АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 5, с. 653–660

УДК 534.26

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАССЕЯНИЯ ПОПЕРЕЧНОЙ ВОЛНЫ ПОЛЫМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЦИЛИНДРОМ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

© 1999 г. Н. С. Шевяхов

Институт радиотехники и электроники РАН
432700 Ульяновск, ул. Гончарова, 48
E-mail: ufire@mv.ru

Поступила в редакцию 14.01.98 г.

С использованием квазистатического приближения при расчете полей приграничных сопутствующих электрических колебаний дано решение граничной задачи рассеяния плоской монохроматической поперечной волны полым пьезоэлектрическим цилиндром класса 6(4, ∞) в изотропном твердом теле. Исследованы спектральные зависимости полного сечения рассеяния поперечной волны полым пьезоэлектрическим цилиндром класса 6mm(4mm, ∞m) и 622(422, ∞2). Оценено влияние пьезоэффекта материала цилиндра на рассеяние поперечной волны в диапазоне низких и умеренных частот.

Интерес к рассеянию акустических волн инородными пьезоэлектрическими включениями в упругой среде во многом проистекает из потребности адекватного описания работы приемных пьезопреобразователей. Неудивительно поэтому стремление исследователей наделять пьезоэлектрические включения конструктивными чертами, присущими реальным преобразовательным устройствам. Так гидроакустические преобразователи рассматривают обычно в виде тонких пьезокерамических оболочек [1], избегая многих затруднений общеволнового подхода, связанных с анизотропией и пьезосвойствами материала. Однако при этом результаты соответствующих работ (см., например, [2–4]) лишаются универсальности, необходимой при изучении спектральных эффектов рассеяния волн. Для ряда специальных случаев решения задач рассеяния акустических волн пьезоэлектрическими включениями, свободные от указанных недостатков, были получены в работах [5, 6], но также не использовались для обсуждения спектрального поведения характеристик рассеяния. В настоящей статье, на основе полученного методом Рэлея решения граничной задачи рассеяния плоской монохроматической поперечной волны полым пьезоэлектрическим цилиндром класса 6(4, ∞) в изотропном твердом теле, рассмотрено влияние пьезоэффекта на спектральное поведение такой характеристики, как полное сечение рассеяния.

Введем в рассмотрение прямоугольную (кристаллографическую) $x0yz$ и цилиндрическую $r\theta z$ системы координат с осью z цилиндра, параллельной оси симметрии пьезоэлектрика $L_6(L_4, L_\infty)$. Параметрам и полям в изотропном твердом диэлектрике ($r > R_1$) и в полом пьезоэлектрическом цилиндре ($R_2 < r < R_1$) присвоим соответственно номера $\nu = 1$, $\nu = 2$. Примем, что падающая нормально на цилиндр плоская монохроматическая волна распространяется вдоль оси x и имеет аксиальную поляризацию смещений. В этом случае рассеяние происходит без преобразования в волны других типов, причем аксиальные смещения $u_z^{(\nu)}$, как следует из уравнений теории упругости, пьезоэффекта и электродинамики [7, 8], определятся решением уравнений Гельмгольца:

$$\nabla^2 u_z^{(\nu)} + k_\nu^2 u_z^{(\nu)} = 0, \tag{1}$$

а электрические поля, описываемые в квазистатическом приближении потенциалами φ_ν и φ в материалах и в полости цилиндра соответственно, удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered} e_{15}\nabla^2 u_z^{(2)} - \varepsilon_2 \nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad R_2 < r < R_1, \\ \nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad r > R_1, \\ \nabla^2 \varphi = 0, \quad 0 < r < R_2. \end{gathered} \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) обозначено: $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа, $k_\nu = \omega/v_\nu$, $v_1 = (\lambda_1/\rho_1)^{1/2}$, $v_2 = (\lambda_2^*/\rho_2)^{1/2}$, $\lambda_2^* = \lambda_2 + e_{15}^2/\varepsilon_2$, λ_ν – модули сдвига, ρ_ν – плотности, ε_ν – диэлектрические проницаемости материалов, e_{15} – пьезомодуль продольного пьезоэффекта материала цилиндра, ω – циклическая частота.

С учетом ограниченности $u_z^{(2)}$ при $R_2 < r < R_1$ и погашаемости рассеянного поля на бесконечности решение уравнений (1) представим в виде:

$$u_z^{(1)} = U\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \exp(in\theta)[J_n(k_1 r) + a_n H_n^{(1)}(k_1 r)], \quad r > R_1, \tag{3}$$

$$u_z^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{z_n}^{(2)} \equiv U\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \exp(in\theta)\times$$
$$\times[b_n J_n(k_2 r) + c_n N_n(k_2 r)], \quad R_2 < r < R_1. \tag{4}$$

Потенциалы φ, φ_1 и часть Φ потенциала

$$\varphi_2 = \frac{e_{15}}{\varepsilon_2} u_z^{(2)} + \Phi$$

описывают электрические поля приграничных сопутствующих колебаний, которые возбуждаются с поверхностей полого пьезоэлектрического цилиндра в соответствующих областях пространства пьезозарядами, возникающими под действием аксиально-сдвиговых деформаций поперечной волны. Принимая во внимание ограниченность значений потенциалов, из уравнений (2) получим

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \exp(in\theta)(f_n r^{|n|} + g_n r^{-|n|}),$$
$$R_2 < r < R_1,$$
$$\varphi_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n d_n r^{-|n|} \exp(in\theta), \quad r > R_1, \tag{5}$$
$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n h_n r^{|n|} \exp(in\theta), \quad 0 < r < R_2.$$

Для определения амплитудных коэффициентов a_n, b_n, ... в выражениях (3)–(5), где $J_n(k_\nu r)$, $N_n(k_2 r)$ и $H_n^{(1)}(k_1 r)$ есть соответственно цилиндрические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля 1-го рода, воспользуемся стандартными граничными условиями теории упругости и электростатики [7, 8]

$$T_{rz}^{(1)}\big|_{r=R_1} = T_{rz}^{(2)}\big|_{r=R_1}, \quad u_z^{(1)}\big|_{r=R_1} = u_z^{(2)}\big|_{r=R_1},$$
$$D_r^{(1)}\big|_{r=R_1} = D_r^{(2)}\big|_{r=R_1}, \quad \varphi_1\big|_{r=R_1} = \varphi_2\big|_{r=R_1},$$
$$T_{rz}^{(2)}\big|_{r=R_2} = 0, \quad D_r^{(2)}\big|_{r=R_2} = -\varepsilon_c \frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R_2}, \tag{6}$$
$$\varphi_2\big|_{r=R_2} = \varphi\big|_{r=R_2}.$$

Входящие в (6) компоненты тензоров механических напряжений $T_{rz}^{(\nu)}$ и радиальные составляющие векторов электрической индукции $D_r^{(\nu)}$ в соответствии с уравнениями пьезоэффекта и уравнениями состояния изотропного твердого тела можно представить следующим образом:

$$T_{rz}^{(1)} = \lambda_1 \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r}, \quad D_r^{(1)} = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r},$$
$$T_{rz}^{(2)} = \lambda_2 \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial r} + e_{15}\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - e_{14}\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}, \tag{7}$$
$$D_r^{(2)} = e_{15}\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial r} + e_{14}\frac{1}{r}\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial \theta} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}.$$

В выражениях (6), (7) ε_c – диэлектрическая проницаемость сильно разреженного газа в полости пьезоэлектрического цилиндра ($0 < r < R_2$), а e_{14} – пьезомодуль поперечного пьезоэффекта материала цилиндра [9], сказывающегося при рассеянии только через посредство граничных условий.

Учитывая громоздкость получаемых выражений, ограничимся далее представлением только амплитудных коэффициентов a_n парциальных волн рассеянного поля. Предварительно, по аналогии с рассеянием акустических волн многослойным упругим цилиндром в жидкости (см. [10, гл. 5]), введем парциальный импеданс полого пьезоэлектрического цилиндра для поперечных волн аксиальной поляризации

$$Z_n = iT_{rz_n}^{(2)}\big|_{r=R_1}\left(\omega u_{z_n}^{(2)}\big|_{r=R_1}\right)^{-1}.$$

Здесь $T_{rz_n}^{(2)}$ получается по формуле (7) для $T_{rz}^{(2)}$ с заменой $u_z^{(2)}$ на $u_{z_n}^{(2)}$ согласно (4) и использованием вместо полного потенциала φ_2 его парциальных значений

$$\varphi_{2_n} = \frac{e_{15}}{\varepsilon_2} u_{z_n}^{(2)} + \Phi_n,$$

где Φ_n определены в (5). Используя соотношения между амплитудными коэффициентами в образующейся при подстановке (3)–(5) в граничные условия (6) системе уравнений, получим

$$a_n = -\frac{iZ_n J_n(\xi_1) + \rho_1 v_1 J_n'(\xi_1)}{iZ_n H_n^{(1)}(\xi_1) + \rho_1 v_1 H_n^{(1)'}(\xi_1)}, \tag{8}$$

где

$$Z_n = -i\rho_2 v_2\left[\frac{p}{\lambda_2^* \xi_2} + \frac{2s}{\pi\xi_2|n|}\times\right.$$
$$\times\frac{\alpha_+\beta_+ + \alpha_-\beta_-}{\Delta_3\eta U_n(\xi_2,\eta) + \Delta_4 T_n(\xi_2,\eta)} +$$
$$+\frac{\Delta_3\eta W_n(\xi_2,\eta) + \Delta_4 V_n(\xi_2,\eta)}{\Delta_3\eta U_n(\xi_2,\eta) + \Delta_4 T_n(\xi_2,\eta)} + \tag{9}$$
$$+\frac{s}{\lambda_2^*\xi_2|n|}\frac{\Delta_1\eta U_n(\xi_2,\eta) + \Delta_2 T_n(\xi_2,\eta)}{\Delta_3\eta U_n(\xi_2,\eta) + \Delta_4 T_n(\xi_2,\eta)} +$$
$$\left.+\frac{2}{\pi\lambda_2^*\xi_2}\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q_+ - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)q_-}{\Delta_3\eta U_n(\xi_2,\eta) + \Delta_4 T_n(\xi_2,\eta)}\right].$$

От привычного представления коэффициентов a_n задачи рассеяния звуковых волн в жидкости многослойным упругим цилиндром [10] формула (8) отличается перестановкой $J_n(\xi_1) \rightleftharpoons J'_n(\xi_1)$, $H_n^{(1)}(\xi_1) \rightleftharpoons H_n^{(1)'}(\xi_1)$, где штрихами обозначены производные. Это связано с тем, что в рассматриваемом случае Z_n выражает связь не коллинеарных, как в [10], а ортогональных друг к другу механических усилий (напряжений) и скоростей смещения частиц.

В формуле (9) обозначено

$$s = -ine_{14} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}|n|e_{15},$$

$$q_\pm = \pm|n|e_{15} - ine_{14}, \quad p = in\frac{e_{15}}{\varepsilon_2}e_{14},$$

$$\Delta_1 = q_+\beta_+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{|n|} + q_-\beta_-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-|n|},$$

$$\Delta_2 = q_+\alpha_-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{|n|} + q_-\alpha_+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-|n|},$$

$$\Delta_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\beta_+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{|n|} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\beta_-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-|n|}, \tag{10}$$

$$\Delta_4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\alpha_-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{|n|} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\alpha_+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-|n|},$$

$$\alpha_\pm = |n|^2\varepsilon_2\frac{\mathcal{K}_\perp^2\varepsilon_2 \pm \varepsilon_c\mathcal{K}^2}{ine_{14}\varepsilon_2 + \varepsilon_c e_{15}|n|},$$

$$\beta_\pm = \frac{|n|(\varepsilon_2 \pm \varepsilon_c)}{ine_{14}\varepsilon_2 + \varepsilon_c e_{15}|n|}.$$

Величины $\mathcal{K}^2 = e_{15}^2(\lambda_2^*\varepsilon_2)^{-1}$ и $\mathcal{K}_\perp^2 = e_{14}^2(\lambda_2^*\varepsilon_2)^{-1}$ имеют смысл квадратов коэффициентов электромеханической связи материала цилиндра для продольного и поперечного пьезоэффекта. Завершая разъяснение обозначений, введенных в (9), заметим, что $U_n(\xi_2, \eta)$, $W_n(\xi_2, \eta)$, $V_n(\xi_2, \eta)$ и $T_n(\xi_2, \eta)$ представляют собой следующие комбинации цилиндрических функций и их производных

$$W_n(\xi_2, \eta) = J'_n(\xi_2)N'_n(\eta) - N'_n(\xi_2)J'_n(\eta),$$

$$U_n(\xi_2, \eta) = N_n(\xi_2)J'_n(\eta) - J_n(\xi_2)N'_n(\eta), \tag{11}$$

$$V_n(\xi_2, \eta) = N'_n(\xi_2)J_n(\eta) - J'_n(\xi_2)N_n(\eta),$$

$$T_n(\xi_2, \eta) = J_n(\xi_2)N_n(\eta) - N_n(\xi_2)J_n(\eta).$$

Здесь $\xi_2 = k_2R_1$, $\eta = k_2R_2$, тогда как в (8) $\xi_1 = k_1R_1$.

При заданной частоте, известных геометрических размерах и параметрах материалов выражения (8)–(11) позволяют рассчитать коэффициенты a_n волн рассеянного поля. Заметим, что как следствие применения квазистатического приближения поля сопутствующих приграничных электрических колебаний потенциалов φ, φ_1 и Φ не дают вклада в результирующий поток рассеянной энергии. Поэтому для оценки полного сечения рассеяния σ поперечной волны полым пьезоэлектрическим цилиндром допустимо использовать стандартную формулу [10]

$$\sigma = \frac{4}{k_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^2. \tag{12}$$

Обращаясь к выражениям (8)–(12), можно заключить, что пьезоэффект цилиндра сказывается на величине σ двояким образом. Во-первых, благодаря изменению коэффициентов a_n под влиянием парциальных импедансов, пьезоэлектрические вклады которых характеризуют реакцию полей приграничных электрических колебаний на рассеяние парциальных волн заданного номера n. Во-вторых, благодаря уменьшению величин ξ_2, η из-за перенормировки скорости поперечных волн в материале цилиндра под влиянием продольного пьезоэффекта. В представленных ниже расчетах спектральных зависимостей $\sigma(\xi_1)$ учтены обе возможности. Заметим, однако, что только первая из них может привести к качественным изменениям спектрального поведения величины σ вследствие пьезоэффекта.

Предваряя обсуждение численных расчетов, рассмотрим частные следствия и результаты, вытекающие из представленного общего решения. Если в формулах (9)–(11) перейти к пределу $R_2 \longrightarrow 0$ ($\eta \longrightarrow 0$), то из-за неограниченного роста величин Δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), второе и последнее слагаемые в квадратных скобках правой стороны формулы (9) становятся исчезающе малыми. В остальных членах, как следствие предельного перехода $\eta \longrightarrow 0$ ($R_2 \longrightarrow 0$), можно принять

$$\Delta_1 = q_+\beta_+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{|n|}, \quad \Delta_2 = q_+\alpha_-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{|n|},$$

$$\Delta_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\beta_+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{|n|},$$

$$\Delta_4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\alpha_-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{|n|}, \quad W_n(\xi_2, \eta) = J'_n(\xi_2)N'_n(\eta),$$

$$U_n(\xi_2, \eta) = -J_n(\xi_2)N'_n(\eta),$$

$$V_n(\xi_2, \eta) = -J'_n(\xi_2)N_n(\eta),$$

$$T_n(\xi_2, \eta) = J_n(\xi_2)N_n(\eta).$$

Замечая вытекающие отсюда соотношения

$$\Delta_1/\Delta_3|_{\eta\to 0} = q_+/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad \Delta_4/\Delta_3|_{\eta\to 0} = \alpha_-/\beta_+,$$

на основании (9), (10) получим

$$Z_n = -i\rho_2 v_2\left[\frac{|n|}{\xi_2}\frac{\mathcal{K}^2_{eff}}{1+\varepsilon_2/\varepsilon_1} - \frac{J'_n(\xi_2)}{J_n(\xi_2)}\right], \quad (13)$$

где $\mathcal{K}^2_{eff} = \mathcal{K}^2 - \mathcal{K}^2_\perp \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Поскольку $\rho_2 v_2/\rho_1 v_1 = \xi_2\lambda_2^*/\xi_1\lambda_1$, то подстановка (13) в (8) приводит к формуле

$$a_n = -\frac{J_n(\xi_1)}{H_n^{(1)}(\xi_1)}\frac{\xi_2[\ln J_n(\xi_2)]' - \frac{\lambda_1}{\lambda_2^*}\xi_1[\ln J_n(\xi_1)]' - |n|\mathcal{K}^2_{eff}(1+\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{-1}}{\xi_2[\ln J_n(\xi_2)]' - \frac{\lambda_1}{\lambda_2^*}\xi_1[\ln H_n^{(1)}(\xi_1)]' - |n|\mathcal{K}^2_{eff}(1+\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{-1}}, \quad (14)$$

которая в отсутствие поперечного пьезоэффекта представляет результат, рассматривавшийся в работах [5, 6]. Таким образом, формулы (13), (14) обобщают решение задачи рассеяния поперечной волны сплошным пьезоэлектрическим цилиндром в изотропном твердом теле на случай пьезоэлектриков класса 6(4, ∞), а при требовании $\mathcal{K}^2 = 0$, $\mathcal{K}^2_\perp \neq 0$ – на случай пьезоэлектриков класса 622(422, ∞2).

Обратим внимание на вытекающий из (14) частный случай акустически согласованных материалов цилиндра и внешней среды $\lambda_1 = \lambda_2^*$, $\rho_1 = \rho_2$, $\xi_1 = \xi_2 \equiv \xi$. С учетом известного [11] выражения

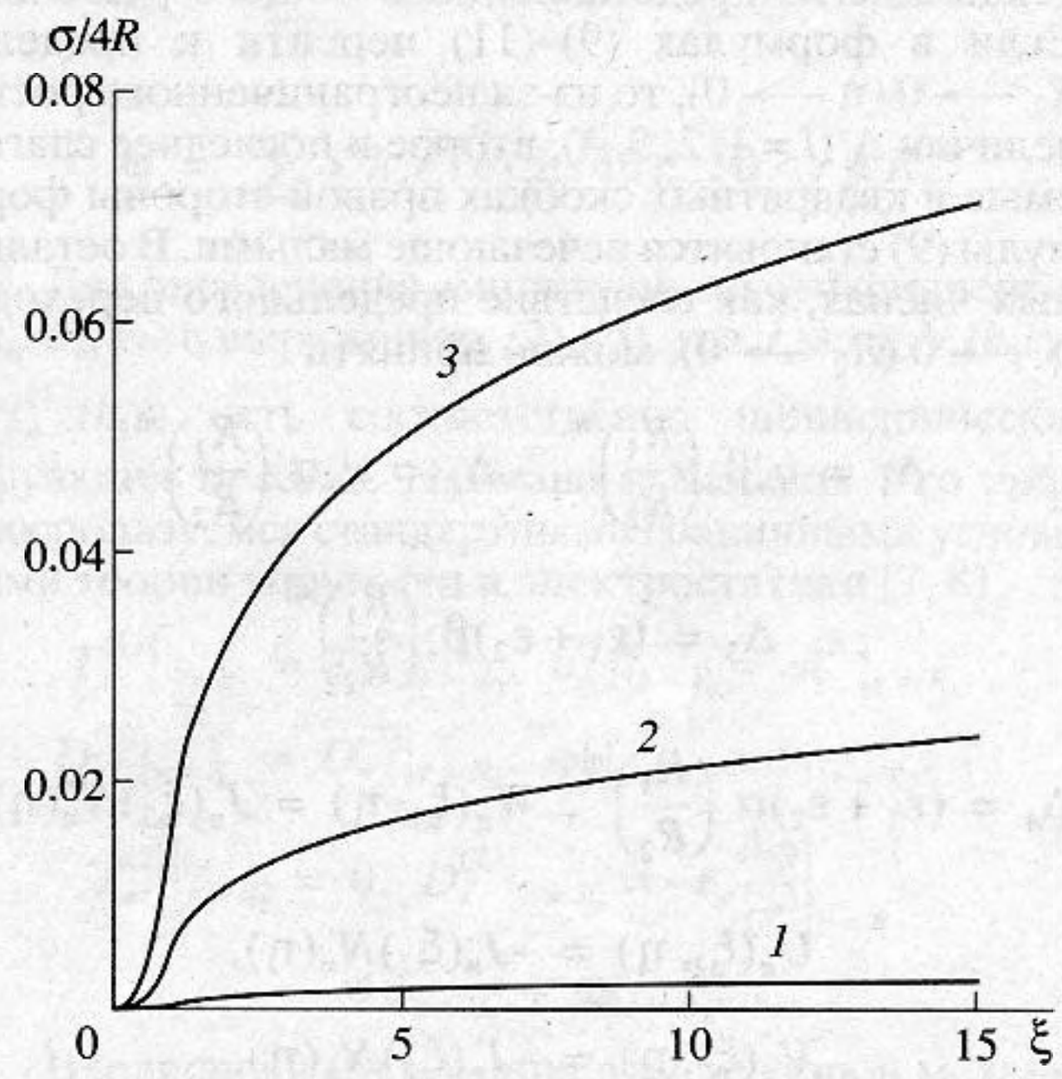

Рис. 1. Спектральные зависимости полного сечения рассеяния поперечной волны пьезоэлектрическим цилиндром класса 6mm(4mm, ∞m) акустически и электрически согласованным с окружающей изотропной средой: *1* – $\mathcal{K}^2 = 0.1$, *2* – $\mathcal{K}^2 = 0.3$, *3* – $\mathcal{K}^2 = 0.5$.

вронскиана $J_n(x)H_n^{(1)'}(x) - H_n^{(1)}(x)J'_n(x) = 2i/\pi x$, имеем при этом

$$a_n = -\frac{|n|(1+\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{-1}\mathcal{K}^2_{eff}J_n^2(\xi)}{\frac{2i}{\pi} + |n|(1+\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{-1}\mathcal{K}^2_{eff}J_n(\xi)H_n^{(1)}(\xi)}. \quad (15)$$

Формула (15) примечательна как раз тем, что иллюстрирует в чистом виде отмечавшуюся выше возможность качественных изменений в рассеянии акустических волн, вносимых пьезоэффектом: в данном случае рассеяние поперечной волны обусловлено исключительно пьезоэффектом.

Именно поэтому, основываясь на формулах (12), (15), можно установить, что в пределе высоких частот $\xi \longrightarrow \infty$ величина $\sigma/4R$ достигает не обычного геометрооптического значения $(\sigma/4R)_\infty = 1$, а задается уровнем проявления пьезоэффекта при рассеянии: $(\sigma/4R)_\infty \simeq 0.2\pi^2\mathcal{K}^4_{eff}(1+\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{-2}$. Величина σ на низких и умеренных частотах оказывается достаточно малой и медленно нарастающей с ростом ξ величиной, что наглядно демонстрируют кривые рис. 1, полученные расчетом по формулам (12), (15) для пьезокерамического цилиндра аксиальной поляризации (класс симметрии ∞*m*, $\mathcal{K}^2_\perp = 0$), идентичного в отношении свойств электрической поляризуемости внешней среде: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Видно, например, что для волновых размеров $\xi \leq 20$ полное приведенное сечение рассеяния $\sigma/4R_1 < 10^{-1}$.

В пределе $R_2 \longrightarrow R_1(\eta \longrightarrow \xi_2)$ из формул (9)–(11) имеем $Z_n = 0$. Выражение (8) представляет в этом случае хорошо известный результат решения задачи рассеяния поперечной волны круговой цилиндрической полостью в изотропном твердом теле [12]. Если же в (9)–(11) принять $e_{14} = e_{15} = 0$, то $Z_n = -i\rho_2 v_2 W_n(\xi_2, \eta)/U_n(\xi_2, \eta)$, что вместе с (8) дает, как и следовало ожидать, решение задачи рассеяния поперечной волны цилиндрической круговой полостью в изотропном твердом теле с инородным цилиндрическим слоем (см. [13]). Отсюда, ввиду следующего из (11) предельного перехода $W_n(\xi_2, \eta)|_{\eta \to \xi_2} \longrightarrow 0$, можно опять прийти к результатам работы [12].

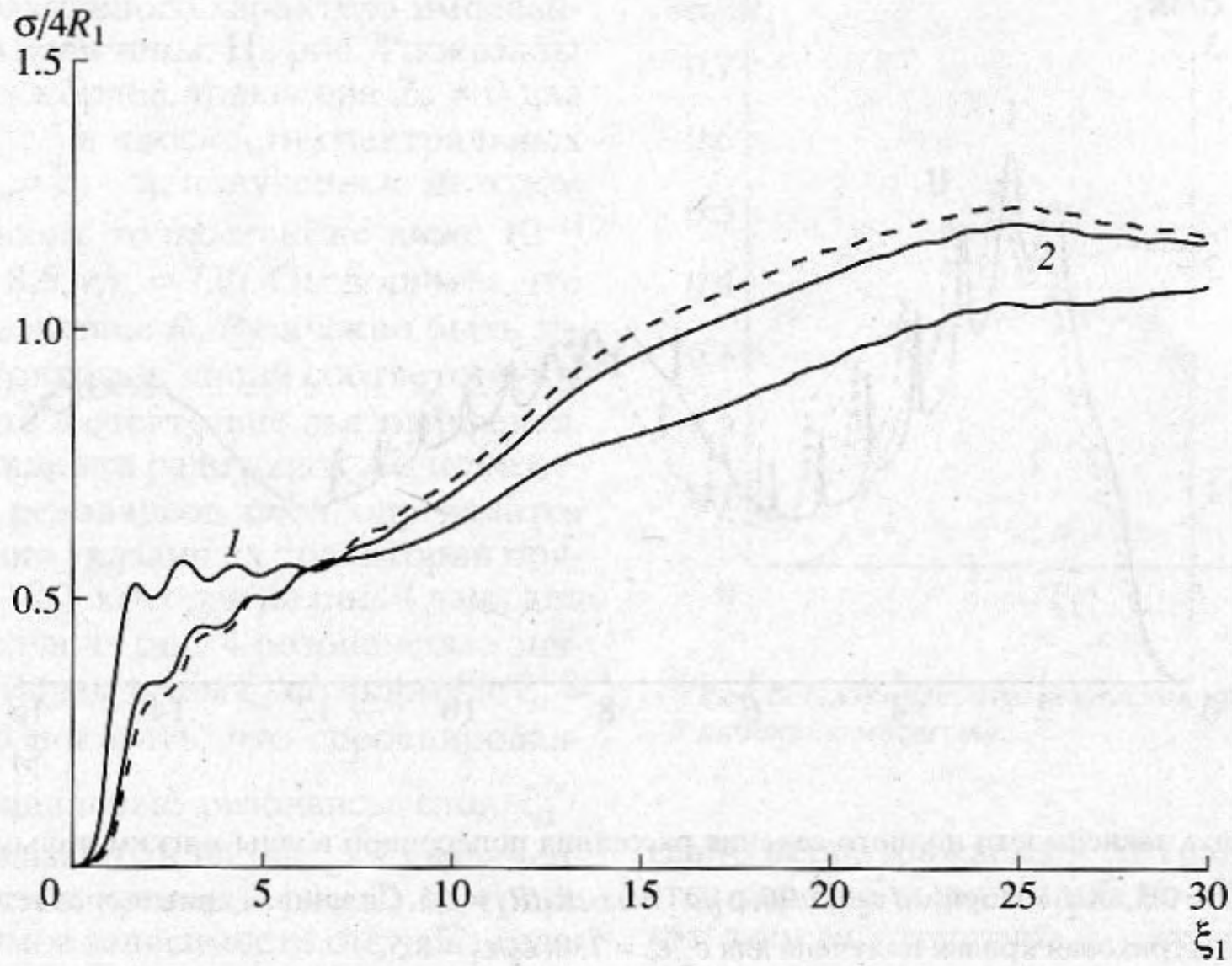

Рис. 2. Спектральные зависимости полного сечения рассеяния поперечной волны жестким полым пьезоэлектрическим цилиндром при $v_1/v_2 = 0.9$, $\rho_1/\rho_2 = 0.6$, $R_1/R_2 = 1.5$, $\mathcal{K}^2 = 0.5$, $\mathcal{K}_\perp^2 = 0$: *1* – $\varepsilon_2/\varepsilon_c = 730$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 0$; *2* – $\varepsilon_2/\varepsilon_c = 730$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 8.5$. Штриховая кривая рассчитана без учета пьезоэффекта.

Поскольку наиболее представителен класс пьезоэлектриков 6mm(4mm, ∞m), целесообразно рассмотреть рассеяние поперечной волны полым пьезоэлектрическим цилиндром именно этого класса симметрии. Полагая в (9), (10) $e_{14} = 0$, $\mathcal{K}_\perp^2 = 0$, получим

$$Z_n = -i\rho_2 v_2 \left\{ \frac{\eta W_n(\xi_2,\eta) - |n|(a+\varepsilon_2/\varepsilon_c)^{-1}\mathcal{K}^2 V_n(\xi_2,\eta)}{\eta U_n(\xi_2,\eta) - |n|(a+\varepsilon_2/\varepsilon_c)^{-1}\mathcal{K}^2 T_n(\xi_2,\eta)} + \right.$$
$$+ \frac{8|n|}{\pi\xi_2}\mathcal{K}^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{|n|} \frac{[(1-\varepsilon_2/\varepsilon_1)(\varepsilon_2/\varepsilon_c - 1) + (1+\varepsilon_2/\varepsilon_1)(\varepsilon_2/\varepsilon_c + 1)(R_1/R_2)^{2|n|}]^{-1}}{\eta U_n(\xi_2,\eta) - |n|(a+\varepsilon_2/\varepsilon_c)^{-1}\mathcal{K}^2 T_n(\xi_2,\eta)} + \tag{16}$$
$$\left. + \frac{1}{\xi_2}\frac{|n|\mathcal{K}^2}{b+\varepsilon_2/\varepsilon_1}\frac{\eta U_n(\xi_2,\eta) - |n|(c+\varepsilon_2/\varepsilon_c)^{-1}\mathcal{K}^2 T_n(\xi_2,\eta)}{\eta U_n(\xi_2,\eta) - |n|(a+\varepsilon_2/\varepsilon_c)^{-1}\mathcal{K}^2 T_n(\xi_2,\eta)} \right\}.$$

Здесь обозначено

$$a = \frac{(1+\varepsilon_2/\varepsilon_1)(R_1/R_2)^{2|n|} - (1-\varepsilon_2/\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2/\varepsilon_1)(R_1/R_2)^{2|n|} + (1-\varepsilon_2/\varepsilon_1)},$$

$$c = \frac{(R_1/R_2)^{2|n|} + 1}{(R_1/R_2)^{2|n|} - 1},$$

а b получается из a заменой $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ на $\varepsilon_2/\varepsilon_c$.

На рис. 2, 3 приведены спектральные зависимости приведенного полного сечения рассеяния $\sigma/4R_1$ от переменной ξ_1 (напомним, что $\xi_2 = \xi_1 v_1/v_2$, $\eta = \xi_2 R_2/R_1$), полученные расчетом по формулам (8), (12) с учетом выражений (11), (16). Для вычисления цилиндрических функций применялся хорошо зарекомендовавший себя в подобного рода расчетах [14] (см. также [15]) алгоритм Миллера. Это позволило с избыточной надежностью подстраховаться от возможного накопления ошибки вычислений при суммировании ряда (12) с ростом аргумента ξ_1 в исследовавшемся диапазоне значений $0 < \xi_1 < 5 \times 10^2$. Затраты машинного времени искупались при этом точностью определения σ не ниже 10^{-12}.

Кривые на рис. 2 соответствуют случаю полого цилиндра, более жесткого, чем внешняя среда:

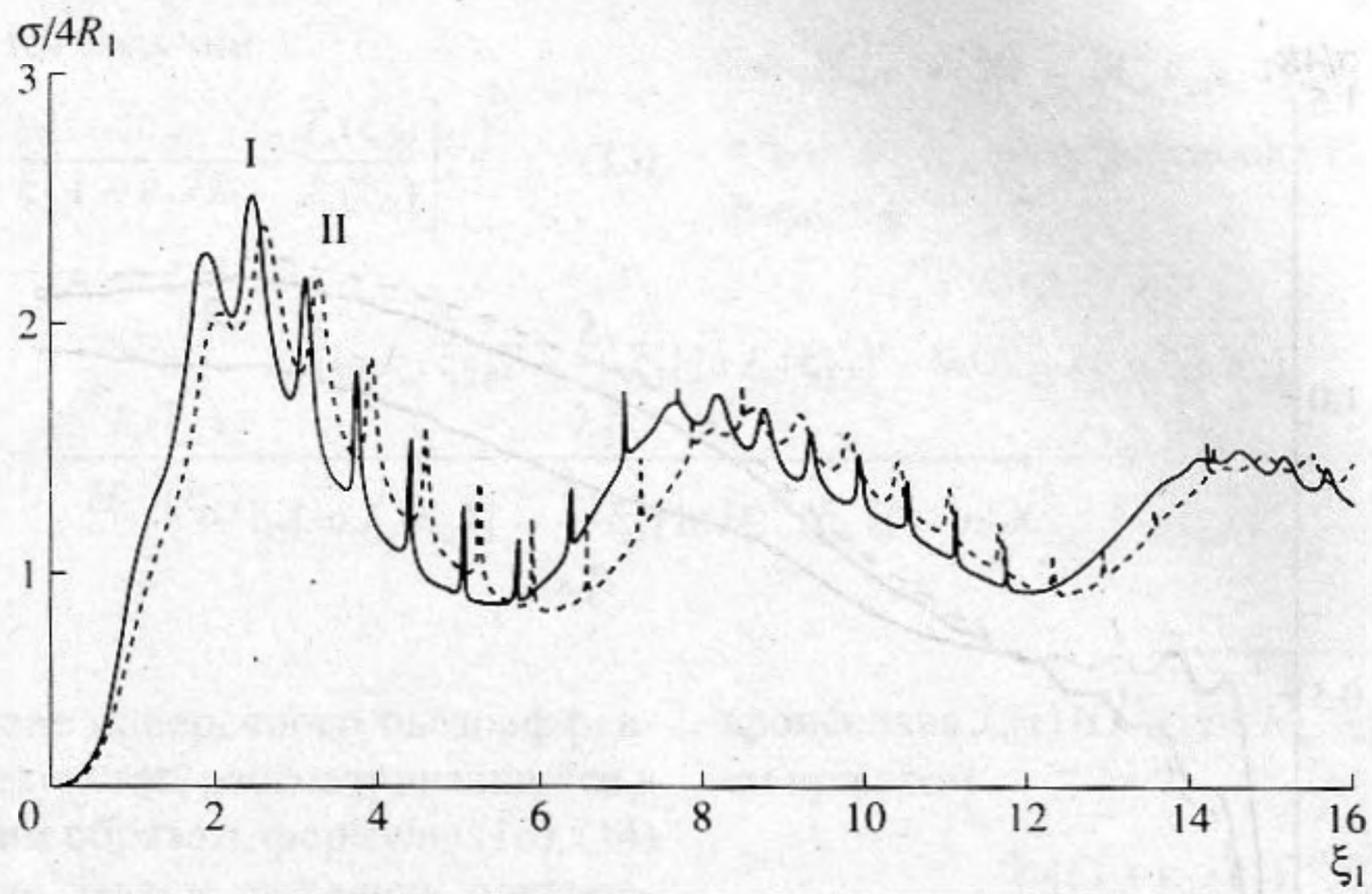

Рис. 3. Спектральные зависимости полного сечения рассеяния поперечной волны мягким полым пьезоэлектрическим цилиндром с $\mathcal{K}^2 = 0.5$, $\mathcal{K}_\perp^2 = 0$ при $v_1/v_2 = 1.96$, $\rho_1/\rho_2 = 0.6$, $R_1/R_2 = 1.5$. Сплошная кривая соответствует параметрам $\varepsilon_2/\varepsilon_c = 0$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 8.5$; штриховая кривая получена для $\varepsilon_2/\varepsilon_c = 730$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 8.5$.

$v_1/v_2 = 0.9$, $\rho_1/\rho_2 = 0.6$ при $R_1/R_2 = 1.5$. Штриховая кривая получена без учета пьезоэффекта, тогда как сплошные кривые *1* ($\varepsilon_2/\varepsilon_c = 730$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 0$ – цилиндр с внешней металлизированной поверхностью) и *2* ($\varepsilon_2/\varepsilon_c = 730$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 8.5$; неметаллизированный цилиндр) рассчитывались для $\mathcal{K}^2 = 0.5$, что соответствует пьезокерамике PZT-4 с аксиальной поляризацией [1]. Хорошо видно, что в спектральном интервале $\xi_1 \le 30$ пьезоэффект усиливает отклонения величины σ от почти монотонного нарастания с ростом ξ_1, свойственного рассеянию поперечной волны полостью без цилиндра, причем степень этого влияния пьезоэффекта определяется величиной $\mathcal{K}^2(1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1)^{-1}$.

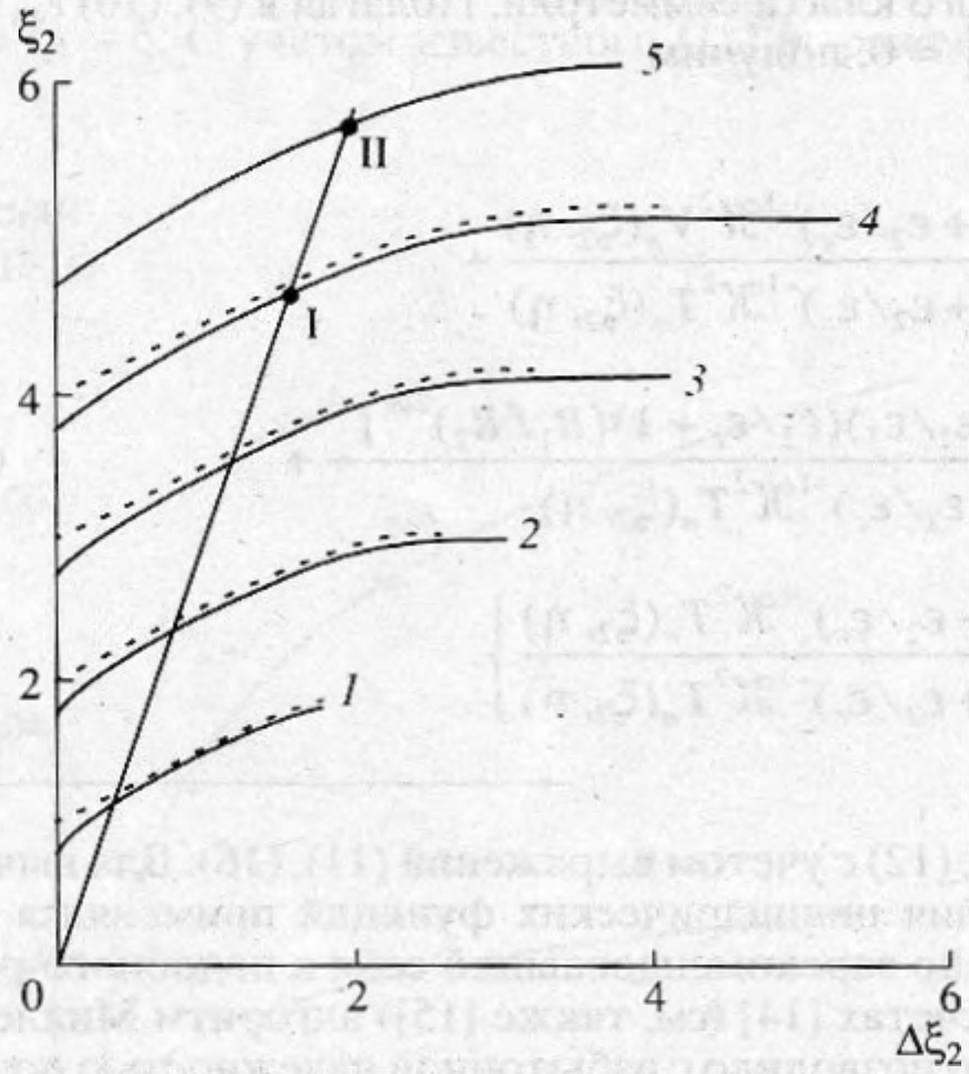

Рис. 4. Траектории точек низкочастотных парциальных резонансов цилиндрического пьезоэлектрического слоя с параметрами $\mathcal{K}^2 = 0.5$, $\mathcal{K}_\perp^2 = 0$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 8.5$, $\varepsilon_2/\varepsilon_c = 730$ в плоскости спектральных переменных ξ_2, $\Delta\xi_2$ для номеров $n = 1, 2, \ldots, 5$, обозначающих кривые. Штриховые линии для $n = 1, 2, \ldots, 4$ соответствуют случаю $\mathcal{K} = 0$, $\mathcal{K}_\perp^2 = 0$.

В данном случае полый пьезоэлектрический цилиндр представляет собой антиволноводный цилиндрический слой. Поэтому локальные максимумы зависимости $\sigma(\xi_1)$, проявляющиеся как результат переотражения волн на его границах, заметны только при низших формах колебания слоя и лежат в низкочастотной области $\xi_1 \le 6.5$. Здесь прослеживается явная аналогия с результатами работы [16], показавшей, что при возбуждении поперечных нормальных волн в цилиндре со слоем линейным гармоническим источником имеет место подавление амплитуд всех нормальных волн с ростом частоты, если слой обладает большей жесткостью. Наш случай отличается только тем, что источник возбуждения волн в слое находится не во внутренней, как в [16], а во внешней области (удален в бесконечность) и слой нанесен не на выпуклую, а на вогнутую цилиндрическую поверхность.

Следуя предложенному в [13] методу анализа тонкой структуры спектра полного сечения рассеяния, сопоставим положение локальных максимумов/минимумов кривых рис. 2 с парциальными резонансами пьезоэлектрического слоя, опреде-

ляемыми в силу реактивного характера импеданса (16) нулями этой величины. На рис. 4 показаны траектории первых корней уравнения $Z_n = 0$ для номеров $n = 1, 2, \ldots, 5$ в плоскости спектральных переменных ξ_2, $\Delta\xi_2 = \xi_2 - \eta$, полученные методом половинного деления с точностью не ниже 10^{-12} для $\mathcal{K}^2 = 0.5$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 8.5$, $\varepsilon/\varepsilon_c = 730$. Оговоримся, что при этом в (16) отношение R_1/R_2 должно быть заменено на ξ_2/η. Штриховые линии соответствуют результатам расчета в отсутствие пьезоэффекта. При заданном отношении радиусов R_1/R_2 положения парциальных резонансов слоя определятся точками пересечения указанных траекторий прямой $\xi_2 = \Delta\xi_2 R_1/(R_1 - R_2)$, которая на рис. 4 дана для $R_1/R_2 = 1.5$. Определяя из рис. 4 резонансные значения ξ_2 и пересчитывая затем ξ_1 по формуле $\xi_1 = \xi_2 v_2/v_1$, нетрудно показать, что спроецированные на ось ξ_1 парциальные резонансы слоя $\xi_1^{(n)}$ приходятся (см. показанный на рис. 5 в увеличенном масштабе участок кривой *2* рис. 2) на точки локальных минимумов зависимости $\sigma(\xi_1)$. Из сравнения сплошных и штриховых кривых рис. 4 также видно, что пьезоэффект способствует некоторому понижению частот парциальных резонансов. Соответственно максимумы кривой *2* рис. 2 сдвинуты относительно максимумов штриховой кривой в область более низких частот. Еще заметнее это для кривой *1* в связи с тем, что здесь влияние пьезоэффекта, выражаемое отношением $\mathcal{K}^2(1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1)^{-1}$, возрастает из-за металлизации внешней границы слоя (переход к этому случаю достигается в пределе $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \longrightarrow 0$) почти на порядок.

Обратимся к рис. 3, на котором зависимости $\sigma(\xi_1)$ представлены для полого с $R_1/R_2 = 1.5$ цилиндра из пьезокерамики PZT-4 в рутиле. По имеющимся литературным данным [1, 17] указанная пара материалов характеризуется таким же набором параметров, что и в случае для рис. 2, но теперь $v_1/v_2 = 1.96$ и пьезоэлектрический слой является более мягким материалом. Штриховая кривая соответствует на рис. 3 неметаллизированному слою и практически совпадает с ходом зависимости $\sigma(\xi_1)$ при отсутствии пьезоэффекта. Причину этого совпадения можно связать с тем, что в данном случае степень проявления пьезоэффекта характеризуется преимущественно величиной $\mathcal{K}^2(1 + \varepsilon_2/\varepsilon_c)^{-1}$, весьма малой из-за условия $\varepsilon_2/\varepsilon_c \gg 1$ (подразумевается, что в полости при $r < R_2$ имеем вакуум). Влияние пьезоэффекта будет, однако, заметным (см. сплошную кривую на рис. 3), если пьезоэлектрический цилиндр металлизировать по внутренней цилиндрической поверхности, что достигается в (15), (16) формальным переходом к пределу $\varepsilon_2/\varepsilon_c \longrightarrow 0$.

В отличие от кривых рис. 2 видно, что благодаря интерференции волн, в данном случае эффек-

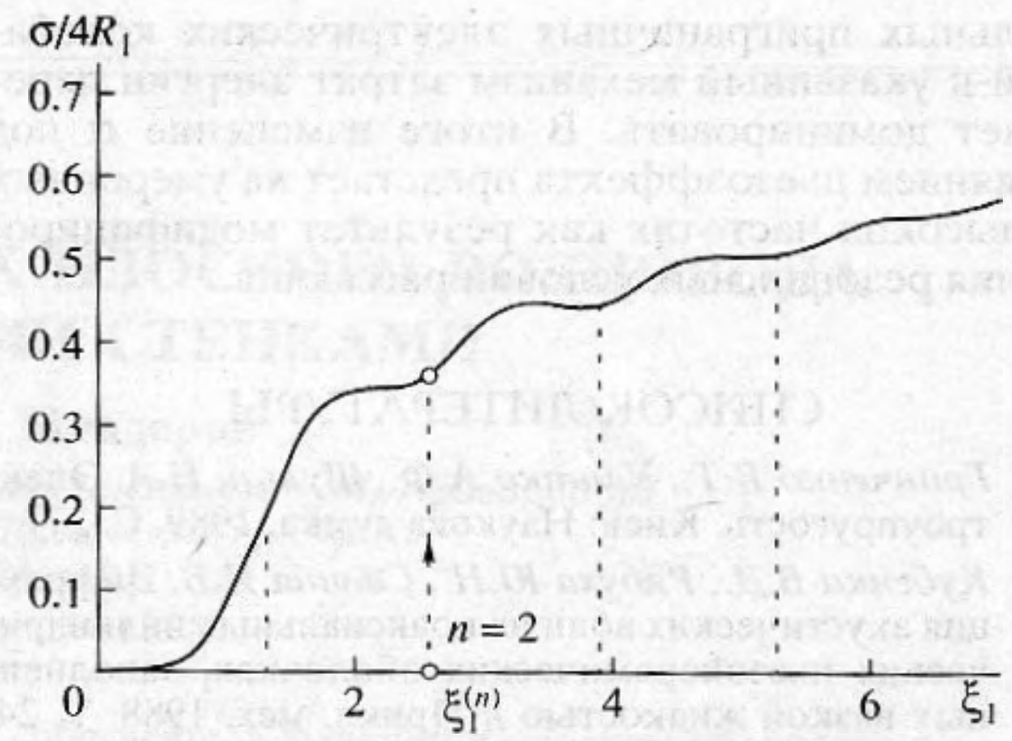

Рис. 5. Низкочастотный участок кривой *2* рис. 2 в увеличенном масштабе.

тивно переотражаемых от границ слоя, проявляется хорошо выраженная во всем интервале частот тонкая структура спектра полного сечения рассеяния, имеющая вид регулярных острых пиков (например пики I, II) на фоне постепенно спадающих с ростом ξ_1 крупномасштабных осцилляций величины σ относительно геометрооптического предела. Закономерности формирования тонкой структуры при этом полностью аналогичны описанным в работе [13]. В частности, повторяя основанную на использовании рис. 4 графическую процедуру определения резонансных значений ξ_1, можно показать, что пики I, II, … тонкой структуры точно (в пределах графической погрешности) соответствуют парциальным резонансам слоя номеров $n = 4, 5, \ldots$, отмеченных на рис. 4 для случая штриховой кривой рис. 3 точками I, II … Как и на рис. 2, под влиянием пьезоэффекта прослеживается тенденция смещения пиков тонкой структуры, а также всей кривой $\sigma(\xi_1)$ в целом, в сторону низких частот. При этом пьезоэффект делает пики тонкой структуры более узкими.

Вышеописанные особенности спектрального поведения полного сечения рассеяния не претерпевают качественных изменений, если вместо пьезоэлектрического цилиндра класса 6mm(4mm, ∞m) рассматривать пьезоэлектрический цилиндр класса 622(422, ∞2). В заключение добавим, что на низких частотах $\xi_1 \leq 1$ пьезоэффект приводит во всех рассмотренных случаях к увеличению полного сечения рассеяния. Данный результат согласуется с выводом работы [18] о повышении рассеивающей способности полости в пьезоэлектрике в случае низких частот за счет затрат энергии на возбуждение приграничных сопутствующих электрических колебаний. С ростом частоты происходит "закорачивание" электростатических полей рассеяния, проявляющихся в виде мульти-

польных приграничных электрических колебаний и указанный механизм затрат энергии перестает доминировать. В итоге изменение σ под влиянием пьезоэффекта предстает на умеренных и высоких частотах как результат модифицирования резонансных условий рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. С. 277.
2. *Кубенко В.Д., Рябуха Ю.Н., Савина И.В.* Дифракция акустических волн на коаксиальных цилиндрических пьезокерамических оболочках, заполненных вязкой жидкостью // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 10. С. 28–34.
3. *Савин В.Г.* Преобразование акустических импульсов в электрические цилиндрической пьезокерамической оболочкой // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 1. С. 144–149.
4. *Mitra R., Saksena T.K.* Study on the vibrational characteristics of ultrasonic transducers using tapered piezoelectric ceramic elements // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. V. 101. № 1. P. 323–329.
5. *Moon F.C.* Scattering waves by a cylindrical piezoelectric inclusion // J. Acoust. Soc. Amer. 1970. V. 48. № 1. Pt. 1. P. 253–262.
6. *Лямшев Л.М., Шевяхов Н.С.* Рассеяние плоской аксиально-сдвиговой волны круговым пьезополупроводниковым цилиндром // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 1. С. 96–105.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. С. 248.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. С. 620.
9. *Лямов В.Е.* Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. М.: Изд. МГУ, 1983. С. 224.
10. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. С. 302.
11. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. С. 288.
12. *Голубев А.С.* Отражение плоских волн от цилиндрического дефекта // Акуст. журн. 1962. Т. 7. № 2. С. 174–180.
13. *Шевяхов Н.С.* Парциальные резонансы в тонкой структуре спектра полного сечения рассеяния // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 3. С. 419–422.
14. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. С. 660.
15. *Воронцов А.А., Мировицкая С.Д.* Специальные функции задач теории рассеяния. М.: Радио и связь, 1991. С. 200.
16. *Пятаков П.А.* Возбуждение волн Лява, распространяющихся по цилиндрической поверхности // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 2. С. 237–241.
17. Акустические кристаллы / Под ред. Шаскольской М.П. М.: Наука, 1982. С. 632.
18. *Шевяхов Н.С.* О рассеянии сдвиговой волны низкоомным цилиндром и цилиндрической полостью в пьезоэлектрике класса $C_{6V}(C_{4V})$ // Акуст. журн. 1978. Т. 24. № 2. С. 271–277.

Spectral Features of Transverse Wave Scattering from a Hollow Piezoelectric Cylinder in an Isotropic Medium

N. S. Shevyakhov

The boundary problem on the scattering of a plane monochromatic transverse wave by a piezoelectric cylinder of class 6(4,∞) in an isotropic solid is solved by using the quasistatic approach for calculating the fields of accompanying near-boundary electric oscillations. Spectral dependences of the total scattering cross-section are studied for transverse waves scattered by hollow piezoelectric cylinders of classes 6mm(4mm,∞m) and 622(422,∞2). The influence of the piezoelectric effect of the cylinder material on the scattering of transverse waves is estimated in the low and medium frequency range.