АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 4, с. 562–564

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.44

О БЫСТРОДЕЙСТВИИ И ПОГРЕШНОСТЯХ ПАРАЛЛЕЛЬНО-КОНВЕЙЕРНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ТЕКУЩИХ СПЕКТРОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ

© 1999 г. Г. Я. Волошин

Тихоокеанский океанологический институт Дальневосточного отделения РАН
690041 Владивосток, ул. Балтийская, 43
E-mail: pacific@online.marine.su

Поступила в редакцию 10.07.97 г.

При анализе нестационарных случайных сигналов традиционно используются текущие (мгновенные) спектральные функции:

$$S_T(\omega, t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t+\tau)\exp\{-j\omega\tau\}d\tau,$$

где $f(t)$ – анализируемый сигнал; $S_T(\omega, t)$ – текущий спектр на временном окне T. В дискретной форме это можно записать так:

$$S_N(k, t) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(t+i)\exp\left\{-j2\pi k\frac{i}{N}\right\}, \qquad (1)$$

где N – число отсчетов в анализируемом временном окне, k – номер спектральной составляющей, $t = 1, 2, \ldots$ – текущее дискретное время начала анализируемого окна, $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ – номер временного отсчета внутри анализируемого окна.

Будем сравнивать быстродействие прямого счета по формуле (1), быстрого преобразования Фурье (БПФ) и так называемого параллельно-конвейерного метода (ПКМ). Если первые два метода хорошо известны, то относительно последнего дадим некоторые пояснения.

Нетрудно убедиться в том, что при сдвиге начала анализируемого окна на один отсчет пересчет спектральной функции может осуществляться по формуле:

$$S_N(k, t+1) = \frac{1}{N}\exp\left\{-j2\pi\frac{k}{N}\right\}[NS_N(k, t) - f(t) + f(t+N)]. \qquad (2)$$

Действительно,

$$S_N(k, t+1) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(t+1+i)\exp\left\{-j2\pi k\frac{i}{N}\right\} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(t+i)\exp\left\{-j2\pi k\frac{i-1}{N}\right\} =$$

$$= \frac{1}{N}\exp\left\{j2\pi\frac{k}{N}\right\}\sum_{i=1}^{N} f(t+i)\exp\left\{-j2\pi k\frac{i}{N}\right\} =$$

$$= \frac{1}{N}\exp\left\{j2\pi\frac{k}{N}\right\}\left[\sum_{i=0}^{N-1} f(t+i)\exp\left\{-j2\pi k\frac{i}{N}\right\} - f(t) + f(t+N)\exp\{-j2\pi k\}\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\exp\left\{j2\pi\frac{k}{N}\right\}[NS_N(k, t) - f(t) + f(t+N)].$$

Сдвиг временнóго окна на один отсчет оправдывает применение названия “конвейерный” спектральный анализ. Вычисление по формуле (2) значений различных спектральных составляющих независимо друг от друга (параллельно) в совокупности с одношаговым сдвигом анализируемого временнóго окна мы впредь будем называть параллельно-конвейерным методом [1].

Сама по себе формула (2) не является новой и связана с достаточно давними публикациями (см., например, [2]), но ее вычислительные возможности, по-видимому, недооценены и заслуживают специального рассмотрения. ПКМ в ряде практически важных приложений превосходит БПФ по быстродействию и (или) функциональным возможностям. Под функциональными возможностями здесь понимается степень свободы выбора

величин сдвига во времени анализируемых окон, а также номеров вычисляемых спектральных составляющих. В этом отношении формула (1) имеет наибольшие функциональные возможности. Она позволяет произвольно выбирать временной сдвиг между анализируемыми окнами и номера вычисляемых спектральных составляющих. БПФ в обязательном порядке реализует вычисление всех N спектральных составляющих. ПКМ позволяет произвольно выбирать вычисляемые спектральные составляющие. При этом для реализации сдвига во времени на n отсчетов приходится по формуле (2) последовательно вычислять n спектров со сдвигом анализируемых временны́х окон на один отсчет.

Сравним теперь быстродействие упомянутых трех методов для случая, когда анализируемые временны́е окна перекрываются, т.е. $N > n \geq 1$, где n – сдвиг между окнами, выраженный в количестве отсчетов сигнала (при $n \geq N$ применение ПКМ не имеет смысла).

Предположим, что $N = 2^q$, где q – целое число. Тогда для расчета $m \leq N$ спектральных составляющих по N временны́м отсчетам по формуле (1) требуется Nm операций типа "сложение + умножение", впредь именуемых просто операциями. Для реализации БПФ необходимо выполнить $2N\log_2 N$ операций, а при ПКМ – nm.

Как видно, в условиях $N > n \geq 1$ ПКМ явно предпочтительнее вычислений по формуле (1). Превосходит он по быстродействию и БПФ, если $nm < 2N\log_2 N$.

Рассмотрим следующий пример. Если $N = 1024$, $n = 10$, $m = 100$, то ПКМ "быстрее", чем БПФ примерно в 10 раз и в 100 раз превосходит в этом отношении вычисление по формуле (1).

Если исследователю необходим предельно тонкий анализ динамики мгновенных спектров ($n = 1$), то ПКМ находится вне конкуренции. Даже при вычислении всех N спектральных составляющих он "быстрее" БПФ в $2\log_2 N$ раз. Если же требуется вычислить $m < N$ спектральных составляющих, то превосходство параллельно-конвейерного метода над БПФ по быстродействию выражается величиной $2\frac{N}{m}\log_2 N$. Например, для $N = 1024$, $m = 100$ эта величина равна ~200.

Следует отметить, что наличие в товарном виде готового программного продукта, реализующего ПКМ, не является актуальным, так как формула (2) элементарно программируется и встраивается в случае необходимости в любой программный комплекс его пользователем.

ПКМ основан на рекуррентном пересчете спектральной функции при последовательном сдвиге анализируемого временно́го окна на один отсчет, что таит в себе опасность накопления ошибок вычислений. Рассмотрим ошибки вычислений спектров параллельно-конвейерным методом, вызванные погрешностями аналого-цифрового преобразования (АЦП) и операцией округления в арифметическом устройстве. Ясно, что первая причина является решающей, так как погрешности АЦП на много порядков превышают погрешности округления.

Рассмотрим влияние погрешности единичного отсчета АЦП. Из

$$f^*(t+N) = f(t+N) + \delta_f(t+N),$$

где $f(t+N)$ – истинные значения сигнала, $\delta_f(t+N)$ – величина погрешности аналого-цифрового преобразования, имеем

$$S_N^*(k, t+1) = \frac{1}{N}\exp\left\{j2\pi\frac{k}{N}\right\}\times$$

$$\times[NS_N(k,t) - f(t) + f(t+N) + \delta_f(t+N)] =$$

$$= S_N(k, t+1) + \frac{1}{N}\exp\left\{j2\pi\frac{k}{N}\right\}\delta_f(t+N);$$

$$S_N^*(k, t+r+1) = S_N(k, t+r+1) +$$

$$+\frac{1}{N}\exp\left\{j2\pi\frac{rk}{N}\right\}\delta_f(t+N).$$

При $r = N$

$$S_N^*(k, t+N+1) = \frac{1}{N}\exp\left\{j2\pi\frac{k}{N}\right\}\times$$

$$\times[NS_N^*(k,t+1) - f^*(t+N) + f(t+2N)] =$$

$$= \frac{1}{N}\exp\left\{j2\pi\frac{k}{N}\right\}\left[N\left\{S_N(k,t+N) + \right.\right.$$

$$\left. + \exp(j2\pi k)\frac{1}{N}\delta_f(t+N)\right\} - f(t+N) -$$

$$\left. - \delta_f(t+N) + f(t+2N)\right] = S_N(k, t+N+1).$$

Таким образом, при сбое в канале АЦП параллельно-конвейерный метод вычисления спектра погрешность не накапливает, а при выходе "сбойного" отсчета из анализируемого временно́го окна автоматически ликвидирует его влияние на дальнейшие результаты. Иначе говоря, сбои в канале аналого-цифрового преобразования сигнала

не несут качественно новой опасности для вычисления спектра ПКМ по сравнению с БПФ.

Теперь рассмотрим влияние ошибок округления в арифметическом устройстве. Пусть ошибка возникла при вычислении k^*-й спектральной составляющей в момент t, т.е.

$$S_N^*(k, t) = S_N(k, t) + \delta_S(k^*, t),$$

где $S_N(k, t)$ – истинные значения спектральных составляющих, $\delta_S(k^*, t)$ – величина погрешности, обусловленной операцией округления в арифметическом устройстве при вычислении k^*-й спектральной составляющей в момент t. Тогда

$$S_N^*(k, t+1) = \frac{1}{N}\exp\left\{j2\pi\frac{k}{N}\right\}[NS_N^*(k, t) -$$

$$-f(t) + f(t+N)] = \frac{1}{N}\exp\left\{j2\pi\frac{k}{N}\right\}\times$$

$$\times[NS_N(k, t) - f(t) + f(t+N) + N\delta_S(k^*, t)] =$$

$$= S_N(k, t+1) + \exp\left\{j2\pi\frac{k^*}{N}\right\}\delta_S(k^*, t)\Bigg];$$

$$S_N^*(k, t+r) = S_N(k, t+r) +$$

$$+ \exp\left\{j2\pi\frac{rk^*}{N}\right\}\delta_S(k^*, t)\Bigg]. \qquad (3)$$

Из выражения (3) видно, что возникшая в арифметическом устройстве ошибка вычисления k^*-й спектральной составляющей в ПКМ "запоминается" и "циркулирует" по спектру во всех последующих временны́х окнах.

Устранить влияние таких ошибок можно "очищением" регистра накапливаемого спектра и возобновлением рекуррентной процедуры с этого момента. Насколько часто необходимы подобные прерывания, зависит от вида используемых вычислительных средств, в частности, от разрядности арифметического устройства.

"Очищение" регистра накапливаемого спектра неизбежно ведет к потере некоторой части информации в спектральной области. Однако эти потери весьма незначительны.

Во-первых, они достаточно редки, если принять во внимание технические параметры современных средств вычислительной техники. Например, при реализации вычислений на Pentium II накопившаяся ошибка округления остается в пределах младшего разряда 12-ти разрядного АЦП после более, чем 10^6 сдвигов анализируемого окна.

Во-вторых, сами потери не носят принципиального характера. Они состоят в том, что сразу после очищения вычисляется спектр сигнала на временно́м окне, вплотную премыкающему к предыдущему, но без перекрытия. А далее вычисления вновь продолжаются до очередного "очищения" на перекрывающихся временны́х окнах, сдвигающихся на один отсчет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волошин Г.Я., Плясов В.М.* Параллельно-конвейерный метод вычисления текущих спектров нестационарных сигналов // Информатика в океанологии. Владивосток: ТОИ ДВО РАН, 1996. С. 132–138.
2. *Rabiner L.R., Gold B.* Theory and application of digital signal processing. Prentic-Holl, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.