АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1998, том 44, № 6, с. 757–763

УДК 519.2+534.(2+6)

РЕКОНСТРУКЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОТЯЖЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ ЗВУКА

© 1998 г. Н. К. Вдовичева, В. И. Турчин, И. Ш. Фикс

Институт прикладной физики РАН
603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: sazontov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 04.12.97 г.

Рассмотрена задача определения ковариационной матрицы, характеризующей распределенный источник звука, по результатам измерения его ближнего поля антенной решеткой. Исследования выполнены для неподвижного и движущегося источников в неоднородной среде при априорно известной корреляционной матрице шумов. Приведены результаты численных расчетов ковариаций оценок.

1. Введение. При акустической диагностике различных протяженных широкополосных излучателей звука (корабли, автомобили, поезда и т.д.) обычно требуется, с одной стороны, определить, какие именно части устройств "шумят" (т.е. найти распределение зон повышенного шумоизлучения непосредственно на излучателе), а с другой стороны, достаточно точно описать излучаемое акустическое поле. Известно, что акустические излучатели полностью характеризуются распределением колебательной скорости на их поверхности и соответствующими граничными условиями, однако измерить эти величины в случае движущихся излучателей практически невозможно. Поэтому в разрабатываемых методах диагностики ограничиваются рассмотрением некоторых приближенных моделей, представляющих излучатели в виде совокупности элементарных источников. В зависимости от способа расположения элементарных источников (например, непосредственно на поверхности излучателя, внутри объема, занимаемого излучателем, и т.д.) и их типа (монополи, диполи и т.д.) возможны различные постановки задачи диагностики. Каждая из них имеет свою специфику, зависящую от формы излучателя. Во многих случаях хорошей моделью протяженных шумящих устройств может являться одномерный ("нитевидный") излучатель с неизвестным случайным распределением монопольных источников на каждой частоте f заданного диапазона. В рамках такой модели полная акустическая диагностика излучателя сводится к определению (реконструкции) либо функции когерентности распределения монопольных источников на излучателе (в случае непрерывного распределения монополей), либо корреляционной матрицы (при моделировании излучателя дискретным набором монополей). Для подобного рода задач в качестве средства измерений обычно используется приемная антенная решетка, расположенная в ближней зоне излучателя[1]. В такой постановке задача реконструкции характеристик неподвижного излучателя достаточно подробно исследовалась в [1–7], для движущегося – в [8, 9]. При этом, однако, учет движения, как правило, сводился к суммированию с некоторыми весами корреляционных матриц источников, рассчитанных независимо для каждой точки траектории движения излучателя. Корректный учет движения излучателя, по-видимому, впервые был осуществлен в работах [10, 11]. В [10], используя разложение полей источника, представляемого непрерывным распределением монополей, по плоским волнам, была реконструирована диаграмма направленности источника; в [11] рассмотрен случай конечномерной аппроксимации источника набором монополей. В настоящей работе предлагается оригинальный метод реконструкции характеристик движущегося стохастического излучателя звука.

Прежде чем перейти к решению задачи, конкретизируем схему измерений и введем необходимые обозначения. Будем предполагать, что измерения стохастического излучателя, представляемого мгновенным случайным стационарным во времени распределением спектральных компонент $c(x, f)$ (где x – координата монопольного стороннего источника на оси излучателя, f – частота), проводятся при статичном расположении излучателя относительно приемной антенны. В этом случае рассмотрение достаточно проводить для одной спектральной компоненты в узкой полосе анализа.

[1] Такая схема измерений позволяет, во-первых, достаточно хорошо спрогнозировать функцию Грина источника в случае движения излучателя в неоднородной среде, во-вторых, при разумных размерах приемной антенны – получить высокое разрешение при определении функции когерентности и, наконец, проводить измерения при максимальном отношении сигнал/помеха.

В дальнейшем будем рассматривать конечномерную аппроксимацию излучателя совокупностью точечных монопольных источников с комплексными амплитудами c_n, $n = 1, 2, \ldots, N$ (c_n – случайные гауссовы величины с нулевым средним), расположенных в узлах эквидистантной сетки на оси излучателя с шагом $\lambda/2$, λ – длина звуковой волны. Такая параметризация, как правило, позволяет достаточно хорошо описать весьма широкий класс реальных источников.

Набор комплексных амплитуд c_n будем рассматривать как случайный вектор-столбец: $\mathbf{c} = (c_1 \ldots c_N)^T$ в N-мерном пространстве[2]. Тогда излучатель полностью характеризуется ковариационной матрицей $\mathbf{G} = E\{\mathbf{c}\mathbf{c}^\dagger\}$, где $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание, индексы $\dagger$ и T обозначают эрмитово сопряжение и транспонирование соответственно. Аналогично введем в рассмотрение M-мерный сигнальный вектор на приемной антенной решетке (M – число элементов антенны): $\mathbf{p} = (p_1 \ldots p_M)^T$, где p_m – величина звукового давления на m-м приемном элементе, и вектор внешнего шума $\mathbf{q} = (q_1 \ldots q_M)^T$, где q_m – также случайные гауссовы величины с нулевым средним значением: $E\{q_m\} = 0$.

Связь между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{c}$ устанавливается очевидной формулой:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{q}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A} = [a_{mn}]$ – матрица, элементы которой a_{mn} являются значениями функции Грина для пар: n-й источник–m-й приемник. В случае свободного пространства:

$$a_{mn} = R_{mn}^{-1} \exp(ikR_{mn}), \tag{2}$$

где R_{mn} – расстояние между n-м источником и m-м приемником, $k = 2\pi/\lambda$.

Заметим, что необходимым условием, обеспечивающим единственность решения системы (1) является условие $M \geq N$, которое в дальнейшем будем считать выполненным. В случае, если измерения проводятся для различных конфигураций (т.е. при различных взаимных расположениях излучателя и приемной антенны в определенные моменты времени t_s), соответствующие величины будут отмечаться индексом s (s – номер конфигурации: $s = 1, \ldots, S$, где S – полное количество конфигураций). Время измерения t для любых s будем считать одинаковым. В случаях, когда это не может привести к недоразумению, индекс s будет опускаться.

Перейдем теперь к формулировке задачи. Пусть для каждого s имеется J независимых реализаций вектора $\mathbf{p}$: $\mathbf{p}_{s,j}$, $j = 1 \ldots J$. Учитывая естественную связь между корреляционными матрицами источника $\mathbf{G}$, сигналов на приемной антенне $\mathbf{T}_s = E\{\mathbf{p}_{s,j}\mathbf{p}_{s,j}^\dagger\}$ и шумов $\mathbf{K}_s = E\{\mathbf{q}_s\mathbf{q}_s^\dagger\}$, следующую из (1):

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{A}_s\mathbf{G}\mathbf{A}_s^\dagger + \mathbf{K}_s, \quad s = 1 \ldots S,$$

можно получить систему уравнений для определения несмещенной оценки $\hat{\mathbf{G}}$ корреляционной матрицы $\mathbf{G}$:

$$\hat{\mathbf{T}}_s = \mathbf{A}_s\hat{\mathbf{G}}\mathbf{A}_s^\dagger + \mathbf{K}_s, \quad s = 1 \ldots S, \tag{3}$$

где $\hat{\mathbf{T}}_s = J^{-1}\sum_{j=1}^{J}\mathbf{p}_{s,j}\mathbf{p}_{s,j}^\dagger$ – оценка корреляционной матрицы сигналов на приемной антенне. Нетрудно убедиться, что $\hat{\mathbf{G}}$ будет являться состоятельной оценкой $\mathbf{G}$. Тогда задача об измерении характеристик излучателя сводится к определению оценки ковариационной матрицы $\mathbf{G}$ при следующих известных факторах: геометрии задачи (т.е. матрицах $\mathbf{A}_s$), корреляционных матрицах шумов $\mathbf{K}_s$ и найденных экспериментально оценках сигнальных матриц $\hat{\mathbf{T}}_s$.

В дальнейшем будем предполагать, что шумы изотропны и не зависят от s:

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K} = I\varepsilon_0^2, \tag{4}$$

где I – единичная матрица, и ε_0^2 известно (например, измерено в отсутствии излучателя).

Прежде чем перейти к решению задачи об определении оценки матрицы $\mathbf{G}$ и ее дисперсии, условимся при $S = 1$ называть источник неподвижным, а при $S > 1$ – движущимся (под движением будем понимать последовательное изменение конфигураций)[3]. Вначале рассмотрим случай неподвижного излучателя.

2. Реконструкция характеристик неподвижного излучателя. Наиболее просто решение системы (3) в случае $S = 1$ можно получить используя метод наименьших квадратов (МНК). Тогда МНК-оценка $\mathbf{G}$:

$$\hat{\mathbf{G}} = (\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\dagger(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{K})\mathbf{A}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})^{-1}. \tag{5}$$

Учитывая независимость величин $\mathbf{A}\mathbf{c}$ и $\mathbf{q}$, легко видеть, что оценка $\hat{\mathbf{G}}$ несмещенная: $E\{\hat{\mathbf{G}}\} = \mathbf{G}$. Одной из важнейших характеристик оценки матрицы $\hat{\mathbf{G}}$ является дисперсия ее элементов $\mathrm{disp}\{\hat{g}_{nk}\}$:

$$\mathrm{disp}\{\hat{g}_{nk}\} = E\{\hat{g}_{nk}\hat{g}_{nk}^*\} - E\{\hat{g}_{nk}\}E\{\hat{g}_{nk}^*\}, \tag{6}$$

[2] Здесь и далее под амплитудой c_n будем понимать уровень звукового давления n-го источника на расстоянии 1 м.

[3] При движении излучателя такое рассмотрение связано с некоторыми ограничениями: не учитывается эффект Допплера, характерные масштабы изменения расстояний $\Delta R \simeq vt \ll \lambda$ (v – скорость движения), $\Delta ft \gtrsim J$ (Δf – полоса анализа) и т.д.

где * обозначает комплексное сопряжение. Однако характеризовать качество оценки матрицы $\hat{\mathbf{G}}$ в целом удобнее величиной средней дисперсии σ^2:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{n,k=1}^{N} \mathrm{disp}\{\hat{g}_{nk}\}. \qquad (7)$$

Подставляя $\hat{g}_{nk}$ из (5) в (6), а затем в (7) и воспользовавшись правилом "размыкания" моментов для гауссовых величин, после несложных вычислений получим:

$$\sigma^2 = J^{-1}N^{-2}[\mathrm{tr}\mathbf{G} + \varepsilon_0^2\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})^{-1}]^2, \qquad (8)$$

где tr… – след матрицы. Величина $\mathrm{tr}\mathbf{G} = \sum_n g_{nn} = \sum_n E\{c_n c_n^*\}$ есть (с точностью до размерных констант) полная акустическая мощность источника.

При исследовании полученного выражения (8) обычно предполагают, что характерное отношение сигнал/помеха на приемной антенне много меньше 1. Основываясь на анализе спектральных свойств матрицы $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$, выполненном в работе [5] для случая свободного пространства и параллельного расположения излучателя и приемной антенны, легко показать, что неравенство $\mathrm{tr}\mathbf{G} \ll \varepsilon_0^2\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})^{-1}$ более сильное, чем неравенство, характеризующее отношение сигнал/помеха. Поэтому в дальнейшем ограничимся исследованием средней дисперсии оценки $\mathbf{G}$, обусловленной только шумовой компонентой σ_0^2:

$$\sigma_0^2 = J^{-1}N^{-2}[\varepsilon_0^2\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})^{-1}]^2 = J^{-1}N^{-2}\varepsilon_0^4\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i^{-1}\right)^2, \qquad (9)$$

где μ_i – собственные значения матрицы $(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})$ размером $N \times N$. Из (9) видно, что качество оценки матрицы $\mathbf{G}$ (величина σ_0^2) определяется поведением собственных значений матрицы $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$. Плохая обусловленность $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$ (большая величина $\mu_{\max}/\mu_{\min}$, где $\mu_{\max}$ и $\mu_{\min}$ – максимальное и минимальное собственные значения матрицы $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$) приводит к тому, что на практике матрица $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$, учитывая конечную точность машинных расчетов, становится практически необратимой, а величина дисперсии σ_0^2 (даже при малых шумах) – очень большой.

Для дальнейшего рассмотрения конкретизируем "геометрию" задачи. Пусть излучатель и антенна расположены в одной плоскости (x, y) в свободном пространстве и параллельны. Координаты центра антенны (0, 0), центра излучателя – (x_0, R).

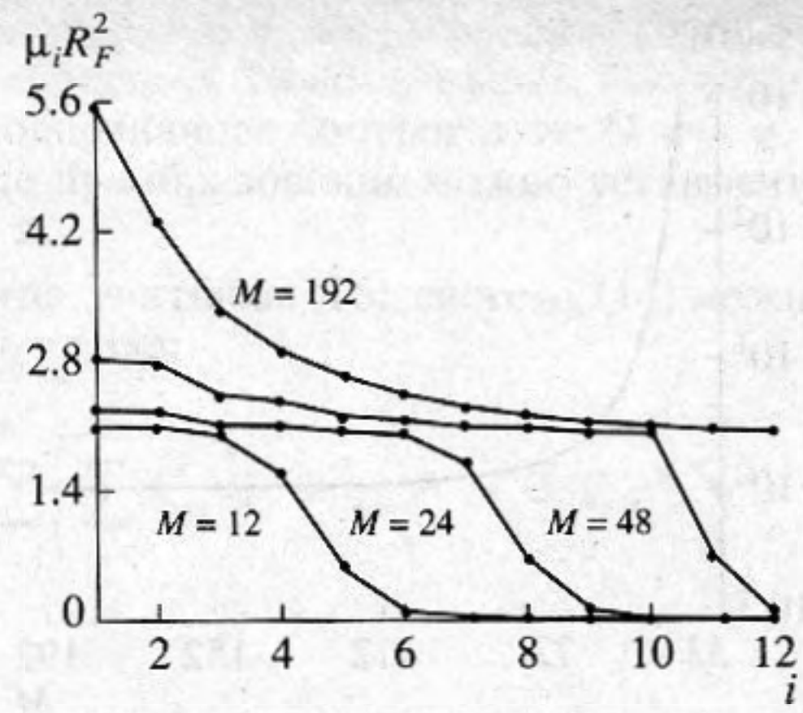

Рис. 1. Собственные значения μ_i для различного числа элементов приемной апертуры M ($d = 0$, $N = 12$, $\lambda = 6$ м, $R = 8\lambda$).

Вначале вычислим предельное (минимальное) значение средней дисперсии. Очевидно, что оно достигается при бесконечной длине приемной антенны: $\sigma_1^2 = \sigma_0^2\big|_{M\to\infty}$. В этом случае, как показано в [5], величина матричного элемента A_{nm} матрицы $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$ хорошо описывается формулой:

$$A_{nm} \simeq R_F^{-2}\pi J_0(\pi|m-n|), \qquad (10)$$

где $J_0(\ldots)$ – функция Бесселя 0-го порядка, $R_F = (\lambda R/2)^{1/2}$ – радиус первой зоны Френеля. Вычислив спектр такой матрицы и подставив μ_i в (9), получим величину σ_1^2. Как показывают численные расчеты, величина $\sigma_1^2\varepsilon_0^{-4}R_F^{-4}J$ с ростом N монотонно возрастает и достаточно быстро выходит на константу, значение которой для $\lambda = 6$ м, $R = 8\lambda$ равно 0.153, так, например, уже при $N = 12$ $\sigma_1^2\varepsilon_0^{-4}R_F^{-4}J = 0.148$.

Основываясь на результатах исследования величин μ_i [5, 10], проанализируем поведение σ_0^2 в зависимости от числа приемных элементов M и от смещения излучателя относительно центра антенны $d = 2x_0/\lambda$. Вначале отметим, что при больших M $\mu_{\max} \simeq 2.67R_F^{-2}\sqrt{N}$ и $\mu_{\min} \simeq 2R_F^{-2}$. При $d = 0$ с уменьшением M до некоторого значения M_0 величина $\mu_{\min}$ практически не изменяется, а величина $\mu_{\max}$ монотонно уменьшается, при этом величина σ_0^2 незначительно возрастает. При дальнейшем уменьшении M ($M < M_0$) вначале одно собственное значение $\mu_{\min}$ начинает "быстро" убывать, а затем, по мере уменьшения M, число собственных значений $\mu_i \sim 0$ начинает возрастать (см. рис. 1); при этом величина средней дисперсии $\sigma_0^2 \longrightarrow \infty$ (заметим, что увеличение средней дис-

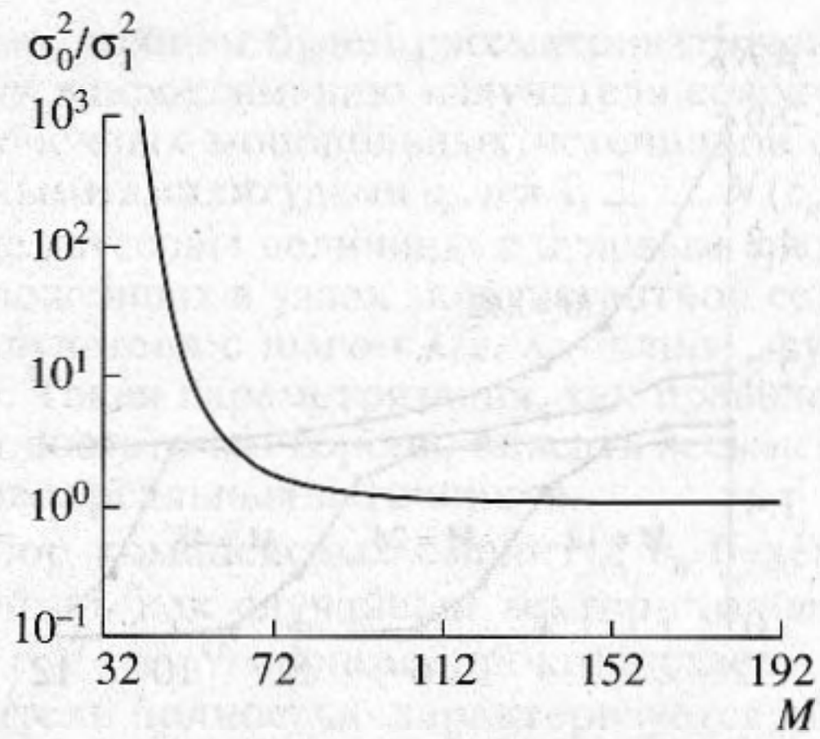

Рис. 2. Зависимость средней дисперсии σ_0^2/σ_1^2 от числа элементов приемной апертуры M ($d = 0$, $N = 12$, $\lambda = 6$ м, $R = 8\lambda$).

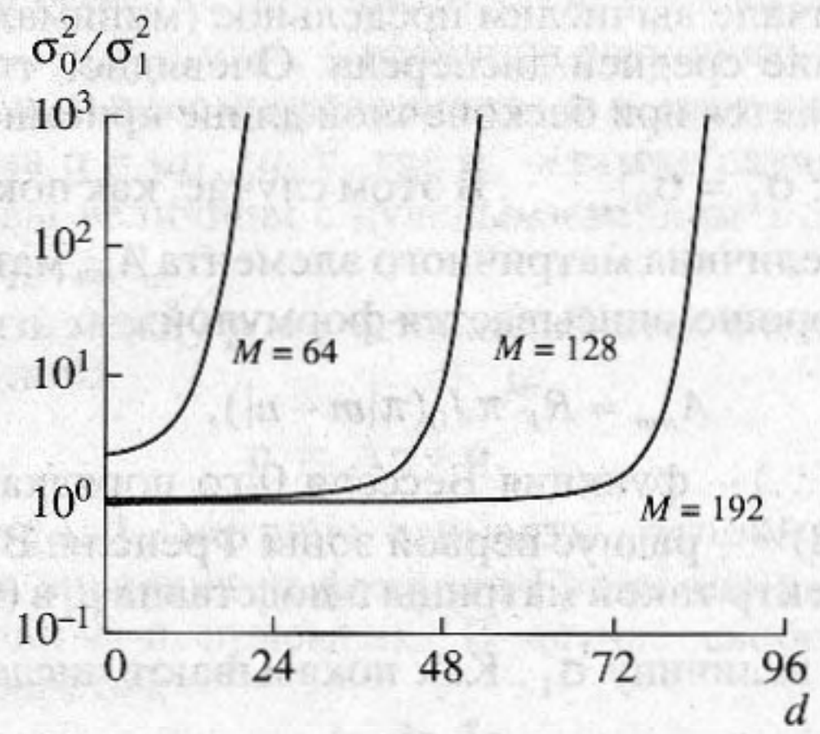

Рис. 3. Зависимость средней дисперсии σ_0^2/σ_1^2 от смещения d для различных M ($N = 12$, $\lambda = 6$ м, $R = 8\lambda$).

персии σ_0^2, естественно, более медленное, чем рост $\mu_{\min}^{-1}$). Такое поведение σ_0^2 от M хорошо иллюстрирует рис. 2. Аналогичная ситуация происходит и при изменении $|d|$ для фиксированного M: с увеличением $|d|$ количество $\mu_i \sim 0$ возрастает, и при больших d остается только одно собственное значение, отличное от 0 (фактически это соответствует уже дальней зоне). Это приводит к значительному росту величины средней дисперсии при увеличении $|d|$. Отметим, что всегда $\sigma_0^2\big|_{d\neq 0} > \sigma_0^2\big|_{d=0}$. В качестве иллюстрации на рис. 3 приведена зависимость σ_0^2/σ_1^2 от d.

Заканчивая рассмотрение неподвижного излучателя, еще раз отметим, что величина σ_0^2 характеризует среднюю дисперсию элемента оценки ковариационной матрицы $\mathbf{G}$, связанную с шумовой компонентой.

3. Реконструкция характеристик движущегося излучателя. В этом случае $\hat{\mathbf{G}}$ определяется из системы S матричных уравнений (3), которая является сильно переопределенной системой уравнений относительно матричных элементов $\hat{g}_{nm}$. Для получения оценки также воспользуемся методом наименьших квадратов. Соответствующую оценку $\mathbf{G}$ найдем из условия минимума функционала:

$$F(\hat{\mathbf{G}}) = \sum_{s=1}^{S} \mathrm{tr}[(\hat{\mathbf{T}}_s - \mathbf{K}) - \mathbf{A}_s\hat{\mathbf{G}}\mathbf{A}_s^{\dagger}]^2, \qquad (11)$$

который достигается при

$$\sum_s \mathbf{B}_s\hat{\mathbf{G}}\mathbf{B}_s = \sum_s \mathbf{A}_s^{\dagger}(\hat{\mathbf{T}}_s - \mathbf{K})\mathbf{A}_s, \qquad (12)$$

где $\mathbf{B}_s = \mathbf{A}_s^{\dagger}\mathbf{A}_s$. Полагая

$$\mathbf{Z} = \sum_s \mathbf{A}_s^{\dagger}(\hat{\mathbf{T}}_s - \mathbf{K})\mathbf{A}_s, \qquad (13)$$

получим линейное матричное уравнение относительно $\hat{\mathbf{G}}$:

$$\sum_s \mathbf{B}_s\hat{\mathbf{G}}\mathbf{B}_s = \mathbf{Z}. \qquad (14)$$

Уравнение (14) можно рассматривать как обычную систему из N^2 линейных уравнений относительно неизвестных элементов $\mathbf{G}$. Однако эта система в силу эрмитовости $\mathbf{G}$, $\mathbf{B}_s$, $\mathbf{Z}$ будет содержать ряд одинаковых (с точностью до комплексного сопряжения) уравнений и поэтому должна быть преобразована. Построим алгоритм решения этой системы.

Пусть H – вещественное линейное пространство эрмитовых матриц. Размерность пространства H равна N^2, где N – размер составляющих H матриц, и в H имеется естественный ортонормированный базис, состоящий из матриц вида:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{kl}^{(n)} = \delta_{nk}\delta_{nl}, \quad n = 1\ldots N, \\ \mathbf{f}_{kl}^{(n,j)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{nk}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{nl}), \quad 1 \le n < j \le N, \\ \mathbf{h}_{kl}^{(n,j)} = \dfrac{i}{\sqrt{2}}(\delta_{nk}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{nl}), \\ 1 \le n < j \le N, \quad k, l = 1, \ldots, N. \end{cases} \qquad (15)$$

Уравнение (14) запишем в виде линейного уравнения в пространстве H:

$$A(\mathbf{G}) = \mathbf{Z}, \qquad (16)$$

где A – симметрический оператор в H вида: $A(\mathbf{G}) = \sum_s \mathbf{B}_s\mathbf{G}\mathbf{B}_s$.

Так как $\mathbf{Z} = [z_{kl}]$ – эрмитова матрица, то ее разложение по базису (15) будет иметь вид:

$$\mathbf{Z} = \sum_k z_{kk}\mathbf{e}^{(k)} + \sum_{k>l}\sqrt{2}\mathrm{Re}z_{kl}\mathbf{f}^{(k,l)} + \sum_{k>l}\sqrt{2}\mathrm{Im}z_{kl}\mathbf{h}^{(k,l)}. \tag{17}$$

Аналогичное разложение для матрицы $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G} = \sum_k g_{kk}\mathbf{e}^{(k)} + \sum_{k>l}\sqrt{2}\mathrm{Re}g_{kl}\mathbf{f}^{(k,l)} + \sum_{k>l}\sqrt{2}\mathrm{Im}g_{kl}\mathbf{h}^{(k,l)}, \tag{18}$$

где $1 \le l < k \le N$.

Поставим теперь в соответствие каждой эрмитовой матрице вектор из $\mathbf{R}^{N^2}$. Пусть $r_k = (k-1)(k-2)/2$, $k = 2, \ldots N+1$, и для пары (k, l), $1 \le l < k \le N$,

$$j(k, l) = r_k + l. \tag{19}$$

Тогда j есть взаимно однозначное соответствие между множеством пар чисел $\{(k, l), 1 \le l < k \le N\}$, определяющих место элемента в матрице, и множеством чисел $\{1, \ldots, N(N-1)/2\}$, определяющих место этого элемента в векторе. Следовательно, матрице, например, $\mathbf{G}$ размером $N \times N$ (18) будет отвечать вектор $\mathbf{g}$ размером $N^2 \times 1$ с элементами:

$$g_m(\mathbf{G}) = \begin{cases} \mathrm{Re}g_{k(m)l(m)}, & 1 \le m \le N(N-1)/2, \\ \mathrm{Im}g_{k(m')l(m')}, & N(N-1)/2 < m \le N(N-1), \\ m' = m - N(N-1)/2, & \\ g_{m''m''}, & N(N-1) < m \le N^2, \\ m'' = m - N(N-1) & \end{cases} \tag{20}$$

из пространства $\mathbf{R}^{N^2}$.

Для построения обратного отображения заметим, что для любого $j \in \{1, \ldots, N(N-1)/2\}$ существует единственное $k \in \{2, \ldots N+1\}$ такое, что $r_k < j \le r_{k+1}$. Обозначим это число $k(j)$. Тогда

$$(k, l)(j) = (k(j), j - r_{k(j)}). \tag{21}$$

Следовательно, каждому вектору, например, $\mathbf{g}$ будет отвечать эрмитова матрица $\mathbf{G}$ с элементами g_{kl}:

$$g_{kl}(\mathbf{g}) = \begin{cases} g_{j(k,l)} + ig_{j(k,l)+N(N-1)/2}, & 1 \le l < k \le N, \\ g_{N(N-1)+k}, \quad k = l, & 1 \le k \le N. \end{cases} \tag{22}$$

Заметим, что преобразования (20) и (22) – взаимно обратные. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие $\mathbf{G} \rightleftarrows \mathbf{g}$. Аналогичные преобразования можно установить и для $\mathbf{Z} \rightleftarrows \mathbf{z}$.

Тогда, учитывая (16), систему (14) можно переписать в виде:

$$\sum_{r=1}^{N^2}\left(\sum_s A^s_{mr}\right)\hat{g}_r = z_m, \quad m = 1, \ldots, N^2, \tag{23}$$

где

$$A^s_{mr} = \begin{cases} \mathrm{Re}(B^s_{i(m),k(r)}B^s_{l(r),j(m)} + B^s_{i(m),l(r)}B^s_{k(r),j(m)}), \\ 1 \le m \le N(N-1)/2, \ 1 \le r \le N(N-1)/2, \\ \mathrm{Im}(B^s_{i(m),l(r)}B^s_{k(r),j(m)} - B^s_{i(m),k(r)}B^s_{l(r),j(m)}), \\ 1 \le m \le N(N-1)/2, \\ N(N-1)/2 < r \le N(N-1), \\ \mathrm{Re}(B^s_{i(m),k(r)}B^s_{k(r),j(m)})\sqrt{2}, \\ 1 \le m \le N(N-1)/2, \ N(N-1) < r \le N^2, \\ \mathrm{Re}(B^s_{i(m),k(r)}B^s_{l(r),j(m)} - B^s_{i(m),l(r)}B^s_{k(r),j(m)}), \\ N(N-1)/2 < m \le N(N-1), \\ N(N-1)/2 < r \le N(N-1), \\ \mathrm{Im}(B^s_{i(m),k(r)}B^s_{k(r),j(m)})\sqrt{2}, \\ N(N-1)/2 < m \le N(N-1), \\ N(N-1) < r \le N^2, \\ B^s_{j(m),k(r)}B^s_{k(r),j(m)}, \\ N(N-1) < m \le N^2, \ N(N-1) < r \le N^2 \end{cases} \tag{24}$$

или – в виде:

$$A\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{z}, \tag{25}$$

где $A = [A_{mr}]$, $A_{mr} = \sum_s A^s_{mr}$. Легко видеть, что A – симметрическая матрица размером $N^2 \times N^2$, являющаяся матрицей оператора $\mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{B}_s\mathbf{G}\mathbf{B}_s$ в H в базисе $(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h})$, и для ее обращения (т.е. для решения системы (25)) уже можно использовать стандартные процедуры.

Из (25), учитывая (13), получим оценку вектора $\hat{\mathbf{g}}$:

$$\hat{\mathbf{g}} = A^{-1}(\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{k}), \tag{26}$$

где $\hat{\mathbf{t}}$ – соответствует матрице $\sum_s \mathbf{A}^\dagger_s\hat{\mathbf{T}}_s\mathbf{A}_s$, а $\mathbf{k}$ – матрице $\sum_s \mathbf{A}^\dagger_s\mathbf{K}\mathbf{A}_s = \varepsilon_0^2\sum_s \mathbf{A}^\dagger_s\mathbf{A}_s$. Легко видеть, что оценка $\hat{\mathbf{g}}$ – несмещенная: $E\{\hat{\mathbf{g}}\} = \mathbf{g}$.

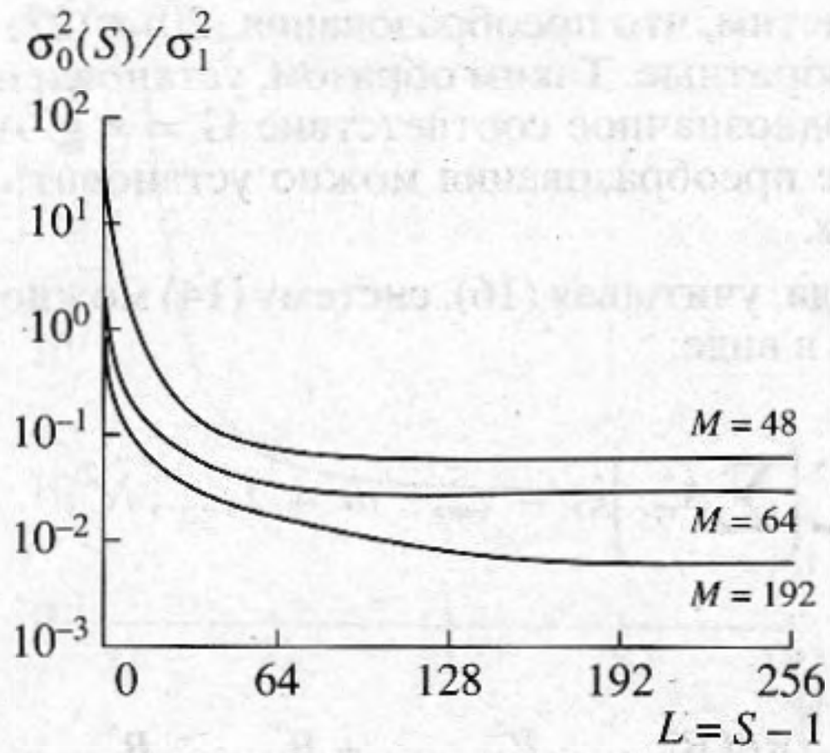

Рис. 4. Зависимость $\sigma_0^2(S)/\sigma_1^2$ от длины траектории $L = S - 1$ для различных M ($N = 12$, $\lambda = 6$ м, $R = 8\lambda$).

Оценка матрицы **G** получается из вектора $\hat{\mathbf{g}}$ преобразованием (22). Будем характеризовать качество оценки матрицы **G** так же, как и в случае неподвижного источника, величиной средней дисперсии, обусловленной только шумовой компонентой $\sigma_0^2(S)$. Опуская громоздкие выкладки и учитывая некоррелированность сигналов и шумов при различных s, получим

$$\sigma_0^2(S) = J^{-1}N^{-2}\varepsilon_0^4 \mathrm{tr}\left(\sum_s A_s\right)^{-1}. \qquad (27)$$

Отметим, что при $S = 1$ $\mathrm{tr}A^{-1} = [\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A})^{-1}]^2$ и, естественно, $\sigma_0^2(S)|_{S=1} = \sigma_0^2$.

Исследуем зависимость величины $\sigma_0^2(S)$ от длины траектории при заданном размере приемной апертуры M для источника, движущегося в свободном пространстве. Положим, что сам источник и его траектория движения параллельны приемной антенне и что центр траектории $x_0' = 0$ (т.е. траектория движения всегда симметрична относительно центра антенны). Тогда длина траектории (расстояние между центрами источника при $s = 1$ и $s = S$) равна $l = (S - 1)\Delta$, где Δ – шаг смещения источника. В дальнейшем будем полагать $\Delta = \lambda/2$, а длину траектории – безразмерной: $L = 2l/\lambda = S - 1$. Заметим, что при этом смещение центра источника относительно центра антенны в конфигурации s равно $d = (S + 1)/2 - s$.

На рис. 4 приведены зависимости $\sigma_0^2(S)/\sigma_1^2$ от длины траектории $L = S - 1$. Хорошо видно, что величины $\sigma_0^2(S)$ спадают с ростом L и при $L \longrightarrow \infty$ выходят на константу, величина которой зависит от M. Фактически спад $\sigma_0^2(S)$ "прекращается", начиная со значений L, соответствующих таким смещениям d_0, при которых источник уже находится в дальней зоне антенны. Учитывая, что для $M_1 > M_2$ величина $d_0(M_1) > d_0(M_2)$, спад $\sigma_0^2(S)$ для M_1 более плавный, чем для M_2, что отчетливо видно на рис. 4. Естественно, что для $M_1 > M_2$ $\sigma_0^2(S, M_1) < \sigma_0^2(S, M_2)$.

Отметим, что полученная величина $\sigma_0^2(S)$ для данной L не является оптимальной для фиксированного полного числа выборок JS. Полученные результаты являются следствием сделанного предположения о равномерном распределении выборок по траектории движения. В принципе возможно, используя иной вид функционала (11), получить оценку $\hat{\mathbf{G}}$, которая, являясь несмещенной, обеспечит убывание дисперсии с ростом длины траектории движения излучателя при неизменном JS. При этом, естественно, что выборки будут распределены неравномерно по траектории.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований – проекты № 96-02-19457 и № 96-02-19462.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borgiotti G.V., Rosen E.M.* The determination of the far field of an acoustic radiator sparse measurement samples in the near field // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 2. № 2. Pt. 1. P. 807–818.
2. *Fiks I.Sh., Sidorovskaya N.A., Turchin V.I.* Measurements of complex moving broad-band acoustic radiators using near-field technique // Second European conference on underwater acoustic. Edited by L. Bjorno. ESCS-EC-EAEC, Brussels, Luxemburg, 1994. P. 745–750.
3. *Fiks I.Sh., Sidorovskaya N.A., Turchin V.I.* Diagnostics of noise acoustic sources // J. de Physique IV. Colloque C5, supplement au Journal de Physique III. V. 4. Mai 1994. P. C5-1109-1111.
4. *Fiks I.Sh., Sidorovskaya N.A., Turchin V.I.* Reconstruction of spatial-time structure of complex acoustical sources from near-field measurements // Third International Congress on air- and structure-borne sound and vibration. June 13–15, 1994, Montreal, Canada. Edited by Malcolm J. Crocker. P. 1701–1708.
5. *Фикс И.Ш.* Определение характеристик источника в ближнем поле: вычисление необходимого размера приемной апертуры. Препринт ИПФ РАН № 402. Н. Новгород, 1996. 26 с.
6. *Guo J., Pan J., Bao Ch.* Activele created quiet zones bu multiple control sources in free space // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. V. 101. № 3. P. 1492–1501.
7. *Choi J.W., Kim Y.H.* Estimation of locations and strengths of broadband planar and spherical noise sources using coherent signal subspace // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 98. № 4. P. 2082–2093.

8. *Постоенко Ю.К., Сидоровская Н.А., Турчин В.И., Угриновский Р.А., Фикс Г.Е., Фикс И.Ш.* Реконструкция структуры движущихся акустических источников со сложным спектральным составом // Формирование акустических полей в океанических волноводах. Реконструкция неоднородностей. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1994. С. 247–281.
9. *Fiks I.Sh., Turchin V.I.* The near-field acoustic measurements // The formation of acoustical fields in oceanic waveguides. Collected scientific papers. Russian Academy of Sciences Institute of Applied Physics. Nizhny Novgorod, 1995. P. 181–199.
10. *Турчин В.И., Фикс И.Ш.* Многоракурсный апертурный синтез. Препринт ИПФ РАН № 431. Н. Новгород, 1997. 23 с.
11. *Вдовичева Н.К., Фикс И.Ш.* Определение характеристик движущихся стохастических распределенных источников звука. Препринт ИПФ РАН № 434. Н. Новгород, 1997. 21 с.

Reconstruction of the Characteristics of Extended Stochastic Sound Sources

N. K. Vdovicheva, V. I. Turchin, and I. Sh. Fiks

The determination of the covariance matrix of an extended sound source from the near-field array measurements is considered. The cases of a stationary and a moving source are studied for an inhomogeneous medium with an *a priori* known correlation matrix of noise. Numerical results on the covariance of estimates are presented.