АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 1, с. 110–116

УДК 534.26

ОТРАЖЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН ОТ ИМПЕДАНСНОЙ ГРАНИЦЫ

© 1999 г. В. В. Тютекин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4
e-mail: bvp.@acoins.msc.ru

Поступила в редакцию 30.12.97 г.

В статье рассматривается отражение плоской сдвиговой волны, падающей на границу изотропного упругого полупространства, на которой закреплена нагрузка импедансного типа. Исследуется влияние такой нагрузки на энергетические характеристики продольных и сдвиговых волн. В качестве нагрузки рассматривается набор одинаковых резонаторов, реагирующих на нормальное и тангенциальное напряжения и обладающих двумя различными резонансными частотами. На этих частотах выполняются смешанные граничные условия, в результате чего падающая сдвиговая волна отражается полностью.

До сих пор проблема преобразования упругих волн на границах сред, в частности, их поглощение, остается актуальной. В последнее время предпринимаются попытки использования для этой цели активных методов [1–4]. Однако, по нашему мнению, остается еще много возможностей применения традиционных методов путем создания определенного вида нагрузки, осуществляющей целенаправленную трансформацию первичных волн.

Так в работе [5] были выявлены некоторые особенности преобразования продольных волн при их отражении от импедансной нагрузки. Было показано, что для нагрузки, имеющей резонансный характер (без внутренних потерь), вблизи резонансных частот выполняются смешанные граничные условия, что приводит к полному отражению продольной волны (отраженная сдвиговая волна практически отсутствует). В качестве модели такой нагрузки рассматривались механические резонаторы, одновременно реагирующие на нормальные и тангенциальные напряжения и обладающие двумя различными резонансными частотами Ω_n и Ω_t. Благодаря этому среднее (по частоте и углу падения) значение коэффициента отражения продольной волны в полосе частот $\Delta = \Omega_n - \Omega_t$ может достигать величин порядка 0.98–0.99 (по энергии).

В настоящей работе аналогичные особенности отражения рассматриваются для падающих сдвиговых волн. Исходные расчетные формулы для этого случая получим, следуя схеме работы [5].

Зададим падающую сдвиговую волну в виде:

$$\mathbf{u}_t^0 = \mathbf{a}_0 \exp(i(k_1 z + k_2 x)), \qquad (1)$$

где $\mathbf{u}_t^0 = (-i\omega u_z^0, -i\omega u_x^0)^t$ – вектор колебательной скорости, $\mathbf{a}_0 = (\sin\theta_0, -\cos\theta_0)^t$ – вектор поляризации волны, $k_1 = k_t\cos\theta_0$, $k_2 = k_t\sin\theta_0$, θ_0 – угол падения, k_t – волновое число сдвиговых волн, индекс t означает транспонирование матрицы. Система координат выбрана так, что ось x параллельна границе, а ось z совпадает с внешней нормалью.

Аналогично, отраженные волны имеют вид:

$$\text{продольная} - \mathbf{u}_l = R_{21}\mathbf{a}_l \exp(i(-k_1' z + k_2' x)), \qquad (2)$$

$$\text{сдвиговая} - \mathbf{u}_t = R_{22}\mathbf{a}_t \exp(i(-k_1 z + k_2 x)), \qquad (3)$$

где R_{21} и R_{22} – коэффициенты отражения, $\mathbf{a}_t = (\sin\theta_0, \cos\theta_0)^t$, $\mathbf{a}_l = (-\cos\theta_2, \sin\theta_2)$, $k_1' = k_l\cos\theta_2$, $k_2' = k_l\sin\theta_2$, k_l и θ_2 – волновое число и угол отражения продольных волн, определяемый, как обычно, из соотношения

$$k_l \sin\theta_2 = k_t \sin\theta_0. \qquad (4)$$

Множитель $\exp(ik_2x)$ всюду в дальнейшем можно опустить.

Величины R_{21} и R_{22}, характеризующие преобразование упругих волн при отражении сдвиговой волны, могут быть определены, следуя схеме работы [5]. В общем случае эти величины существенно зависят от характера и величины нагрузки Z^0. В настоящей статье, так же как и в работе [5], рассматривается импедансная нагрузка, матрица которой имеет диагональный вид

$$Z^0 = \begin{pmatrix} Z_{11}^0 & 0 \\ 0 & Z_{22}^0 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

т.е. нормальные и тангенциальные напряжения, которые эта нагрузка вызывает, определяются только одноименными смещениями. Такую на-

грузку сравнительно легко реализовать на практике, и одна из таких реализаций была упомянута выше.

Формулы для коэффициентов отражения имеют вид

$$R_{22} = \frac{D^- + Z_{11}^0 Z_{22}^0 \cos(\theta_0 + \theta_2) - Z_{11}^0 b \cos\theta_2 + Z_{22}^0 \cos\theta_0}{D^+ + Z_{11}^0 Z_{22}^0 \cos(\theta_0 - \theta_2) + Z_{11}^0 b \cos\theta_2 + Z_{22}^0 \cos\theta_0}, \quad (6)$$

$$R_{21} = \frac{G + Z_{11}^0 Z_{22}^0 \sin 2\theta_0}{D^+ + Z_{11}^0 Z_{22}^0 \cos(\theta_0 - \theta_2) + Z_{11}^0 b \cos\theta_2 + Z_{22}^0 \cos\theta_0}, \quad (7)$$

где

$$D^{\pm} = b \sin^4\theta_0 [4 \operatorname{ctg}\theta_0 \operatorname{ctg}\theta_2 \pm (1 - \operatorname{ctg}\theta_0)^2],$$

$$G = 4b^2 \sin^4\theta_0 \operatorname{ctg}\theta_0 (1 - \operatorname{ctg}^2\theta_0).$$

При $Z_{11}^0 = Z_{22}^0 = 0$ они переходят в формулы для отражения от свободной поверхности в форме работы [6]. При $Z_{11}^0 \longrightarrow \infty$, $Z_{22}^0 \longrightarrow \infty$ формулы (6) и (7) (для закрепленной границы) принимают вид:

$$R_{21} = \frac{\sin 2\theta_0}{\cos(\theta_0 - \theta_2)}, \quad R_{22} = \frac{\cos(\theta_0 + \theta_2)}{\cos(\theta_0 - \theta_2)}. \quad (8)$$

По форме эти формулы совпадают с аналогичным случаем падения продольных волн, но с заменой угла θ_1 на угол θ_2.

Необходимо отметить, однако, что величины для коэффициентов отражения R_{22} и R_{21} не в полной мере характеризуют процесс отражения (преобразования), поскольку они относятся к волнам, обладающим разной энергетикой (за счет различных модулей упругости: $\lambda + 2\mu$ – для продольных волн и μ – для сдвиговой волны). Поэтому нами в дальнейшем, на основании [7], использовались величины потоков энергии в каждой из отраженных волн:

$$E_t = |R_{22}|^2, \quad E_l = \frac{\cos\theta_2}{b\cos\theta_0} |R_{21}|^2. \quad (9)$$

Отметим, что для не поглощающей нагрузки Z^0, которая в дальнейшем только и будет рассматриваться, выполняется соотношение $E_l + E_t = 1$. Исходя из этого, можно рассматривать только одну составляющую, например, E_t.

Рассмотрим влияние величин Z_{11}^0 и Z_{22}^0 на величину E_t в отдельности. При этом нужно иметь в виду, что характер импеданса (упругий или инерционный) влияет только на фазу величин R_{21} и R_{22}; величина E_t (E_l) зависит только от абсолютных значений составляющих импеданса. Вначале рассмотрим случай $Z_{11}^0 = 0$ при переменном $|Z_{22}^0|$. Отличие от случая падения продольной волны [5] состоит в существовании угла полного внутреннего отражения, определяемого соотношением $\sin\theta_{0r} = b$; при $\theta_0 \geq \theta_{0r}$ независимо от величины нагрузки величина $E_t = 1$ ($E_l = 0$). При $\theta_0 \leq \theta_{0r}$ по мере увеличения нагрузки величина E_t возрастает и при $|Z_{22}^0| \longrightarrow \infty$ стремится к единице, т.е. падающая сдвиговая волна отражается полностью, и ее трансформации в продольную волну не происходит. Это соответствует одному из типов смешанных граничных условий

$$\sigma_{zz} = 0, \quad u_x = 0. \quad (10)$$

Аналогичное явление происходит при увеличении $|Z_{11}^0|$ ($Z_{22}^0 = 0$). Случай $|Z_{11}^0| \longrightarrow \infty$ соответствует другому типу смешанных граничных условий

$$\sigma_{zx} = 0, \quad u_z = 0, \quad (11)$$

при выполнении которых также нет трансформации сдвиговой волны в продольную.

Используя описанный принцип, так же, как и в работе [5], можно за счет выбора соответствующей нагрузки реализовать почти полное отражение падающей сдвиговой волны, т.е. практически устранить отражение продольной волны. Такая нагрузка описана выше и представляет собой набор однотипных резонаторов, реагирующих на нормальные и тангенциальные напряжения и, соответственно, обладающих двумя различными резонансными частотами Ω_n и Ω_t. С учетом изложенного, импеданс нагрузки Z^0, как уже упоминалось выше, будет выражаться диагональной матрицей со следующими элементами:

$$Z_{11}^0 = Z_n, \quad Z_{22}^0 = Z_t, \quad Z_{12}^0 = Z_{21}^0 = 0. \quad (12)$$

Здесь Z_n и Z_t – нормальный и тангенциальный импедансы резонатора соответственно, которые могут быть записаны в виде

$$Z_n = \frac{iX\Omega}{1 - \Omega^2/\alpha}, \quad Z_t = \frac{iX\Omega}{1 - \Omega^2}, \quad (13)$$

где $\Omega = \omega/\omega_{0t}$ – безразмерная частота, $X = \omega_{0t} m s_0/\rho c_1$ – безразмерный инерционный импеданс резонатора на его нижней резонансной частоте ω_{0t}, приходящийся на единицу площади границы тела, s_0 – относительная площадь, занятая резонатором. Величину X можно представить в другом виде: $X = \omega_{0t} M/\rho c_1$, где $M = m s_0$ – масса резонатора, приходящаяся на единицу площади. Верхняя резонансная частота определяется соотношением $\omega_{0n} = \omega_{0t}\sqrt{\alpha}$, где α – коэффициент "ужесточения" [5]. В этих обозначениях резонансные частоты определяются равенствами $\Omega_t = 1$, $\Omega_n = \sqrt{\alpha}$.

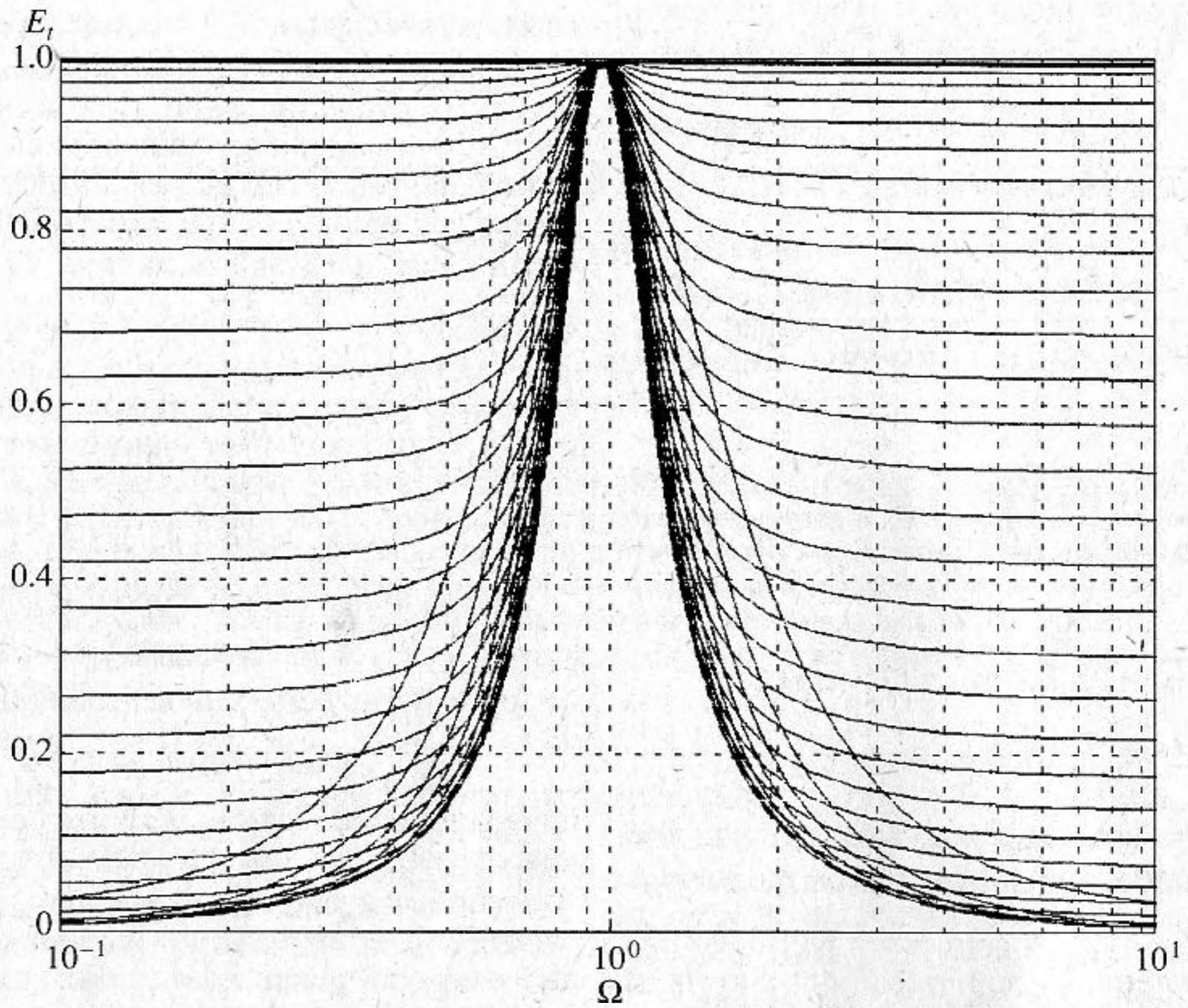

Рис. 1. Частотная зависимость величины E_t для $Z_{11}^0 = 0$, $X = 0.2$ при разных углах падения сдвиговой волны.

Перейдем к рассмотрению результатов расчета величины E_t для импеданса нагрузки, определяемого в соответствии с выбранной моделью, формулами (12) и (13). Рассмотрим вначале нагрузку $Z^0 = Z_t$ (при $Z_l = 0$), с целью иллюстрации изложенного выше принципа управления величиной E_t. При этом необходимо иметь в виду, что, поскольку Z^0 в нашем случае зависит от частоты, то E_t будет зависеть от двух параметров – угла падения и частоты. Кроме того, существенным параметром является величина X.

На рис. 1 представлена зависимость E_t от безразмерной частоты Ω для различных углов падения (отдельные кривые) при значении параметра $X = 0.2$. Из рисунка видно, что можно выделить некоторую огибающую, имеющую вид резонансной кривой, ниже которой значения E_t не опускаются при всех углах $90° \le \theta_0 \le 0°$. При $\Omega = 1$ (резонансная частота) величина $E_t = 1$. Ширина полосы частот эффективного отражения сдвиговых волн существенно зависит от параметра X, характеризующего величину импеданса резонатора по обе стороны от резонансной частоты. Можно показать, что как и в случае продольных волн [5], эта полоса пропорциональна величине X. Подобные результаты получаются и для $Z^0 = Z_n$ (при $Z_t = 0$): при $\Omega = \Omega_n$ величина $E_t = 1$.

При переходе к рассмотрению совокупного проявления резонансов можно предполагать значительное расширение полосы эффективного отражения сдвиговой волны. Эта полоса должна располагаться между частотами Ω_t и Ω_n, поскольку на этих частотах величина E_t может быть близка к единице. На рис. 2 представлена зависимость величины E_t от безразмерной частоты Ω для различных углов падения θ_0. Расчетные параметры имеют значения: $\Omega_t = 1$, $\Omega_n = 10$, $X = 0.2$, $\nu = 0.2637$, $\theta_{0r} \approx 34.5°$.

Из приведенного рисунка видно, что величина E_t достаточно близка к единице в широком диапазоне частот и углов падения. Так же как и в случае падения продольных волн [5] существует оптимальное значение $X = X_m$, доставляющее максимум величине

$$\bar{E}_t = \frac{1}{MN}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} E_t(\Omega_m, \theta_{0n}), \qquad (14)$$

которая представляет собой усредненную по диапазонам частот и углов падения величину E_t. Здесь N и M – количество значений углов падения и частот, изменяющихся в пределах $0 < \theta_0 < \theta_{0r}$, $\Omega_n < \Omega < \Omega_l$ соответственно. Численные расчеты дали следующие результаты: $X_m = 0.495$, $\max \bar{E}_t = 0.988$.

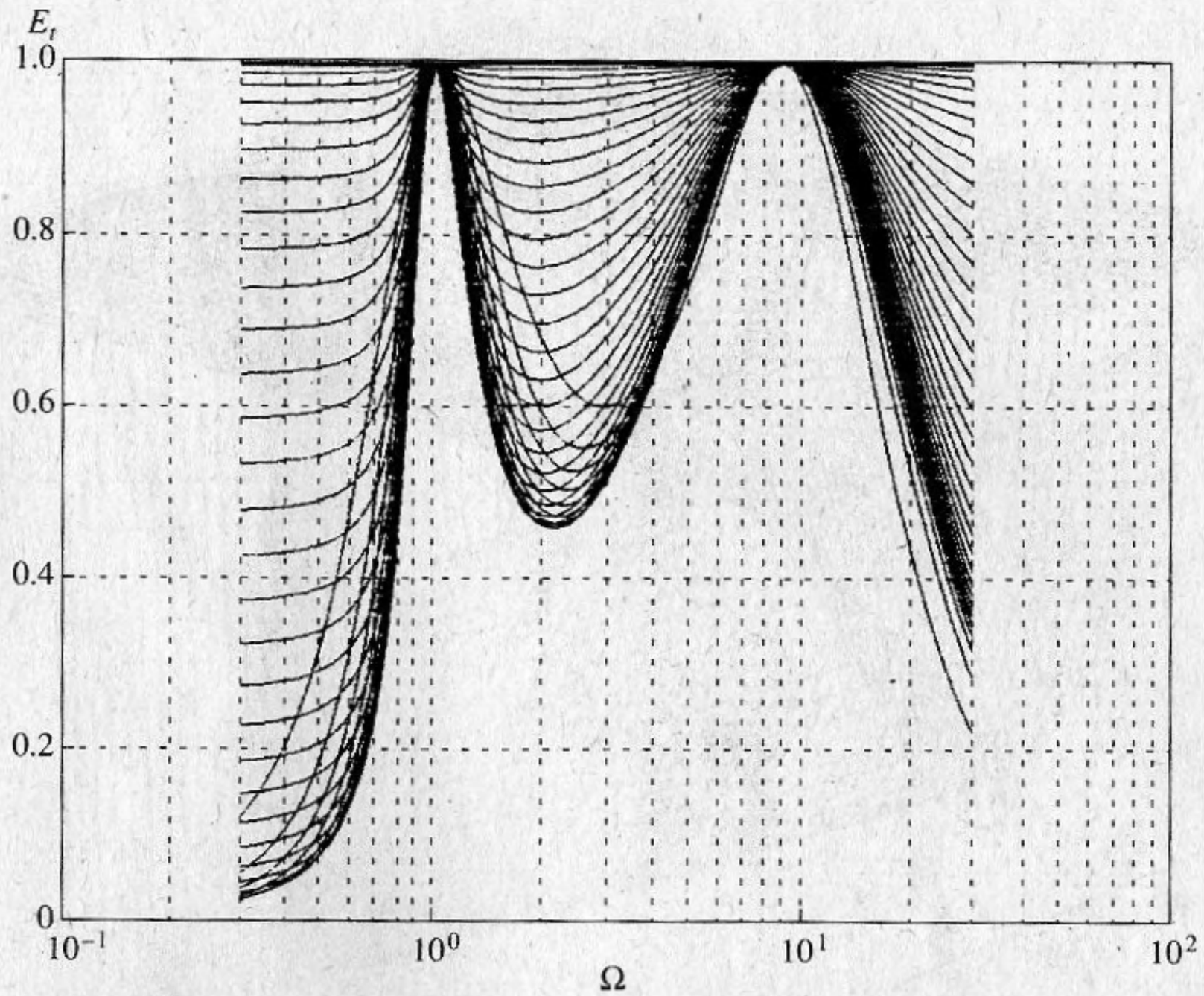

Рис. 2. Частотная зависимость величины E_t для $Z_{11}^0 \neq 0$, $Z_{22}^0 \neq 0$, $X = 0.2$.

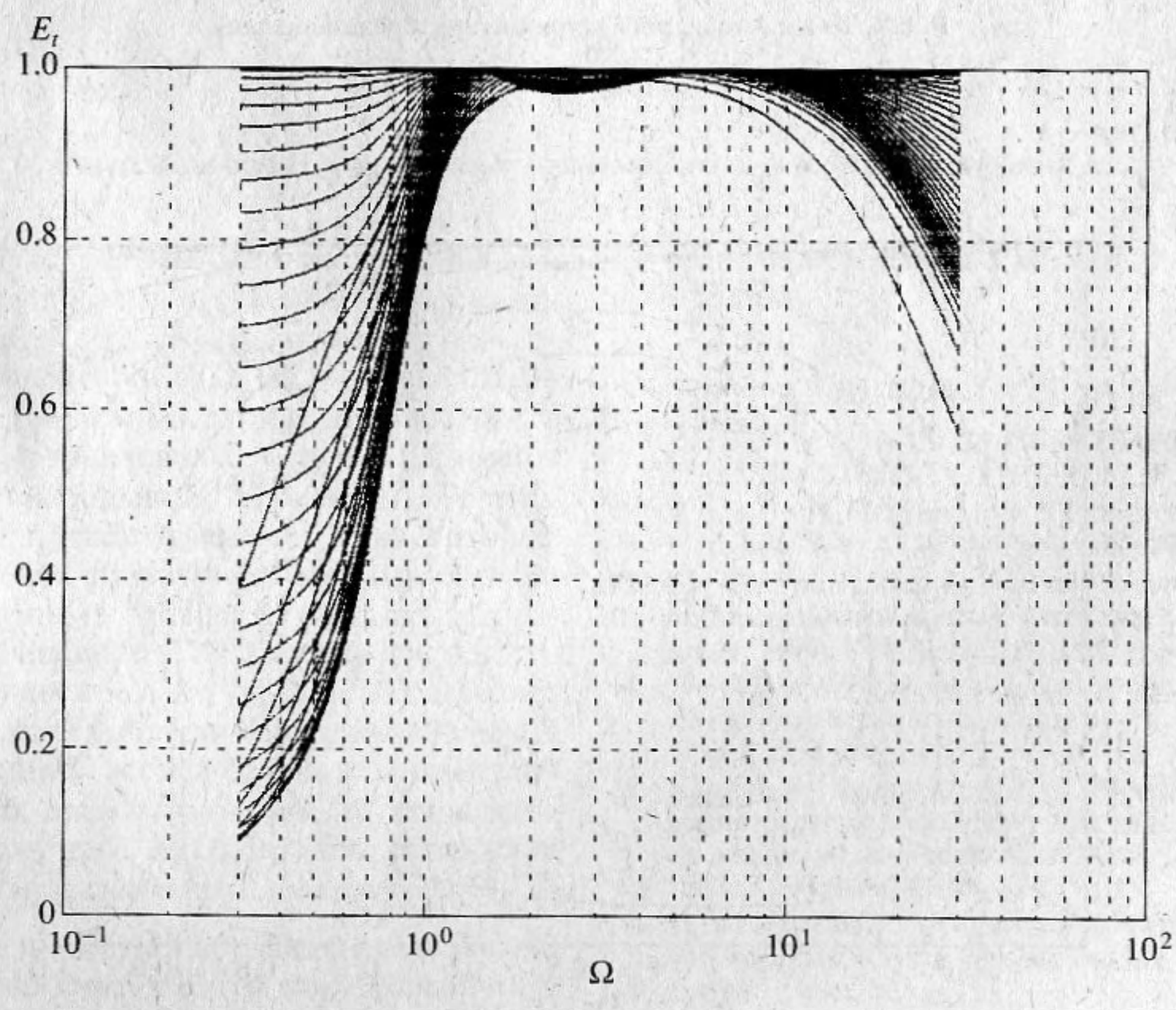

Рис. 3. Оптимальная частотная характеристика E_t: $X_m = 0.495$, $\bar{E}_t = 0.988$.

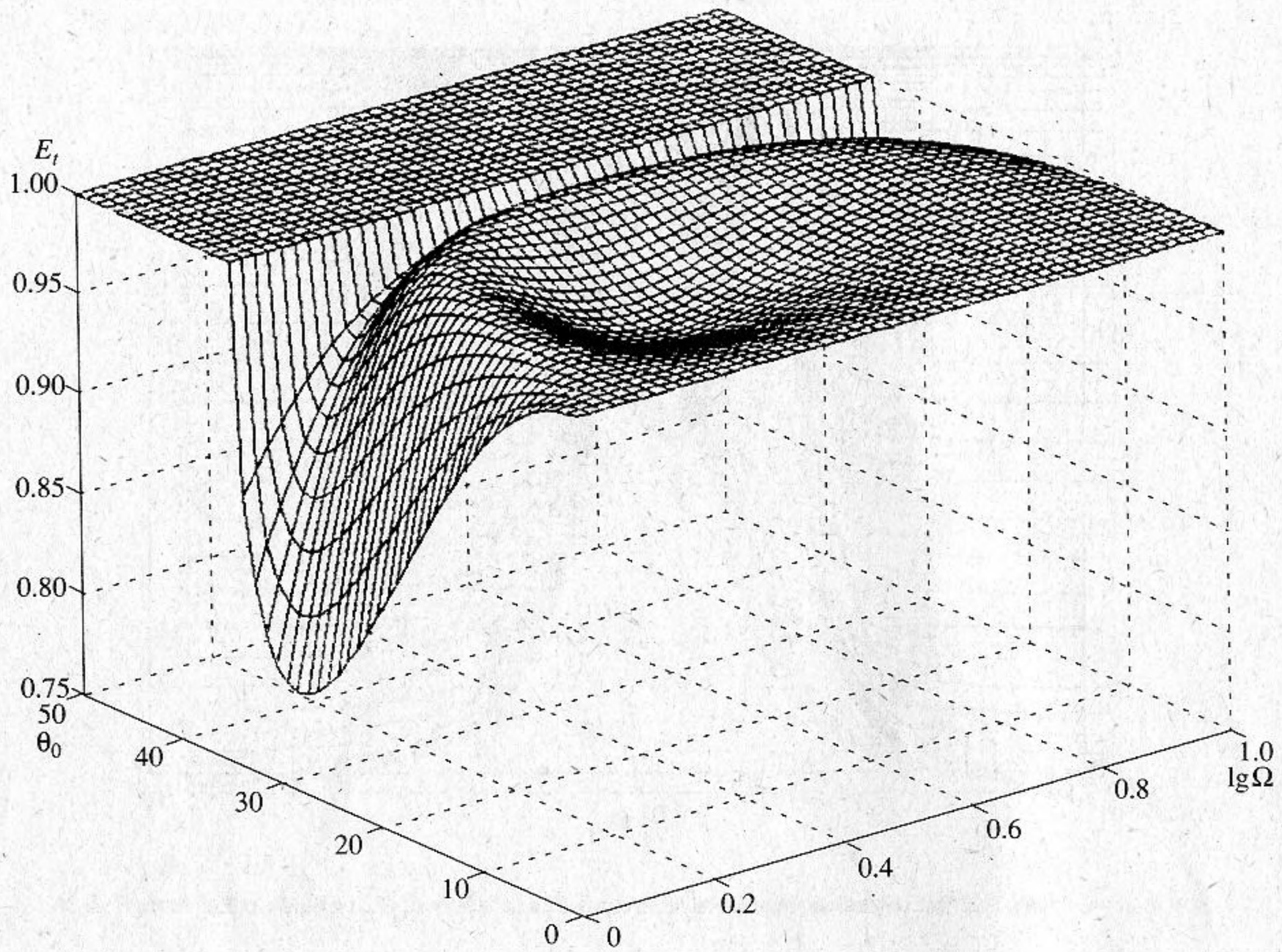

Рис. 4. То же, что на рис. 3 (трехмерное представление).

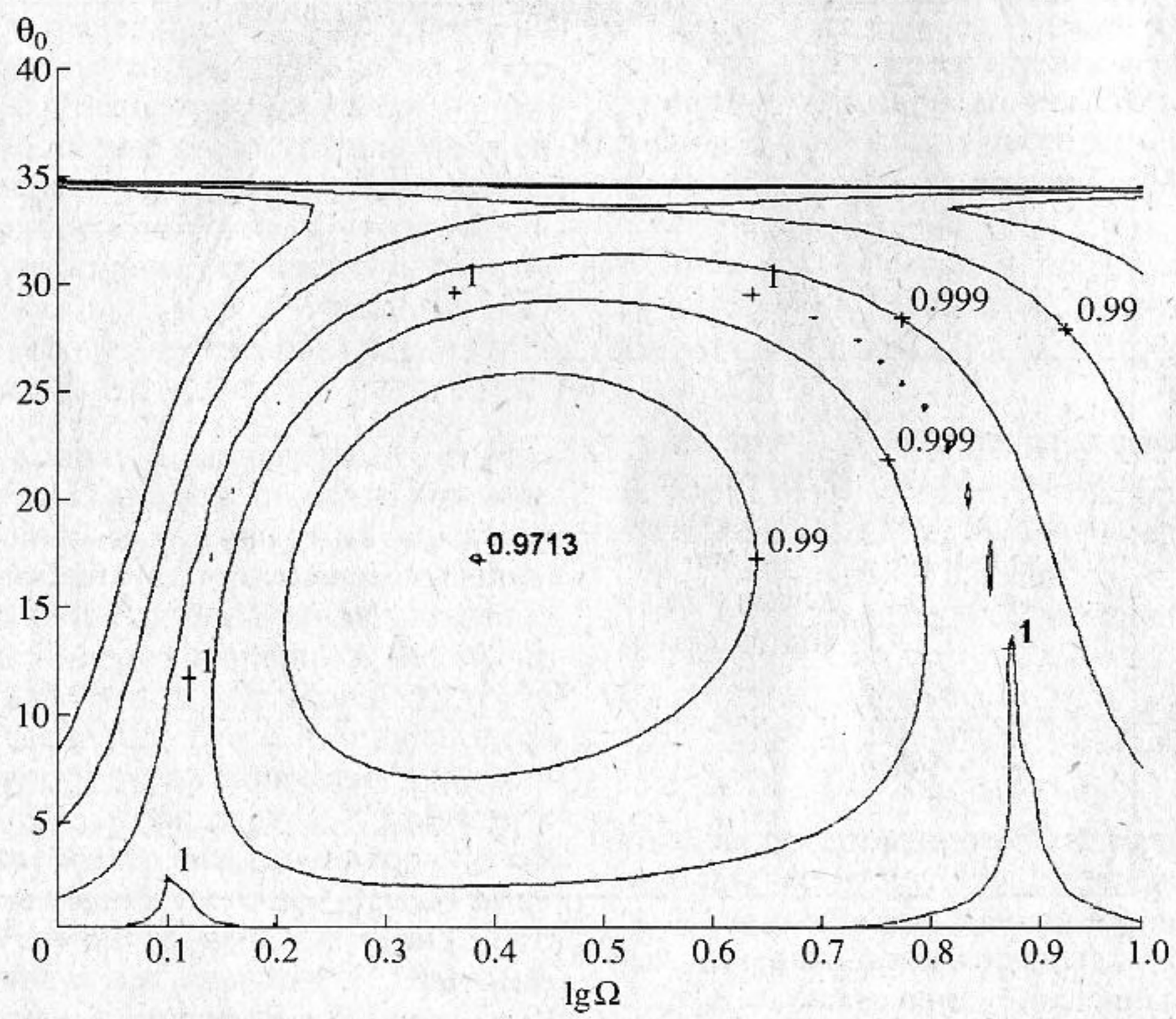

Рис. 5. Сечения функции $E_t(\Omega, \theta_0)$, значения E_t обозначены цифрами.

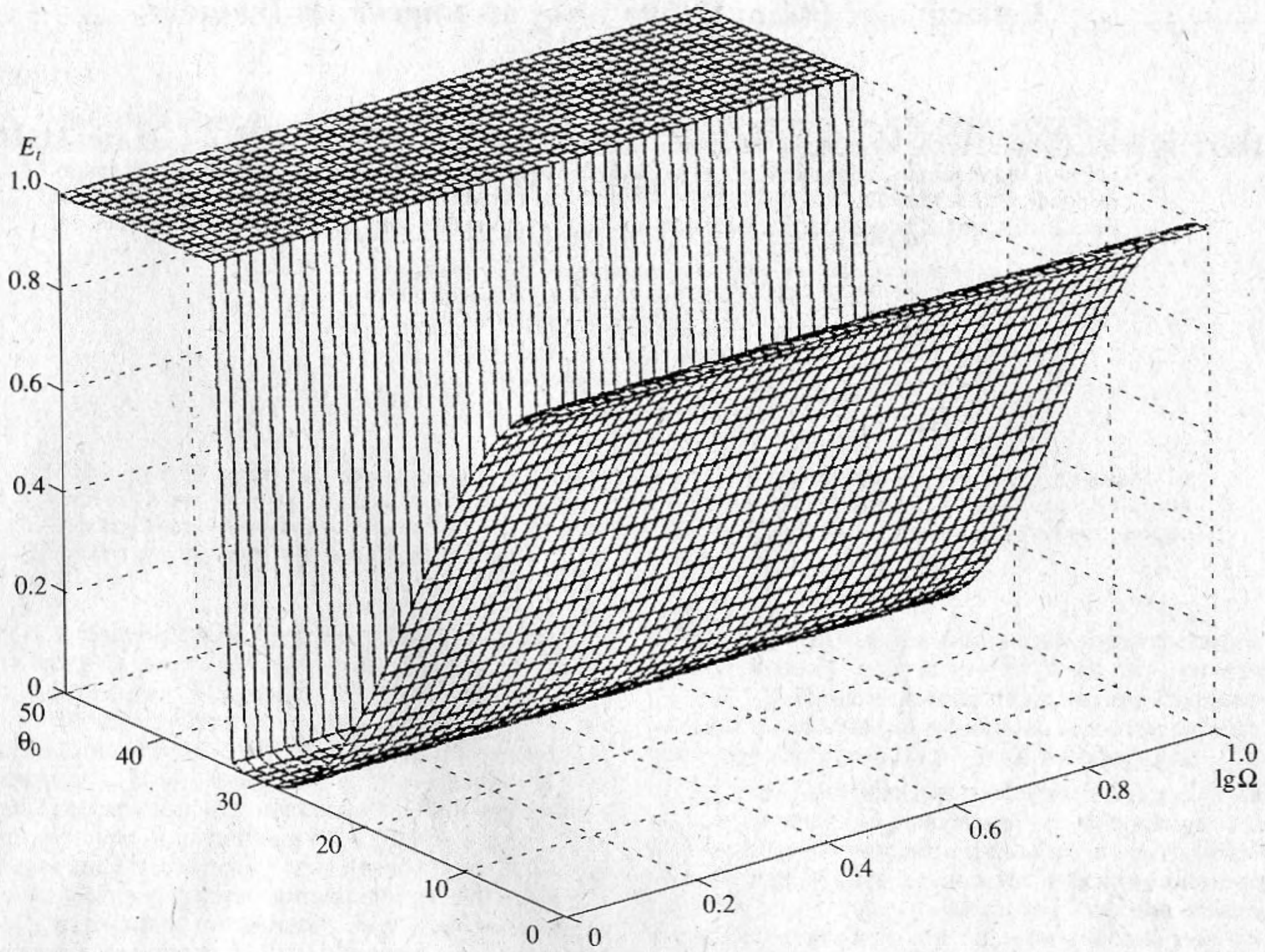

Рис. 6. Величина E_t при отражении сдвиговой волны от свободной поверхности.

Частотно-угловые характеристики величины E_t для этого случая представлены на рис. 3, аналогичному рис. 2, и рис. 4, на котором приведен трехмерный график зависимости $E_t(\Omega, \theta_0)$. Величина Ω дана в логарифмическом масштабе. Из последнего рисунка видно, что значения E_t, близкие к 1, имеют вид "плато" с небольшой "впадиной". Точную структуру этой области дает рис. 5, на котором приведены сечения функции $E_t(\Omega, \theta_0)$, в виде контуров ее постоянных значений, указанных соответствующими цифрами. Из рисунка видно, что минимальное значение E_t во "впадине" составляет 0.9713. Видна также широкая кольцевая область, в которой величина E_t весьма близка к 1. Для сравнения на рис. 6, аналогичном рис. 4, приведены данные для величины $E_t(\Omega, \theta_0)$ при отражении сдвиговой волны от свободной поверхности.

Обобщая результаты настоящей статьи и работы [5], можно считать, что исследованный в них метод "поляризации" упругих волн при их отражении от импедансной нагрузки определенного вида может найти различные практические применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Uosukainen S.* Modified JMC – metod in active control of sound. ACUSTICA. 1997. V. 83. P. 105–112.
2. *Kokowski P., Makarevicz R.* Interrupted trafic noise // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. V. 101. № 1. P. 360–371.
3. *Guo J., Pan J., Bao C.* Actively created quiet zones by multiplay control sources in free space // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. V. 101. № 3. P. 1492–1501.
4. *Тютекин В.В.* Модель плоской активной звукопоглощающей системы // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 238–243.
5. *Вовк А.Е., Тютекин В.В.* Особенности преобразования упругих волн в твердом теле при отражении от нагрузки импедансного типа // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 1. С. 46–56.
6. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965.

Reflection of Shear Waves from an Impedance Boundary

V. V. Tyutekin

Reflection of a shear plane wave incident on an impedance-loaded boundary of an isotropic elastic half-space is considered. The effect of the impedance load attached to the boundary on the energy characteristics of longitudinal and shear waves is studied. The load is modeled by a set of identical resonators responding to normal and tangential stresses and having two different resonance frequencies. At these frequencies, mixed boundary conditions are fulfilled, which results in a total reflection of the incident wave.