}$ – вектор упругих перемещений с компонентами u_1, u_2, u_3, $\ddot{\mathbf{U}} = \dfrac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}$.

Уравнение (1) можно преобразовать к системе волновых уравнений, если вектор перемещений $\mathbf{U}$ представить в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_p + \mathbf{U}_s, \qquad (2)$$

где вектор $\mathbf{U}_p$ описывает потенциальное поле, $\mathbf{U}_s$ – соленоидальное,

$$\mathbf{U}_p = \nabla\Phi, \quad \mathbf{U}_s = \nabla\times\mathbf{\Psi}, \quad \nabla\mathbf{\Psi} = 0.$$

Система волновых уравнений

$$\Delta\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi} = 0,$$

$$\Delta\mathbf{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\mathbf{\Psi}} = 0 \qquad (3)$$

дает возможность определить тензоры деформаций ε и напряжений σ следующим образом:

$$2\varepsilon = \nabla\mathbf{U} + (\nabla\mathbf{U})^*,$$

$$\sigma = \lambda\varepsilon E + 2\mu\varepsilon, \qquad (4)$$

где знак * означает транспонирование, E – единичная матрица, c_1 – скорость распространения продольных волн, c_2 – скорость распространения поперечных волн.

К системе уравнений (4) необходимо присоединить начальные и граничные условия на границе Γ тела Ω.

Если на границе Γ (кусочно-гладкая поверхность) тела заданы напряжения, то граничные условия можно записать в виде

$$\sigma_{ij}n_i|_\Gamma = p_{ij}(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad i, j = 1, 2, \qquad (5)$$

где n_i – внешняя нормаль, $p_{ij}(x, t)$ – внешняя нагрузка на границе Γ.

В случае, если на границе Γ тела Ω заданы перемещения, граничные условия имеют вид

$$u_i|_\Gamma = f_i(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad i = 1, 2, \qquad (6)$$

Для смешанных граничных условий, когда на части границы Γ_1 тела Ω напряжения, на другой части Γ_2 – перемещения, граничные условия представляются соотношениями

$$\sigma_{ij}n_i|_\Gamma = p_j(x, t), \quad x \in \Gamma_1, \qquad (7)$$

$$u_i|_\Gamma = f_i(x, t), \quad x \in \Gamma_2. \qquad (8)$$

Кроме граничных условий (5)–(8), необходимо задание начальных условий.

Решения задач дифракции упругих волн, полученные с помощью метода разделения переменных, интегральных преобразований, метода возмущения формы границы и др. [5, 6], как правило,

представляются в виде рядов, составленных из специальных функций.

Для волновой задачи (3)–(5) в случае, когда тело находится в условиях плоской деформации, т.е. $\mathbf{U}e_3 = 0$, $\mathbf{\Psi} = \Psi e_3$, $\Psi = \Psi(x_1, x_2, t)$, $\Phi = \Phi(x_1, x_2, t)$, структурные формулы решений могут быть представлены соотношениями

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial x_1}(\Phi_1 + \Psi_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\Psi_1 - \Phi_2) + \Phi_0, \qquad (9)$$

$$\Psi = \frac{\partial}{\partial x_2}(\Phi_1 - \Psi_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\Phi_2 - \Psi_1) + \Psi_0, \qquad (10)$$

где

$$\Phi_i = \Phi_{i1} + \omega D_1 \Phi_{i1} + \omega T_1 \Phi_{i1} \frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu},$$

$$\Psi_i = \omega T_1 \Phi_{i1}\left[\left(\frac{\partial\omega^2}{\partial x}\right)\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} + \left(\frac{\partial\omega^2}{\partial x}\right)\right]; \quad i = 1, 2,$$

$$\Phi_0 = \frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{\Phi}_0 + \frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{\Psi}_0, \quad \Psi_0 = \frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{\Phi}_0 - \frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{\Psi}_0,$$

$$\tilde{\Phi}_0 = \frac{1}{\lambda+\mu}\omega\frac{\partial\omega}{\partial x_1}p_{ii} + \frac{1}{\mu}\omega\frac{\partial\omega}{\partial x_2}p_{ij},$$

$$\tilde{\Psi}_0 = \frac{1}{\lambda+\mu}\omega\frac{\partial\omega}{\partial x_2}p_{ii} - \frac{1}{\mu}\omega\frac{\partial\omega}{\partial x_1}p_{ij},$$

$\omega = \omega(x)$ – функции, описывающие уравнения границы Γ области Ω: обладающие следующими свойствами: $\omega(x) \in C^2$, $x \in R^n$, причем $\omega(x) > 0$ для $x \in \Omega$; $\omega(x) = 0$, $x \in \Gamma$; $\omega(x) < 0$, $x \bar{\in} \Omega$; T_1, D_1 – дифференциальные операторы [1], продолжающие граничные условия внутрь области; в качестве функций Φ_{i1} ($i = 1, 2$) могут быть выбраны классические полиномы или полиномы с локальными носителями.

Решения (9)–(10) при этом имеют вид функциональных соотношений, состоящих из элементарных функций или суперпозиции элементарных и специальных функций. При этом учитывается на аналитическом уровне геометрия области Ω, а на участках ее границы Γ_k граничные условия. Кроме того, соотношения (9)–(10) позволяют учесть (за счет произвола в выборе функций Φ_{i1} ($i = 1, 2$)) имеющуюся априорную информацию о точном решении задачи (если оно есть), позволяют приблизиться к точному решению в метрике соответствующего функционального пространства. Применение одного из вариационных методов дает возможность удовлетворить исходной системе волновых уравнений (3).

Рассмотрим в качестве примера исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности цилиндрической полости произвольной формы. Действующей нагрузкой в этом случае является плоская продольная волна с круговой частотой $\tilde{\omega}$. Необходимо найти решение системы уравнений Гельмгольца

$$\Delta\Phi + \frac{\tilde{\omega}^2}{c^2}\Phi = 0,$$

$$\Delta\Psi + \frac{\tilde{\omega}^2}{c_2^2}\Psi = 0 \qquad (11)$$

при граничных условиях на поверхности полости Γ

$$(\sigma_{rr}^0 + \sigma_{rr}^*)\big|_\Gamma = 0,$$
$$(\sigma_{r\theta}^0 + \sigma_{r\theta}^*)\big|_\Gamma = 0, \qquad (12)$$

на бесконечности должны удовлетворяться условия излучения

$$\varphi = O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + i\alpha\varphi = o\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right), \quad \rho \longrightarrow \infty, \qquad (13)$$

где σ_{rr}^0, $\sigma_{r\theta}^0$ – компоненты напряженного состояния в падающей волне, σ_{rr}^*, $\sigma_{r\theta}^*$ – компоненты напряженного состояния в дифрагированной волне, под φ понимаются потенциалы отраженных волн Φ, Ψ, под α – скорости распространения волн c_1, c_2,

$$c_1 = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$$

Перемещения u_i и напряжения σ_{ij} ($i, j = 1, 2$) определяются из соотношений (4).

Решение задачи (11)–(13) будем искать в виде (9)–(10) в ограниченной области Ω_0, на границе Γ_0 которой задано граничное условие нелокального типа [2], моделирующее граничные условия (13):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = S_1(\Phi), \quad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = S_2(\Psi), \qquad (14)$$

где $S_1(\Phi)$, $S_2(\Psi)$ – псевдодифференциальные операторы, учитывающие условия излучения (13) [2].

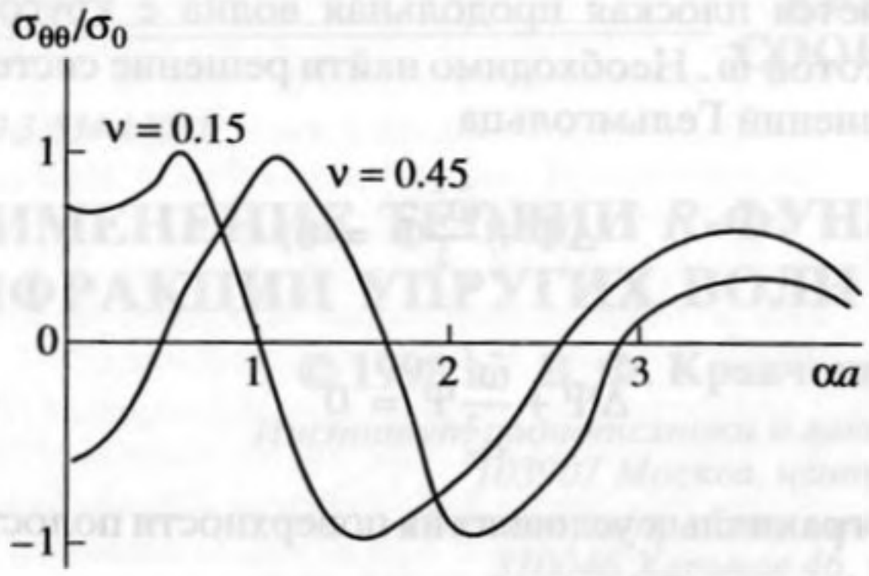
Для полости с круговым сечением функция ω запишется выражением

$\omega = R^2 - x^2 - y^2$, где R – радиус полости;

если рассматривается полость прямоугольная со сторонами a, в и скругленными углами, то

$$\omega = (f1 \;\&\; f2)!(f3\;!\;f4)\;!\;(f5\;!\;f6),$$

где $f1 = (b^2 - x_1^2)$, $f2 = (a^2 - x_2^2)$, $fi = ri^2 - (x_1 - x_{i1})^2 - (x_2 - x_{i2})^2$, $i = 3$–6; ri, x_{i1}, x_{i2} – соответственно ра-



Зависимость напряжения $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ от безразмерного волнового числа αa на границе круговой цилиндрической полости при $\theta = 0$.

диусы и координаты центров окружностей, с помощью которых скругляются углы прямоугольника, &, ! – знаки R-операций [1].

На рисунке представлена зависимость динамического напряжения $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ (σ_0 – амплитуда напряжения σ_{rr} в падающей волне) от безразмерного волнового числа αa ($\alpha = \omega/c_1$, $a = r - R$) полости радиуса R для значений коэффициента Пуассона $\nu = 0.15$; $\nu = 0.45$ при $t = 0$ и $\theta = 0$. Результаты получены в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ [7] и дают хорошее совпадение с данными работы [5].

Исследования, представленные в данной публикации, выполнены при содействии Международной Соросовской Программы поддержки образования в области точных наук Международного фонда "Возрождения", грант SPU 041055.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. // Киев: Наук. думка, 1982. 556 с.
2. *Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Шейко Т.И.* Метод построения новых структур решения внешних задач электродинамики для областей сложной формы // ДАН СССР, 1990. Т. 311. № 1. С. 65–80.
3. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
4. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости // Киев: Наук. думка, 1972. 502 с.
5. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. // Киев: Наук. думка, 1978. 308 с.
6. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
7. *Рвачев В.Л., Шевченко А.Н.* Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. Киев: Техника, 1988. 197 с.