АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 2, с. 164–168

УДК 535.4

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КОРОТКОВОЛНОВОЙ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ НЕВЫПУКЛЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ

© 1999 г. Н. В. Боев, М. А. Сумбатян

Ростовский государственный университет
344090 Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 5
E-mail: sumbat@ms.math.rsu.ru

Поступила в редакцию 09.02.98 г.

В работе излагается аналитический метод восстановления осесимметричных невыпуклых препятствий по времени прохождения отраженного высокочастотного сигнала и вещественной амплитуде рассеянного поля. Метод основан на точном обращении нелинейного дифференциального оператора высокочастотной обратной задачи в осесимметричном случае и выделении медленно изменяющейся составляющей амплитуды рассеянного поля. Метод применим для реконструкции формы препятствий, ограниченных поверхностями, допускающими при произвольном озвучивании ультразвуковыми волнами в эхо-режиме не более двух точек зеркального отражения.

Проблема реконструкции формы препятствий в сплошных средах по различным характеристикам рассеянного поля сводится к нелинейным обратным задачам математической физики. Исследование таких задач в настоящее время является малоизученным вопросом. Создание методов восстановления формы препятствий в практически важных технических обратных задачах высокочастотной дифракции является актуальной задачей. Методы реконструкции, работающие в реальном масштабе времени, открывают возможности их использования в ультразвуковом неразрушающем контроле, других задачах обнаружения препятствий в сплошных средах. Численный метод восстановления формы произвольных гладких выпуклых трехмерных препятствий на основе функции Минковского развит в [1]. В работе [2] в плоском случае разработан численно-аналитический метод реконструкции невыпуклых препятствий со слабо меняющейся кривизной (относительно длины волны облучения) граничного контура. В настоящей работе излагается аналитический метод восстановления формы осесимметричных невыпуклых препятствий с гладкой граничной поверхностью.

Заметим, что в последнее время обратным задачам дифракции посвящен ряд работ [3, 4], опубликованных в западной печати. Для их решения используются прямые численные методы нелинейной оптимизации. Однако эти методы эффективны лишь для низких частот колебаний и не могут быть применены к рассматриваемой высокочастотной проблеме.

Пусть при шаровом облучении высокочастотными волнами в монохроматическом режиме осесимметричного препятствия (ограниченного поверхностью S) в упругой среде известными в любом направлении $\mathbf{q}$ являются время прохождения эхо-импульса $t(\mathbf{q})$ и вещественная амплитуда отраженной волны $|A(\mathbf{q})|$. Обозначим через S_{ex} выпуклые части поверхности S, а через S_{in} – невыпуклые. Ограничимся рассмотрением препятствий, односвязная поверхность S которых при облучении в любом направлении допускает в эхо-режиме не более двух точек простого однократного (назовем зеркального) отражения. Как показано в [5], данное условие заведомо выполняется, если угол между нормалями к любым двум точкам в пределах одного невыпуклого участка является острым.

Отнесем осесимметричную поверхность S, ограничивающую препятствие, к декартовой системе координат $OXYZ$, ось OZ которой совмещена с осью симметрии S. Поскольку поверхность осесимметричная, то при реконструкции достаточно восстановить линию ее пересечения с любой осевой плоскостью. Для определенности рассмотрим осевую плоскость XOZ (рис. 1). Тогда в ней $\mathbf{q}$ имеет координаты $\{\sin\theta, 0, \cos\theta\}$, а t и A есть функции угла θ: $t = t(\theta)$ и $A = A(\theta)$. Здесь θ – угол между осью симметрии OZ и направлением $\mathbf{q}$.

Как и в двумерном случае [2], реконструкция поверхности S препятствия осуществляется в два этапа. На первом этапе по известному времени $t(\theta)$ прихода отраженного импульса определяется расстояние $p(\theta)$ до касательной в точке зеркального отражения, которая в осевой плоскости имеет вид

$$x\sin\theta + z\cos\theta - p(\theta) = 0.$$

По известному семейству касательных строится огибающая кривая [6]

$$x(\theta) = -p'(\theta)\cos\theta + p(\theta)\sin\theta,$$
$$z(\theta) = p'(\theta)\sin\theta + p(\theta)\cos\theta,$$

которая определяет наименьший выпуклый контур S_0, охватывающий данный (выпуклую оболочку контура [7]).

На втором этапе восстанавливаются внутренние части S_{in} с использованием функции $A(\theta)$. Направления облучения $\mathbf{q}$ делятся на два типа. К первому типу относятся те из них, для которых при облучении препятствия в эхо-режиме существует только одна точка зеркального отражения от части S_{ex} поверхности S. При этом амплитуда обратного рассеяния в дальнем поле с точностью до некоторого постоянного множителя имеет вид [8]

$$A(\theta) = \gamma_1^{-\frac{1}{2}}(\theta)\exp[-2ikp_1(\theta)].$$

Для направлений, где существуют точки зеркального отражения от частей S_{in}, эхо-амплитуда $A(\theta)$ определяется суммой двух слагаемых

$$A(\theta) = \gamma_1^{-\frac{1}{2}}(\theta)\exp[-2ikp_1(\theta)] + \gamma_2^{-\frac{1}{2}}(\theta)\exp[-2ikp_2(\theta)].$$

Здесь $\gamma_i(\theta) = [R_1^{(i)}(\theta)\, R_2^{(i)}(\theta)]^{-1}$ – гауссова кривизна, а $R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$ и $R_1^{(2)}$, $R_2^{(2)}$ – главные радиусы кривизны в точках частей S_{ex} и S_{in} соответственно; $p_1(\theta)$ и $p_2(\theta)$ – расстояния до касательных в соответствующих точках от начала координат; k – волновое число. Для формулировки основного дифференциального уравнения обратной задачи наиболее информативным является квадрат вещественной амплитуды отраженной волны

$$F(\theta) = |A(\theta)|^2 = \gamma_1^{-1}(\theta) + \gamma_2^{-1}(\theta) + 2[\gamma_1(\theta)\gamma_2(\theta)]^{-\frac{1}{2}}\cos[2k(p_1(\theta) - p_2(\theta))],$$

который наряду с медленно меняющимися слагаемыми $\gamma_1^{-1}(\theta)$ и $\gamma_2^{-1}(\theta)$ содержит сильно осциллирующую функцию от θ в высокочастотном режиме облучения. Отфильтруем при больших k в функции $F(\theta)$ одним из способов [9] медленно меняющуюся составляющую $F_0(\theta)$

$$F_0(\theta) = \gamma_1^{-1}(\theta) + \gamma_2^{-1}(\theta).$$

В связи с тем, что выпуклые части S_{ex} содержатся в выпуклой оболочке поверхности S, функция $\gamma_1(\theta)$ является известной. Таким образом, в высокочастотном режиме гауссова кривизна в точках частей S_{in} поверхности S имеет вид

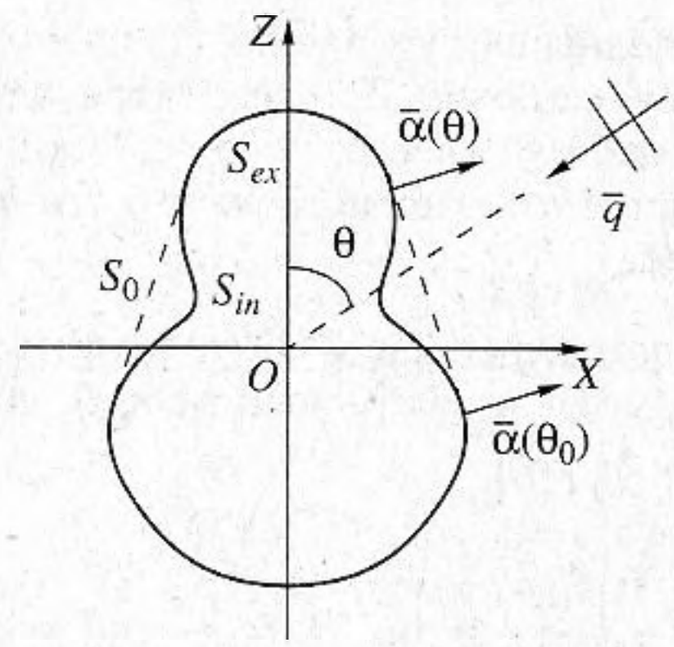

Рис. 1. Осевое сечение тела вращения вокруг оси OZ.

$$\gamma_2(\theta) = [F_0(\theta) - \gamma_1^{-1}(\theta)]^{-1}.$$

Следуя работам [1, 10], восстановление формы невыпуклых частей S_{in} поверхности S осуществляется на основе функции Минковского $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, которая в декартовых координатах внешней нормали $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ к точкам S_{in} удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$P_{11}P_{22} + P_{11}P_{33} + P_{22}P_{33} - P_{12}^2 - P_{13}^2 - P_{23}^2 = \gamma_2^{-1}(\vec{\alpha}), \tag{1}$$

$$P_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Функция $P(\vec{\alpha})$ связана с расстоянием $p(\vec{\alpha})$ от начала координат до касательной плоскости с нормалью $\vec{\alpha}$ соотношением [10]

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = rp(\alpha_1/r, \alpha_2/r, \alpha_3/r),$$

$$r = |\vec{\alpha}| = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}.$$

Уравнение (1) впервые использовано в работе [1] для реконструкции произвольных гладких трехмерных выпуклых препятствий. В ней разработан эффективный численный алгоритм его решения для выделенного класса препятствий. Аналитическое исследование нелинейного уравнения (1) в пространственном случае является в настоящее время неизученным вопросом. Дополнительные трудности вносит усложнение геометрии поверхности, ограничивающей препятствие. В связи с этим актуально выделение классов поверхностей, для которых применение аналитических ме-

тодов исследования уравнения (1) позволяет построить явное решение. Для рассматриваемого в настоящей работе класса поверхностей оператор высокочастотной задачи может быть обращен в явном виде.

Перейдем в уравнении (1) от декартовых координат нормали к сферическим r, θ, φ с учетом свойств $P(\vec{\alpha})$ [10]

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{P}{r}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial r} = 0, \quad P_i = \frac{\partial P}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В рассматриваемом осесимметричном случае оператор обратной задачи может быть представлен в виде произведения двух линейных дифференциальных относительно $P(\theta)$ сомножителей – одного второго порядка с постоянными коэффициентами $\frac{d^2P}{d\theta^2} + P$ и другого – первого порядка с переменными коэффициентами $\frac{dP}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta + P$.

Таким образом, основное дифференциальное уравнение (1) приводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\left(\frac{d^2P}{d\theta^2} + P\right)\left(\frac{dP}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta + P\right) = \gamma_2^{-1}(\theta), \tag{2}$$

которое для каждого участка S_{in} достаточно решить в некотором односвязном сферическом поясе $\theta_1 < \theta < \theta_2$ единичной сферы $r = 1$ изменения сферических координат нормали. Указанный промежуток изменения угла θ определяет при озвучивании препятствия зону "видимости" участка S_{in}: θ_1 – наименьший угол, при котором уже существует точка зеркального отражения поверхности S_{in}, а θ_2 – наибольший угол, определяющий последнюю точку зеркального отражения участка S_{in}.

Заметим, что первый сомножитель оператора (2) осесимметричной обратной задачи является оператором обратной задачи в плоском случае [1], основное уравнение которой имеет вид

$$\frac{d^2P(\theta)}{d\theta^2} + P(\theta) = \rho_2(\theta), \tag{3}$$

где $\rho_2(\theta)$ – радиус кривизны невыпуклого участка кривой, ограничивающей препятствие. Как известно, неоднородное дифференциальное уравнение (3) для произвольной функции $\rho_2(\theta)$ имеет следующую структуру:

$$P(\theta) = P^0(\theta) + P^*(\theta),$$

$$P^0(\theta) = C_1\sin\theta + C_2\cos\theta,$$

$$P^*(\theta) = \sin\theta\int_{\theta_0}^{\theta}\rho_2(\theta)\cos\theta d\theta - \cos\theta\int_{\theta_0}^{\theta}\rho_2(\theta)\sin\theta d\theta,$$

где $P^0(\theta)$ – общее решение однородного уравнения, $P^*(\theta)$ – частное решение неоднородного уравнения. Последнее в данном случае получено методом вариации произвольных постоянных C_1 и C_2. Выбор нижнего предела интегрирования в интегралах с переменным верхним пределом осуществляется так же, как и в осесимметричном случае.

Решение нелинейного уравнения в осесимметричном случае (2) может быть получено в явном виде путем сведения его к последовательному решению двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Для этого заметим, что первый дифференциальный сомножитель с постоянными коэффициентами в левой части уравнения (2) с помощью дифференциального оператора первого порядка с переменными коэффициентами может быть выражен через второй сомножитель (также с переменными коэффициентами)

$$\frac{d^2P}{d\theta^2} + P = \operatorname{tg}\theta\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dP}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta + P\right) + \left(\frac{dP}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta + P\right).$$

Это представление позволяет заменой

$$\frac{dP(\theta)}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta + P(\theta) = U(\theta) \tag{4}$$

свести исходное уравнение к уравнению Бернулли

$$\operatorname{tg}\theta\frac{dU(\theta)}{d\theta} + U(\theta) = U^{-1}(\theta)\gamma_2^{-1}(\theta). \tag{5}$$

Следуя общей теории [11], заменой $U^2(\theta) = f(\theta)$ уравнение (5) приводится к линейному относительно функции $f(\theta)$:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + 2\operatorname{ctg}\theta f(\theta) = 2\gamma_2^{-1}(\theta)\operatorname{ctg}\theta. \tag{6}$$

Решение полученного уравнения (6) разыскиваем в виде произведения двух функций $f(\theta) = u(\theta)v(\theta)$. Функцию $v(\theta)$ выбираем, как частное решение

однородного уравнения $v(\theta) = \sin^{-2}\theta$. Тогда функция $u(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = \gamma_2^{-1}(\theta)\sin 2\theta,$$

общее решение которого есть

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \gamma_2^{-1}(\theta)\sin 2\theta d\theta + C_1.$$

Таким образом, определяется функция $U(\theta)$, являющаяся общим решением уравнения (5):

$$U(\theta) = f^{\frac{1}{2}}(\theta) =$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\int_{\theta_0}^{\theta} \gamma_2^{-1}(\theta)\sin 2\theta d\theta + C_1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

После того, как определена функция $U(\theta)$, становится известной правая часть уравнения (4) относительно функции $P(\theta)$. Решение линейного дифференциального уравнения (4) находится так же как и решение уравнения (6). В результате функция $P(\theta)$ может быть представлена в следующем виде:

$$P(\theta) = \cos\theta \times$$

$$\times\left\{\int_{\theta_0}^{\theta}\left[\cos^{-2}\theta\left(\int_{\theta_0}^{\theta}\gamma_2^{-1}(\theta)\sin 2\theta d\theta + C_1\right)^{\frac{1}{2}}\right]d\theta + C_2\right\}. \quad (7)$$

Она содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Получение функции $P(\theta)$ на внутренних частях S_{in} для конкретной осесимметричной поверхности S связано с необходимостью задания для уравнения (2) двух краевых условий. Такие условия определяются с использованием геометрической структуры построенной выпуклой оболочки S_0 поверхности S. По выпуклой оболочке определяются общие точки выпуклых S_{ex} и внутренних S_{in} частей поверхности. Для каждой части S_{in} таких точек две, они лежат на концах кривой осевого сечения (рис. 1) и определяются единой нормалью $\vec{\alpha}(\theta_0)$ при некотором $\theta_1 < \theta = \theta_0 < \theta_2$. Интегрирование уравнения (2), т.е. вычисление $P(\theta)$, проводится на отрезках $[\theta_1, \theta_0]$ и $[\theta_0, \theta_2]$ при известных для выпуклой оболочки начальных условиях $P(\theta_0) = P_0$ и $\left.\frac{dP}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = P_0'$. При поэтапном интегрировании уравнения (2) последовательно определяются постоянные C_1 и C_2 для каждого отрезка интегрирования:

$$C_1 = \sin^2\theta_0(P_0'\operatorname{ctg}\theta + P_0)^2, \quad C_2 = P_0\cos^{-1}\theta_0.$$

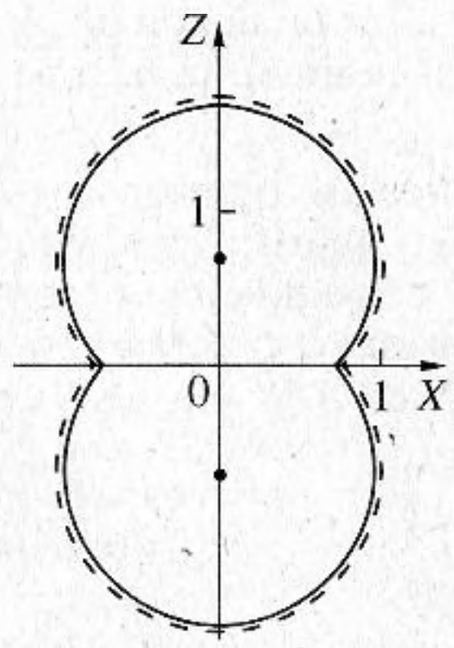

Рис. 2

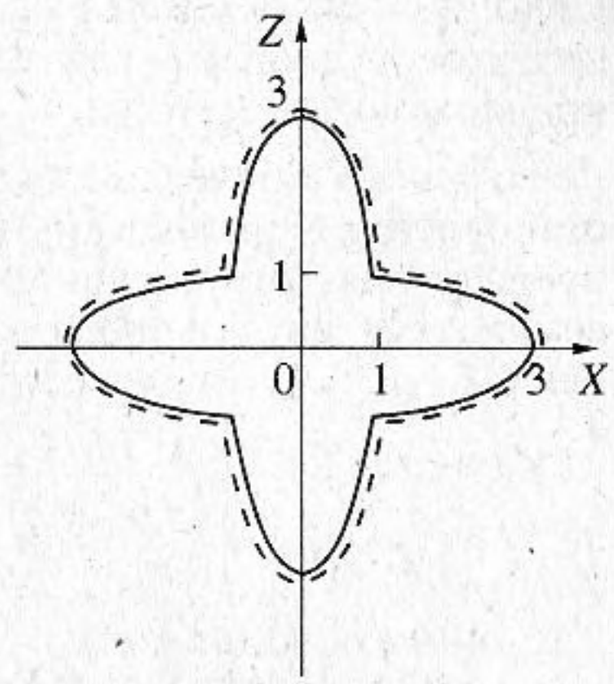

Рис. 3

Рис. 2. Реконструкция препятствия в виде пары пересекающихся шаров.

Рис. 3. Реконструкция препятствия в виде пересекающихся эллипсоидов вращения.

Заметим, что на каждом отрезке интегрирования $\left.\frac{dP}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0}$ естественно понимать как $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\frac{P(\theta)-P(\theta_0)}{\theta-\theta_0}$ при стремлении $\theta \longrightarrow \theta_0$ со стороны соответствующего выпуклого участка S_{ex} выпуклой оболочки S_0. Таким образом, вычисление функции $P(\theta)$, восстанавливающей внутреннюю часть S_{in}, сводится к вычислению повторных интегралов по отрезкам $[\theta_1, \theta_0]$ и $[\theta_0, \theta_2]$. При этом восстанавливаются две части поверхности S_{in} до линии их пересечения.

При практической реализации предложенного метода значения θ_1 и θ_2 всегда определяются с некоторой погрешностью. Это связано с тем, что они определяются по графику вещественной амплитуды $|A(\theta)|$ обратного рассеяния как значения, в которых медленно меняющаяся часть кривой сменяется быстроосциллирующей для соответствующей внутренней части S_{in}. Такой выбор θ_1 и θ_2 иллюстрируется графически в работе [2] для плоского случая.

В рамках предложенного подхода проведены численные эксперименты по реконструкции конкретных осесимметричных препятствий.

На рис. 2 представлен пример реконструкции в осевой плоскости XOZ невыпуклого препятствия, ограниченного объединением двух пересекающихся сфер

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1,$$

$$x^2 + y^2 + \left(z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Сплошной линией изображен истинный контур, а штриховой линией – восстановленный на основе предложенного метода.

На рис. 3 приведен графический пример восстановления в плоскости XOZ осесимметричного препятствия, ограниченного объединением поверхностей двух эллипсоидов вращения вокруг оси OZ

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1,$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1.$$

В приведенных примерах реконструкции диаграмма обратного рассеяния $A(\theta)$ определяется в результате решения прямой задачи дифракции методом граничных элементов. При этом характерный размер препятствия составляет 10 длин волн. Проблема фильтрации низкочастотной составляющей $F_0(\theta)$ от функции $F(\theta) = |A(\theta)|^2$ в данном случае решается на основе явного представления (7) опорной функции $P(\theta)$. Полученное решение обратной задачи в виде повторного интеграла осуществляет естественное отфильтровывание низкочастотной составляющей.

Авторы выражают признательность А.О. Ватульяну за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 97-01-00633).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сумбатян М.А., Троян Э.А.* Восстановление формы выпуклого дефекта по рассеянному волновому полю в лучевом приближении // Прикл. мат. мех. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 552–556.
2. *Боев Н.В., Ватульян А.О., Сумбатян М.А.* Восстановление контура препятствий по характеристикам рассеянного поля в коротковолновой области // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 4. С. 458–462.
3. *Piana M., Bertero M.* Projected Landweber method and preconditioning // Inverse Probl. 1997. Vol. 13. № 2. P. 441–463.
4. *Mönch Lars.* On the inverse acoustic scattering problem by an open arc: The sound-hard case // Inverse Probl. 1997. Vol. 13. № 5. P. 1379–1392.
5. *Дружинина И.Д., Сумбатян М.А.* Коротковолновая дифракция на телах с произвольной гладкой границей в двумерном случае // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 470–476.
6. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Гос. изд-во. тех.-теор. лит., 1956. 420 с.
7. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. 480 с.
8. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
9. *Каппелини В., Константинидис А.Д., Эмилиани П.* Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983. 360 с.
10. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. Т. 1. М.; Л.: ОНТИ. Глав. ред. общетех. лит. и номогр., 1935. 330 с.
11. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во. Ленингр. ун-та, 1955. 656 с.

An Inverse Problem of High-Frequency Diffraction for Nonconvex Axially Symmetric Obstacles

N. V. Boev and M. A. Sumbatyan

An analytical method of reconstructing axially symmetric nonconvex obstacles from the propagation time of the reflected signal and the real amplitude of the scattered field is presented. This method is based on the exact inversion of the nonlinear differential operator of the high-frequency inverse problem for an axially symmetric case and the separation of the slowly varying component of the scattered field amplitude. The method is applicable for reconstructing the shape of obstacles bounded by surfaces which, under arbitrary ultrasonic insonification in the echo mode, allow no more than two points of mirror reflection.