АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 4, с. 445–449

УДК 532.26

О ВОЛНАХ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ УЗКОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

© 1999 г. И. В. Андронов

Санкт-Петербургский государственный университет
198904 С.-Петербург, Петродворец, ул. Ульяновская, 1/1
E-mail: iva@aa2628.spb.edu

Поступила в редакцию 7.07.98 г.

Классическая точечная модель трещины, как показано в [1], справедлива лишь для "экспоненциально" узких по сравнению с толщиной пластины трещин, когда $kW \ll \exp(-(kh)^{-8/5})$, где W – ширина трещины, h – толщина пластины, k – волновое число. В связи с этим, полученные ранее результаты в ряде систем с трещинами, вообще говоря, должны быть пересмотрены с точки зрения усовершенствованной модели [2]. В данной работе исследуются краевые волны, изученные для случая бесконечно узкой трещины в [3]. Проведено численное исследование дисперсионных уравнений для волновых чисел симметричных и антисимметричных краевых волн в зависимости от параметров системы пластина–жидкость.

Как известно [4], вблизи края пластины, находящейся в вакууме, может распространяться волна типа рэлеевской. В западной литературе открытие кромочных волн приписывается McKenna с соавторами [5], [6]. В случае ортотропной пластины кромочные волны исследованы в [7], а для пластины, описываемой теорией Тимошенко–Миндлина, в [8]. В реальных ситуациях пластина находится в контакте с внешней акустической средой, что сказывается на характере колебаний. Наличие контакта с внешней средой может привести к качественным изменениям в волновых процессах. В [3] исследовано влияние акустической среды малой плотности на характер кромочных волн. В качестве модели трещины выбрана классическая модель [9] и по методу теории возмущений получены поправки к волновым числам, отвечающим кромочным волнам в изолированной пластине. Указанный подход не позволил исследовать краевые волны в тех случаях, когда возмущение, вносимое акустической средой, велико. В этом случае необходим численный анализ дисперсионных уравнений.

В данной работе в качестве модели трещины принята обобщенная модель [2], которая позволяет учесть величину раскрытия трещины. Пусть акустическая среда заполняет полупространство ($-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < z < 0$) (фиг. 1). На границе ($z = 0$) расположена пластина, колебания которой описываются приближенной теорией Кирхгофа [10]. Вдоль прямой $x = 0$ в пластине имеется трещина ширины W.

Поле давлений $P(x, y, z)$ в системе определяется следующими уравнениями

$$(\Delta - k^2)P(x, y) = 0, \quad z < 0, \tag{1}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 - k_0^4\right]\frac{\partial}{\partial z}P - \nu P = 0, \tag{2}$$

$$z = 0, \quad x \neq 0.$$

Условия на трещине формулируются в виде контактных условий

$$\lim_{x \to \pm 0}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2 - \sigma)\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\right)\frac{\partial P}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0,$$

$$\lim_{x \to \pm 0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial P}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \tag{3}$$

и асимптотики звукового давления

$$P \sim c(y)\ln(8r/W) + o(1), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \longrightarrow 0. \tag{4}$$

Здесь k и k_0 – волновые числа в акустической среде и в изолированной пластине, $\nu = \rho\omega^2/D$, ρ –

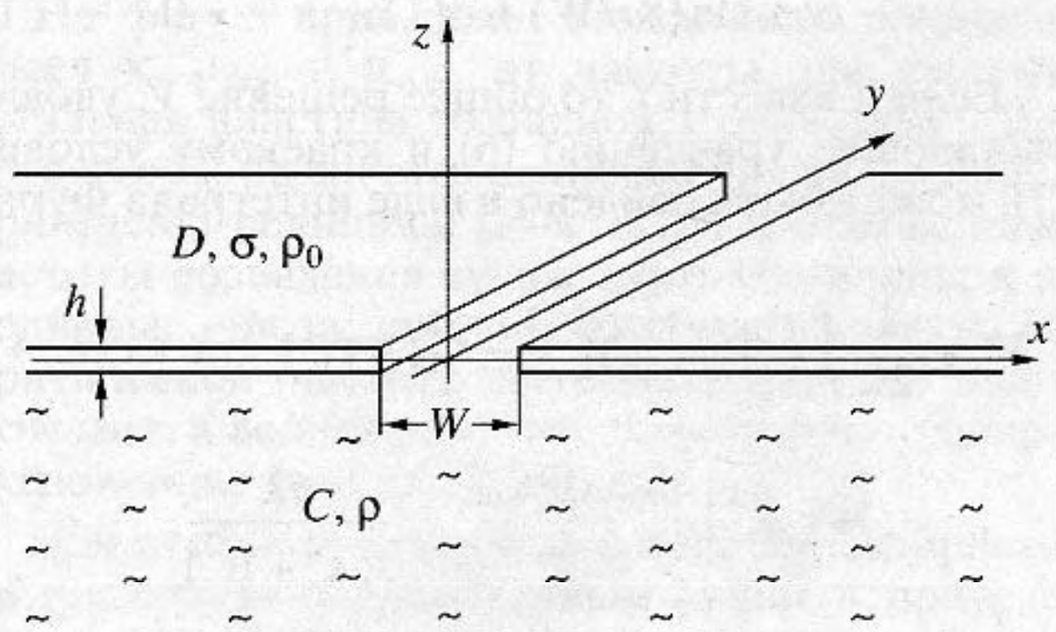

Рис. 1. Геометрия задачи.

плотность акустической среды, D – цилиндрическая жесткость пластины, σ – коэффициент Пуассона, ω – круговая часть колебаний (множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен), $c(y)$ – произвольная функция.

Классическая модель возникает, если условие (4) заменить условием Майкснера, интерпретируемым как отсутствие источника в акустической среде. В том случае, если на прямой $x = z = 0$ присутствует источник, акустическое поле имеет логарифмическую особенность. В [2] показано, что для пассивного источника коэффициенты при логарифмическом члене и при следующем члене асимптотического разложения ближнего поля должны быть пропорциональны. Формула (4) возникает как приближенное равенство нулю акустического давления на поверхности эффективного цилиндра радиуса $W/8$, которым заменяется раскрытие трещины.

Рассматриваются решения, имеющие вид волн, распространяющихся вдоль координаты y:

$$P(x, y, z) = e^{i\mu y} v(x, z). \tag{5}$$

Волновое число μ является неизвестным, и его нахождение является основной целью исследований. Подстановка (5) в уравнения (1), (2) и условия (3), (4) приводит к спектральной задаче для $v(x, z)$ и μ:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v + (k^2 - \mu^2) v = 0, \quad z < 0, \tag{6}$$

$$\left[\left(\frac{d^2}{\partial x^2} - \mu^2\right)^2 - k_0^4\right]\frac{\partial v}{\partial z} - \nu v = 0, \tag{7}$$

$$z = 0, \quad x \neq 0,$$

$$\lim_{x \to \pm 0}\left(\frac{d^3}{dx^3} - (2-\sigma)\mu^2 \frac{d}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0,$$

$$\lim_{x \to \pm 0}\left(\frac{d^2}{dx^2} - \sigma\mu^2\right)\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \tag{8}$$

$$v \sim \mathrm{const} \ln(8r/W) + o(1), \quad r \longrightarrow 0. \tag{9}$$

Если μ известно, то общее решение V, удовлетворяющее уравнению (6) и краевому условию (7), может быть найдено в виде интеграла Фурье

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \{c[(\lambda^2 + \mu^2)^2 - k_0^2] + c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3\} e^{i\lambda x + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2} z} \frac{d\lambda}{l(\lambda^2 + \mu^2)},$$

$$l(\tau) = (\tau^2 - k_0^4)\sqrt{\tau - k^2} - \nu.$$

Здесь неизвестные постоянные c и c_j играют роль амплитуд пассивных источников.

Подставив V в условия (8) и (9), моделирующие трещину, получим систему для нахождения постоянных c и c_j, $j = 0, 1, 2, 3$, играющих роль амплитуд пассивных источников, прикрепленных к пластине (c_j), и акустического пассивного источника (c). Ввиду симметрии задачи система распадается на две независимых подсистемы. Первая отвечает четной по x части функции V и содержит три уравнения

$$\begin{cases} [D_3 + (2-\sigma)D_1\mu^2]c_0 + [D_5 + (2-\sigma)D_3\mu^2]c_2 = 0, \\ [D_2 + \sigma D_0\mu^2]c_0 + [D_4 + \sigma D_2\mu^2]c_2 + \\ + \nu[B_2 + \sigma B_0\mu^2]c = 0, \\ B_0 c_0 + B_2 c_2 + \left[\dfrac{1}{\pi}\ln\left(\dfrac{\sqrt{\mu^2 - k^2}W}{8}\right) + \dfrac{\gamma}{\pi} + \nu I\right]c = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь введены интегралы

$$D_j(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\lambda^j \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2}}{l(\lambda^2 + \mu^2)} e^{+i0\lambda} d\lambda,$$

$$B_j(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\lambda^j}{l(\lambda^2 + \mu^2)} d\lambda, \tag{11}$$

$$I(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\lambda}{l(\lambda^2 + \mu^2)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2}}.$$

Контуры интегрирования выбираются согласно принципу предельного поглощения.

Условие равенства нулю определителя системы (10) приводит к дисперсионному уравнению

$$F_0(\mu) \equiv D_4(\mu) + 2\sigma\mu^2 D_2(\mu) + \sigma^2\mu^4 D_0(\mu) - \pi\nu \frac{(B_2(\mu) + \sigma\mu^2 B_0(\mu))^2}{\ln(\sqrt{\mu^2 - k^2}W/8) + \gamma + I(\mu)}. \tag{12}$$

При выводе дисперсионного уравнения были использованы явные формулы [3] для интегралов D_j с нечетными номерами:

$$D_1 = 0, \quad D_3 = \pi i, \quad D_5 = -2\pi i\mu^2. \tag{13}$$

В случае классической модели при $W = 0$ последнее слагаемое в (12) заменяется нулем. Дисперсионное уравнение в этом случае получено в [3].

Система уравнений для определения постоянных c_1 и c_3 не содержит величины раскрытия трещины W и совпадает с классической [3]

$$\begin{cases} [D_3 + \sigma D_1\mu^2]c_1 + [D_5 + \sigma D_3\mu^2]c_3 = 0, \\ [D_4 + (2-\sigma)D_2\mu^2]c_1 + [D_6 + (2-\sigma)D_4\mu^2]c_3 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Соответствующее дисперсионное уравнение для антисимметричных краевых волн имеет вид

$$F_1(\mu) \equiv D_6(\mu) + 2(2-\sigma)\mu^2 D_4(\mu) + \\ + (2-\sigma)^2\mu^4 D_2(\mu) = 0. \quad (15)$$

Прежде чем решать дисперсионные уравнения (12) и (15), исследуем функции $F_0(\mu)$ и $F_1(\mu)$ на комплексной плоскости параметра μ. Заметим, что подынтегральные выражения в (11) вещественны, если $\mu^2 > k^2$. При этом, если $\mu > \kappa$, где κ положительный корень уравнения

$$l(\tau^2) = 0, \quad (16)$$

контуры интегрирования в (11) могут быть совмещены с вещественной осью λ. В этом случае интегралы (11) вещественны. Как указано в [9], интегралы D_j, а аналогичным образом и остальные интегралы, сводятся к суммам вычетов подынтегральных выражений, домноженных на логарифм, в нулях знаменателя на обоих листах римановой поверхности функции $\sqrt{\lambda^2+\mu^2-k^2}$. Считая корни уравнения (16) известными, легко установить, что для функций F_0 и F_1 эти значения μ являются точками ветвления. При этом функция F_0 при приближении к нулям (16) неограниченно возрастает, а функция F_1 остается конечной. Вычисляя вычет в $\lambda = \sqrt{\mu^2-\kappa^2}$, несложно показать, что

$$\lim_{\mu \to k+0} F_0(\mu) = +\infty$$

Несложно также определить знак функции F_0 при больших μ. Здесь надо учесть два обстоятельства. Во-первых, интегралы D_4 и D_6 требуют регуляризации, которая состоит в вычитании из подынтегральных выражений соответственно 1 и λ^2. Во-вторых, модель узкой трещины справедлива лишь при $\sqrt{\mu^2-k^2}\,W \ll 1$, так что интерес представляет лишь отрезок $\mu \in (\kappa, \delta W^{-1})$, $\delta \ll 1$. Функция F_0 на правом конце этого отрезка отрицательна. Таким образом, при $W = 0$ вещественное решение дисперсионного уравнения (12) существует при любых параметрах системы и лежит на луче $\mu > \kappa$. При $W > 0$ возможны две ситуации: либо существуют два вещественных корня уравнения (12), меньший из которых отвечает четной волне, распространяющейся вдоль трещины, а больший не имеет физического смысла, так как лежит вне области применения условия (4); либо вещественных корней нет. Последний случай также означает, что для соответствующей кромочной волны условие (4) неприменимо и должна быть использована "точная" постановка условий на трещине типа используемых в [1].

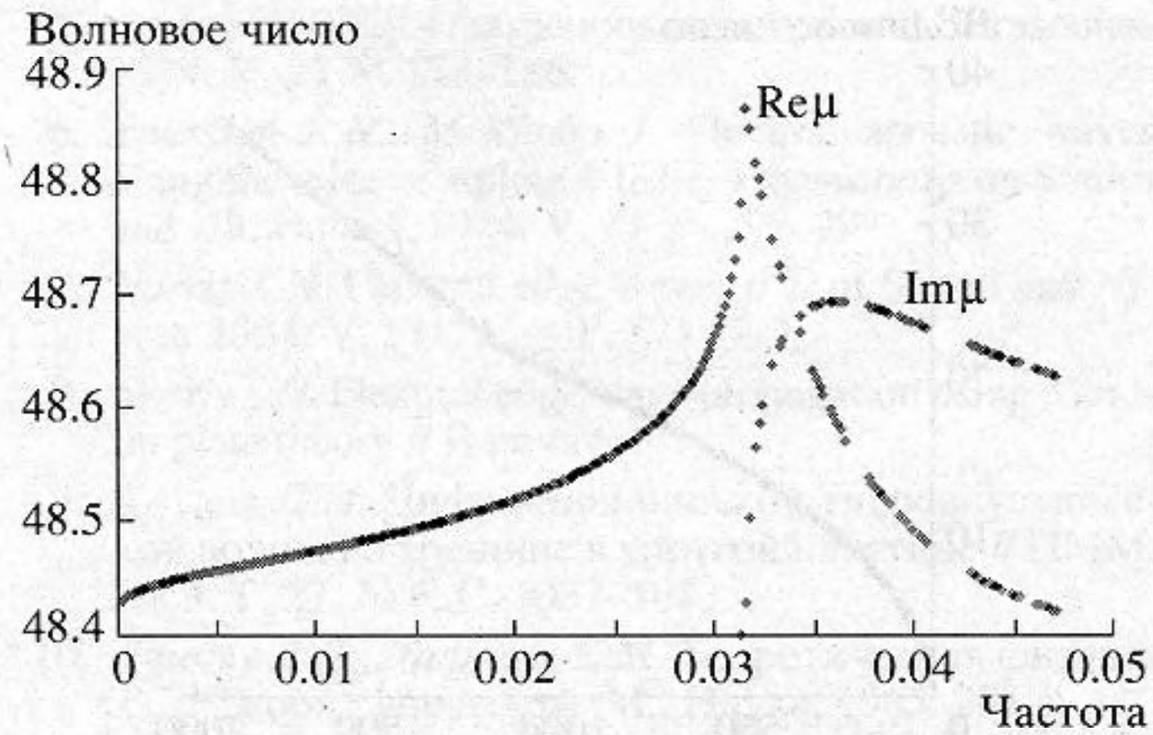

Рис. 2. Зависимость волнового числа четной кромочной волны от ширины трещины в стальной пластине, погруженной в воду, на частоте 5 кГц.

Аналогичный анализ дисперсионного уравнения (15) для антисимметричных кромочных волн не позволяет сделать заключения об условиях существования таких волн.

Ниже приведены результаты численного решения дисперсионных уравнений (12) и (15). Вычисление интегралов (11) проводилось по формулам, сводящим их к суммам вычетов, а значения (13) использовались для контроля точности.

Зависимость волнового числа симметричной кромочной волны от ширины трещины для системы "сантиметровая стальная пластина–вода" приведена на фиг. 2. При малых μW поправка на ширину трещины мала. При увеличении ширины трещины к физическому корню приближается из бесконечности паразитный нефизический корень уравнения (12), корни сливаются и уходят в комплексную плоскость. В этом случае приближенная модель неприменима. Характер зависимости волнового числа от ширины трещины остается таким же и для других комбинаций параметров пластины и жидкости. Ввиду малого отличия кромочных волн в классической и обобщенной моделях трещины ниже приводятся численные результаты для $W = 0$.

На фиг. 3 приведены зависимости волновых чисел κ, μ_{sym} и μ_{asym} от частоты для системы "стальная пластина толщиной 1 см–воздух". Для того чтобы различить волновые числа, на фиг. 4 приведены величины $\mu^2-\kappa^2$. При частотах ниже частоты совпадения существуют обе волны и их волновые числа заметно отличаются от κ. На критической частоте антисимметричная волна исчезает, а волновое число симметричной волны экспоненциально приближается к κ.

Для стальной пластины в воде характеристики, аналогичные приведенным на фиг. 4, приведены на фиг. 5. Симметричная волна подчиняется тем же закономерностям, что и в случае воздуш-

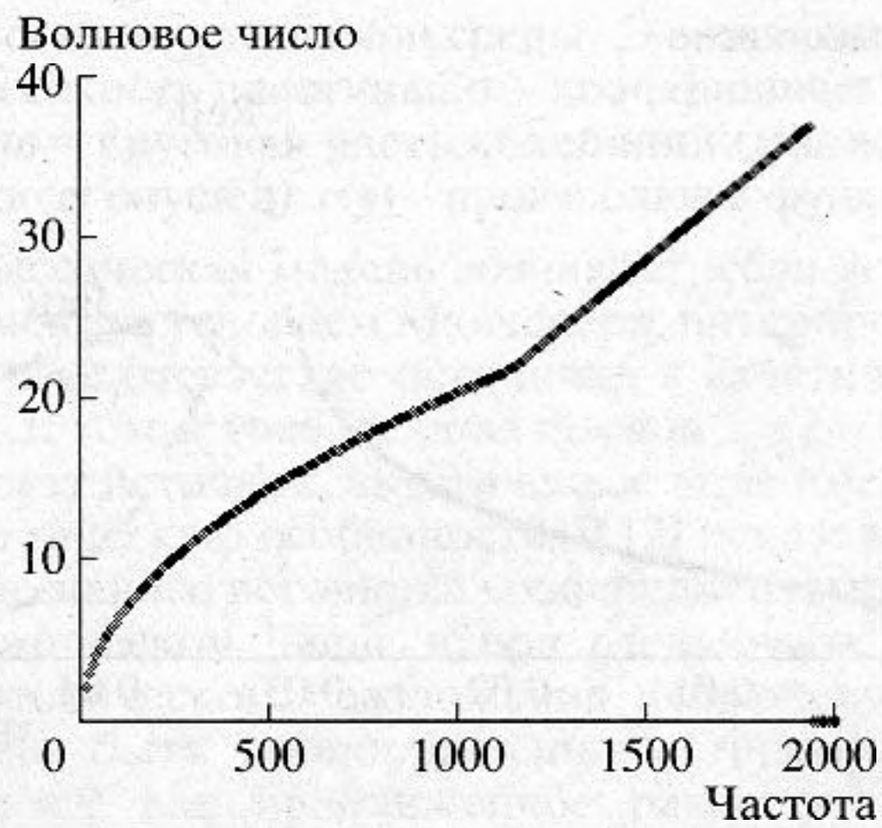

Рис. 3. Частотные зависимости волновых чисел поверхностной и кромочных волн для стальной пластины в воздухе.

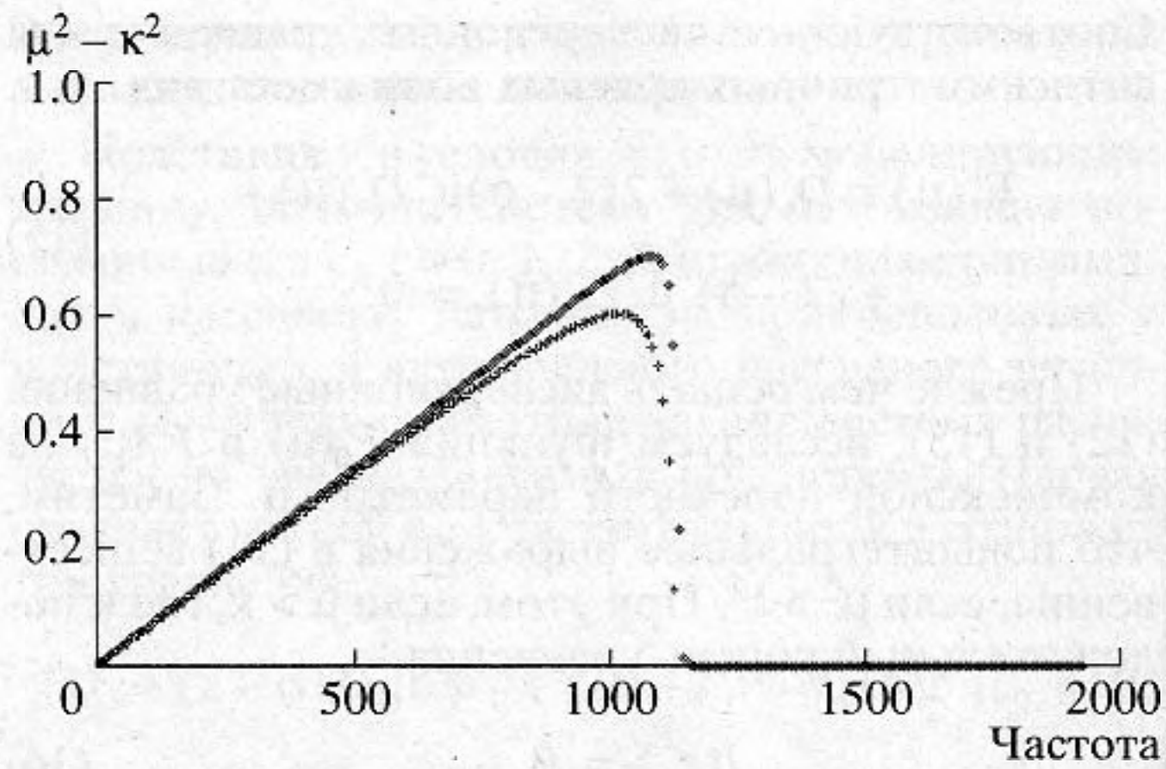

Рис. 4. Величины $\mu^2_{sym} - \kappa^2$ (◇) и $\mu^2_{asym} - \kappa^2$ (+) для кромочных волн в стальной пластине в воздухе.

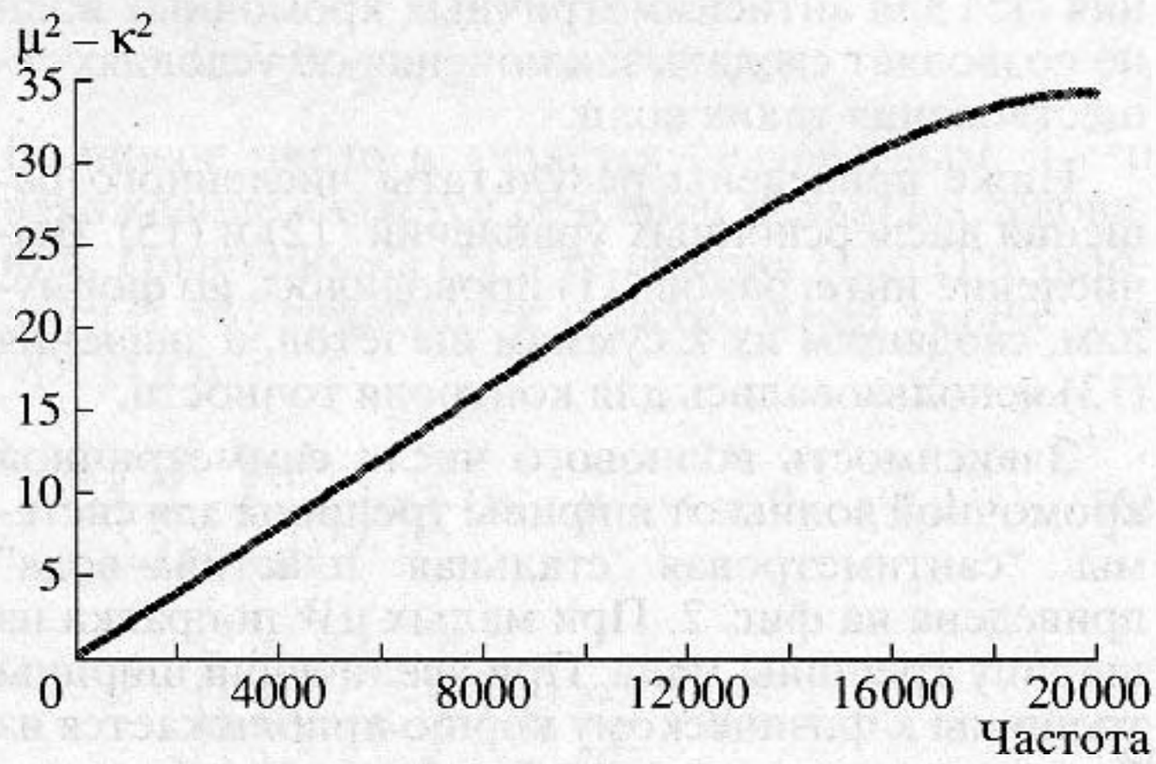

Рис. 5. Величина $\mu^2_{sym} - \kappa^2$ для стальной пластины в воде в зависимости от частоты.

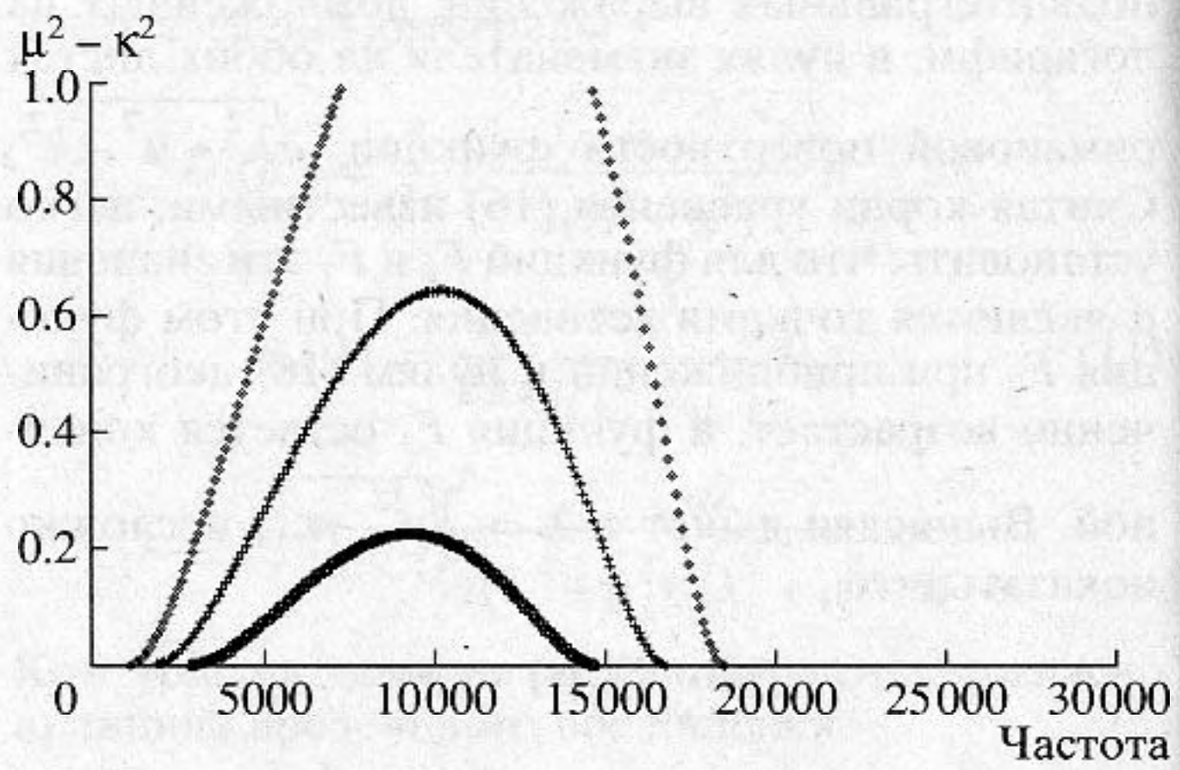

Рис. 6. Частотные зависимости $\mu^2_{asym} - \kappa^2$ антисимметричной кромочной волны для акустических сред плотности 200 (◇), 250 (+) и 300 кг/м^3 (□).

ного нагружения пластины, однако антисимметричная волна отсутствует во всем диапазоне частот.

Для гипотетической жидкости со скоростью звуковых волн 1500 м/с и плотностью 200, 250 и 300 кг/м^3 частотные характеристики $\mu^2_{asym} - \kappa^2$ (фиг. 6) показывают, что существуют две критические частоты f_1, f_2, зависящие от параметров системы. На частотах ниже f_1 и выше f_2 антисимметричная кромочная волна отсутствует. Для акустических сред низкой плотности, таких как воздух, нижняя частота близка к нулю, а верхняя приближается к частоте совпадения. По мере увеличения плотности среды f_1 увеличивается, а f_2 уменьшается и для воды интервал $[f_1, f_2]$ вырождается.

Аналитическое и численное исследование кромочных волн показало, что симметричная волна существует всегда, а антисимметричная волна существует лишь в некотором диапазоне частот, тем большем, чем меньше плотность акустической среды. Обе волны распространяются с волновыми числами, близкими к волновому числу поверхностных волн в пластине, так что волновые поля достаточно медленно убывают при удалении от трещины.

Область применимости обобщенной модели трещины определяется условием $\kappa W \ll 1$. Для таких узких трещин поправки, вносимые обобщенной моделью, практически незаметны и, как отмечено в [1], для описания волновых процессов вблизи пластины может быть использована классическая модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов И.В., Белинский Б.П.* Рассеяние гидроакустических волн на узком вырезе в упругой пластине // ПММ. 1997. Т. 61. № 2. С. 202–209.
2. *Андронов И.В.* О сравнении моделей дефектов пластин в гранично-контактных задачах акустики // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 2. С. 149–154.
3. *Коузов Д.П., Лукьянов В.Д.* О волнах, распространяющихся вдоль кромок пластин // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 4. С. 549–555.
4. *Коненков Ю.К.* Об изгибной волне рэлеевского типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2.
5. *McKenna J., Bayd G.D., Thurston R.N.* Plate theory solution for guided flexural acoustic waves along the tip of a wedge // IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics. 1974. V. 21. P. 178–186.
6. *Thurston R.N., McKenna J.* Flexural acoustic waves along the edge of a plate // IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics. 1974. V. 21. P. 296–297.
7. *Norris A.N.* Flexural edge waves // J. of Sound and Vibrat. 1994. V. 171. № 4. P. 571–573.
8. *Norris S.N.* Flexural edge wave propagation using Mindlin plate theory // В печати.
9. *Коузов Д.П.* Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // ПММ. 1963. Т. 27. № 6. С. 1037–1043.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.

Waves Propagating along a Narrow Crack in an Elastic Plate

I. V. Andronov

The classical point model of a crack [1] is valid only for cracks of widths exponentially small compared to the plate thickness: $kW \ll \exp(-(kh)^{-8/5})$, where W is the crack width, h is the plate thickness, and k is the wave number. Therefore, generally speaking, the results obtained earlier for some systems with cracks should be reconsidered in terms of an improved model [2]. This paper presents the corresponding study of the edge waves described earlier for the case of an infinitely narrow crack [3]. A numerical study of the dispersion equations is performed for the wave numbers of symmetric and antisymmetric edge waves with different parameters of the plate–liquid system.