

УДК 519.2+534.(2+6)

РЕКОНСТРУКЦИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ПРОТЯЖЕННОГО ИСТОЧНИКА ШУМА ПО ЕГО БЛИЖНЕМУ ПОЛЮ

© 1999 г. Н. К. Вдовичева, В. И. Турчин, И. Ш. Фикс

Институт прикладной физики РАН
603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: sazontov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 02.09.98 г.

Рассмотрены методы и возможности реконструкции углового распределения мощности шума протяженного источника в дальней зоне по результатам измерения его ближнего поля антенной решеткой. Исследования выполнены для неподвижного и движущегося в неоднородной среде источника при априорно известной корреляционной матрице внешней помехи. Для реконструкции углового распределения использованы методы статистического оценивания параметров на основе функции правдоподобия. Приведены результаты анализа и численных расчетов ковариаций оценок.

1. Введение. Постановка задачи. Дистанционная акустическая диагностика различных протяженных широкополосных движущихся излучателей звука (корабли, автомобили, поезда и т.д.) обычно включает в себя две задачи. С одной стороны, требуется определить, какие именно части устройств “шумят” (т.е. локализовать зоны шумоизлучения непосредственно на источнике), а с другой стороны, количественно описать акустическое поле излучателя, т.е. определить его диаграмму направленности (ДН). Методы акустической диагностики протяженных источников, основанные на измерении их ближних полей¹, исследовались в [1–13]. В принципе обе указанные задачи могут быть решены двумя различными способами, формально соответствующими решению прямой и обратной задач реконструкции поля в заданной области. Так, например, процедуры, основанные на применении формулы Кирхгофа и использующие функцию Грина первой краевой задачи, позволяют определить ДН источника по измерениям поля на поверхности, охватывающей источник, соответствуют прямой задаче измерения [1–4]. Также непосредственно можно измерить и структуру источника, создавая определенные амплитудно-фазовые распределения на приемной ан-

тенне, обеспечивающие в конечном итоге ее фокусировку на элементы поверхности излучателя [4–7]. Однако использование этих методов, как правило, ограничено случаем свободного пространства и большими отношениями сигнал/помеха. Более строгие методы, свободные от указанных недостатков, основаны на решении обратной задачи: восстановлении функции когерентности источника по измерению его ближнего поля антенной решеткой [8–13]. Эти же методы используются и при решении задач синтеза излучающих антенн (в постановке, аналогичной задачам реконструкции), обеспечивающих заданные характеристики их ближнего поля [14, 15]. Отметим, что наиболее детально исследована реконструкция ДН для монохроматического источника [1, 4]. В настоящей работе рассматривается случай широкополосного протяженного излучателя. Часто хорошей моделью такого источника является одномерный (“нитевидный”) излучатель со случайным распределением вдоль его оси x спектральных компонент элементарных источников $c_\omega(x)$ в некотором диапазоне частот ω . Первая задача – реконструкция структуры акустического источника, т.е. пространственной функции когерентности на источнике $G_\omega(x', x'') = E\{c_\omega(x')c_\omega^*(x'')\}$, ($E\{\cdot\}$ – математическое ожидание, $*$ – комплексное сопряжение), подробно исследовалась ранее (см., например, [11–13]). В настоящей работе решается вторая задача – реконструкция диаграммы направленности, точнее, угловой функции когерентности протяженного широкополосного источника $D_\omega(\theta', \theta'') = E\{d_\omega(\theta')d_\omega^*(\theta'')\}$, где $d_\omega(\theta)$ – диаграмма направленности, отвечающая случайному распределению источников $c_\omega(x)$. При этом $D_\omega(\theta', \theta')$ является средней диаграммой направ-

¹ Отметим, что обычно поле излучателя разделяют на три области: ближняя зона, зона Френеля и зона Фраунгофера (дальнее поле). Удобство такого разбиения связано только с соответствующими приближениями при описании звуковых полей; если используются точные формулы, то процедура разбиения, вообще говоря, теряет смысл. В отечественной литературе, говоря о поле излучателя в зоне Френеля, иногда используют термин “ближнее поле”. В зарубежных публикациях для этого, как правило, употребляют только термин “ближнее поле” (который мы и будем использовать), а сама проблема формулируется как “far-field reconstruction from near-field measurements” (реконструкция дальнего поля по измерениям ближнего поля).

ленности по мощности. Заметим, что $D_\omega(\theta', \theta'')$ и $G_\omega(x', x'')$, полностью характеризующие акустический излучатель, однозначно связаны между собой известными соотношениями. Однако при известной функции Грина среды распространения расчет угловой или пространственной функции когерентности поля излучателя в дальней зоне проще и нагляднее проводится с использованием $D_\omega(\theta', \theta'')$ по сравнению с прямым расчетом поля на основе $G_\omega(x', x'')$, что и объясняет интерес к самостоятельному исследованию свойств $D_\omega(\theta', \theta'')$ ². Ниже на основе метода максимального правдоподобия будет приведено решение задачи измерения угловой функции когерентности протяженного источника по результатам наблюдения широкополосных сигналов $p_m(t)$ на m -х приемных элементах линейной решетки ($m = 1 \dots M$) в процессе движения источника на небольшом расстоянии от решетки с постоянной скоростью v .

Особенностями рассматриваемой постановки задачи можно считать:

– отсутствие каких-либо априорных предположений относительно вида функции когерентности источника;

– минимальная дистанция между приемной решеткой и источником существенно меньше границы дальней зоны источника во всем диапазоне частот³;

– при движении источника функция Грина, описывающая распространение поля от элементарного источника в точке x до m -го приемного элемента, меняется существенно;

– сигнал от источника наблюдается на фоне стационарной помехи с известными (измеренными заранее) статистическими характеристиками;

– скорость движения источника полагается достаточно малой, так что можно пренебречь трансформацией спектральной плотности мощности внутри узких частотных полос анализа из-за эффекта Доплера.

В дальнейшем будем предполагать, что временные зависимости сигналов $p_m(t)$ пропускаются

² Отметим, что при таком расчете необходимо, чтобы в области формирования диаграммы направленности среда распространения удовлетворяла бы условиям, обеспечивающим возможность введения самого понятия ДН источника в неоднородной среде, т.е. замены протяженного источника локальным с угловой зависимостью излучения $d_\omega(\omega)$. Достаточно, например, чтобы в этой области среда была более или менее однородной, или эта область может быть ограничена плоской поверхностью с простыми граничными условиями, позволяющими ввести мнимые источники, и т.д.

³ Малость дистанции позволяет, во-первых, достаточно хорошо прогнозировать функцию Грина при движении излучателя в неоднородной среде, во-вторых, получать высокое пространственное разрешение при разумных размерах приемной антенны и, наконец, проводить измерения при максимальном отношении сигнал/помеха.

через узкополосные фильтры с центральными частотами ω с шириной полосы $\Delta\omega/2\pi < c/L_a$, где c – скорость звука, L_a – длина приемной решетки. Полагая, что интервал между отсчетами на выходе фильтров $p_{m,\omega}(t_s)$ в моменты $t_s, s = 1 \dots S$, составляет $2\pi/\Delta\omega$, будем считать эти отсчеты независимыми по времени и рассматривать их как $M \times 1$ вектор-столбец \mathbf{p}_s (индекс ω в дальнейшем будем опускать). Всего при длине траектории движения источника L число независимых временных отсчетов составляет $S = L(\Delta\omega/2\pi)/v$.

В дальнейшем в каждой узкой полосе будем рассматривать конечномерную аппроксимацию излучателя совокупностью точечных монополярных источников с комплексными амплитудами $c_n, n = 1 \dots N$, расположенных в узлах эквидистантной сетки на оси излучателя с шагом $\lambda/2$, где λ – длина волны, соответствующая центральной частоте данной полосы. Будем полагать c_n стационарными случайными гауссовыми величинами, независимые отсчеты которых образуют $N \times 1$ векторы \mathbf{c}_s с нулевым средним и матрицей ковариации $\mathbf{G} = E\{\mathbf{c}_s \mathbf{c}_s^\dagger\}$, где \dagger означает эрмитовое сопряжение. Как известно, при такой N -мерной аппроксимации источника его направленность может быть описана значениями ДН в N дискретных углах θ_k ⁴:

$$d_k = d(\sin\theta_k) = \sum_{n=1}^N c_n \exp(i\pi(n-1)\sin\theta_k), \quad (1)$$

где синусы углов $\sin\theta_k = (2k-N)/N, k = 1 \dots N$, а угол θ отсчитывается от нормали к оси источника. Величины d_k можно рассматривать как элементы $N \times 1$ вектора \mathbf{d} . Введем матрицу $\mathbf{U} (\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{I})$, где \mathbf{I} – единичная матрица) с элементами $U_{kn} = \exp(i\pi(n-1)(2k-N)/N), k, n = 1 \dots N$. Тогда “мгновенное” значение ДН (1) выражается через вектор \mathbf{c}_s :

$$\mathbf{d}_s = \mathbf{U} \mathbf{c}_s, \quad (2)$$

который при сделанных выше предположениях связан с наблюдаемой величиной \mathbf{p}_s очевидным соотношением

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{c}_s + \mathbf{k}_s, \quad s = 1 \dots S, \quad (3)$$

где \mathbf{A}_s – $M \times N$ матрица, элементами которой являются значения функции Грина для пар “ n -й элементарный источник – m -й приемный элемент” в момент t_s , характеризующий текущее положение источника относительно приемной решетки. В случае свободного пространства

$$\mathbf{A}_s = \left\| R_{mn,s}^{-1} \exp\left(i\frac{\omega}{c} R_{mn,s}\right) \right\|, \quad (4)$$

⁴ Не ограничивая общности, положим, что фаза отличается от первого источника.

где $R_{mn,s}$ – расстояние между n -м источником и m -м приемником в момент t_s . Вектор \mathbf{k}_s в (3) характеризует помеху, которую будем считать распределенной по нормальному закону с нулевым средним и матрицей ковариации $\mathbf{K} = E\{\mathbf{k}_s \mathbf{k}_s^\dagger\}$, не зависящей от s при сделанном выше предположении о стационарности помехи.

С учетом вышесказанного наблюдаемые на приемной решетке отсчеты сигнальных векторов \mathbf{p}_s являются независимыми по s , нормально распределенными векторами с нулевым средним и матрицей ковариации \mathbf{T}_s :

$$\mathbf{T}_s = E\{\mathbf{p}_s \mathbf{p}_s^\dagger\} = \mathbf{A}_s \mathbf{U}^\dagger \mathbf{D} \mathbf{U} \mathbf{A}_s^\dagger + \mathbf{K}, \quad (5)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{d} \mathbf{d}^\dagger = \mathbf{U} \mathbf{G} \mathbf{U}^\dagger = \|\mathbf{D}_{mn}\|$ – угловая ковариационная матрица источника размером $N \times N$. Заметим, что величина диагонального элемента D_{kk} соответствует среднему по мощности значению ДН излучателя в угловом направлении θ_k , а след матрицы $N^{-1} \mathbf{D}$, $N^{-1} \text{tr} \mathbf{D} = \sum_k D_{kk} = \text{tr} \mathbf{G} = \sum_n G_{nn}$ есть, с точностью до размерных констант, акустическая мощность излучателя⁵.

Задача измерения ДН окончательно сводится к нахождению несмещенной оценки угловой ковариационной матрицы $\hat{\mathbf{D}}$ в каждой узкой полосе частот по совокупности результатов наблюдений \mathbf{p}_s , $s = 1 \dots S$ при известной геометрии задачи (матрицах \mathbf{A}_s), матрице ковариации помехи \mathbf{K} , а также к исследованию свойств полученной оценки, в частности дисперсии элементов $\hat{\mathbf{D}}$:

$$\text{disp}\{\hat{D}_{nk}\} = E\left\{\hat{D}_{nk} \hat{D}_{nk}^*\right\} - E\{\hat{D}_{nk}\} E\{\hat{D}_{nk}^*\}, \quad (6)$$

в зависимости от параметров задачи.

Из соотношения

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{U} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{U}^\dagger \quad (7)$$

следует конгруэнтность матриц $\hat{\mathbf{D}}$ и $\hat{\mathbf{G}}$, так что свойства оценки $\hat{\mathbf{D}}$ (несмещенность, состоятельность, эффективность) будут такими же, как и у $\hat{\mathbf{G}}$. Процедура построения несмещенной состоятельной оценки $\hat{\mathbf{G}}$ подробно описана в [11–13].

В [11, 12] оценка $\hat{\mathbf{G}}$ была получена методом наименьших квадратов. В [13] с помощью метода максимального правдоподобия для определения $\hat{\mathbf{G}}$ были получены при малом отношении сиг-

⁵ Это является следствием того факта, что суммирование проводится по эквидистантным отсчетам $\sin \theta_k$; таким образом, с точностью до множителя 4π это суммирование по дискретным углам эквивалентно интегрированию средней ДН по мощности по полному телесному углу 4π .

нал/помеха P_c/P_n (P_c и P_n – мощности сигнала и помехи на элементах приемной решетки), линеаризованные уравнения правдоподобия:

$$\sum_s \mathbf{B}_s \hat{\mathbf{G}} \mathbf{B}_s = \sum_s \mathbf{A}_s^\dagger \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p}_s \mathbf{p}_s^\dagger \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}_s - \sum_s \mathbf{B}_s, \quad (8)$$

где $\mathbf{B}_s = \mathbf{A}_s^\dagger \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}_s$. Было показано, что оценка $\hat{\mathbf{G}}$, удовлетворяющая (8), является несмещенной при любых отношениях P_c/P_n ⁶.

В настоящей работе с использованием результатов [11–13] будет построена оценка угловой ковариационной матрицы $\hat{\mathbf{D}}$, найдена дисперсия оценок ее элементов и подробно исследованы характеристики оценки средней по мощности ДН.

Вначале рассмотрим случай неподвижного источника.

2. Реконструкция ДН для неподвижного источника. В этом случае матрицы \mathbf{A}_s , а следовательно, и \mathbf{B}_s от s не зависят и оценка $\hat{\mathbf{G}}$ находится из (8) в явном виде. С учетом (7) оценка $\hat{\mathbf{D}}$ ⁷ такова:

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{U} [\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}] \mathbf{U}^\dagger, \quad (9)$$

где $\hat{\mathbf{T}}_0 = S_0^{-1} \sum_s \mathbf{p}_s \mathbf{p}_s^\dagger$, а выражение, заключенное

в квадратные скобки, есть $\hat{\mathbf{G}}$. Качество оценивания $\hat{\mathbf{D}}$ характеризуют величиной дисперсии ее элементов (6). Несложно показать, что для подобного рода задач (см., например, [11]) при малых отношениях сигнал/помеха на элементах приемной решетки величина дисперсии определяется в основном шумовой компонентой. Поэтому в дальнейшем ограничимся исследованием дисперсии, обусловленной только внешней помехой: $\text{disp}\{\hat{D}_{nk}\}|_{G=0}$.

Подставляя элементы $\hat{\mathbf{D}}$ (9) в (6) и пользуясь правилом размыкания моментов для гауссовых случайных величин, находим

$$\text{disp}\{\hat{D}_{nk}\}|_{G=0} = S_0^{-1} N^2 (\mathbf{B}^{-1})_{nn} (\mathbf{B}^{-1})_{kk}. \quad (10)$$

В принципе (9) и (10) полностью характеризуют угловую ковариационную матрицу источника, однако на практике часто наибольший интерес представляет вычисление средней по мощности

⁶ Величина этого отношения влияет лишь на дисперсию оценки. При малых P_c/P_n полученная оценка обладает свойством асимптотической эффективности, как любая максимально правдоподобная оценка. При больших P_c/P_n дисперсия оценки может ухудшиться по сравнению с минимальной дисперсионной границей, однако ее увеличение не столь существенно из-за общего снижения дисперсии оценки с ростом входного отношения сигнал/шум.

⁷ Предполагается, что неподвижный источник наблюдается в течение некоторого времени t_0 ; соответствующее число независимых отсчетов обозначим S_0 .

ДН (диагональных элементов матрицы \hat{D}) и ее дисперсии. Для удобства дальнейших исследований перейдем от дискретного описания к более привычному – непрерывному. Замечая, что диагональные элементы равны

$$\hat{D}_{kk} = \hat{D}(\theta_k) = \sum_{n,m=1}^N G_{nm} \exp(i\pi(n-m)\sin\theta_k), \quad (11)$$

легко видеть, что оценка средней по мощности ДН для любого θ может быть записана как

$$\hat{D}(\theta) = \mathbf{u}^\dagger \hat{G} \mathbf{u}, \quad (12)$$

где \mathbf{u} – $N \times 1$ вектор с компонентами $u_n = \exp(i\pi(n-1)\sin\theta$.

Примечание. Из формулы (11) отчетливо видно, что для определения $D(\theta)$ знание отдельных элементов G_{nm} не является необходимым, достаточно найти величины, представляющие собой суммы элементов матрицы G для каждой из ее диагоналей: $G_k^\Sigma = \sum_{m=1}^N G_{m,m+k}$, $k = 0 \dots N-1$; при этом $D(\theta) = G_0^\Sigma + 2\text{Re} \sum_{k=1}^N G_k^\Sigma \exp(i\pi k \sin\theta)$. Например, в случае абсолютно некоррелированного источника достаточно определить величину $G_0^\Sigma = \text{tr} G$, при этом ДН изотропна и не зависит от распределения интенсивности источников вдоль излучателя. К сожалению, построить оценки непосредственно величин G_k^Σ не удастся. Это, по видимому, связано с так называемой проблемой скрытых параметров, т.е. с невозможностью построения оценки некоторой функции от параметров, минуя оценки непосредственно самих параметров. В нашем случае это приводит к тому, что для построения оценки сумм диагональных элементов матрицы G необходимо оценивать каждый ее элемент G_{nm} ⁸.

Для простоты дальнейшие вычисления будем проводить для приемной решетки с межэлементным расстоянием $\lambda/2$. Тогда в случае изотропной помехи $\mathbf{K} = \epsilon_0^2 \mathbf{I}$ дисперсия средней по мощности ДН, связанная только с внешней помехой, может быть легко вычислена:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2(\theta) &= S_0^{-1} \epsilon_0^4 |\mathbf{u}^\dagger (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1} \mathbf{u}|^2 = \\ &= S_0^{-1} \epsilon_0^4 \left(\sum_{i=1}^N \mu_i^{-1} |\mathbf{u}^\dagger \mathbf{c}_i|^2 \right)^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где μ_i и \mathbf{c}_i – собственные значения и векторы матрицы $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$. Далее будем полагать, что собст-

венные значения упорядочены по возрастанию $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_N$, а собственные векторы нормированы: $|\mathbf{c}_i|^2 = 1$; при этом $\mu_i = |\mathbf{A} \mathbf{c}_i|^2$. Плохая обусловленность матрицы $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ (большое отношение μ_N/μ_1) приводит к резкому увеличению дисперсии оценки. Исследуем выражение (13), когда источник и приемная решетка расположены параллельно в свободном пространстве на расстоянии R друг от друга, а сдвиг центра источника вдоль оси относительно центра приемной решетки $x_0 = 0$.

Спектральные свойства матрицы $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ для этого случая достаточно подробно исследованы в [8, 11]. В частности, в [8] показано, что в первом приближении при больших N и бесконечной длине приемной решетки (соответствующие этому величины будут отмечены штрихами) минимальное собственное значение $\mu'_1 \approx 2R_F^{-2}$, а максимальное $\mu'_N \approx 2.67 \sqrt{NR_F^{-2}}$, где $R_F = (\lambda R/2)^{1/2}$ – радиус первой зоны Френеля, а компоненты векторов с точностью до общей фазы $c'_n = N^{-1/2}$ для c'_1 и $c'_n = N^{-1/2}(-1)^n$ для c'_N ⁹. Заметим, что ДН, отвечающие этим векторам, представляют собой ДН эквидистантной антенной решетки с межэлементным расстоянием $\lambda/2$, сфазированной в направлении $\theta_0 = 0$ для c'_1 и $\theta_0 = \pm\pi/2$ для c'_N . Отметим, что для вектора \mathbf{c}'_i угловое направление максимума ДН $\theta'_i \approx \pm \arcsin((i-1)/(N-1))$. Учитывая, что при больших N вклад в σ_0^2 при $\theta = \theta'_i$ дает в основном вектор \mathbf{c}'_i , получаем из (13): $\Sigma_0(0) \approx 0.25N^2$ и $\Sigma_0(\pm\pi/2) \approx 0.14N$, где $\Sigma_0(\theta) = \sigma_0^2(\theta) \epsilon_0^{-4} R_F^{-4} S_0$.

В качестве иллюстрации на рис. 1 штриховой линией показана зависимость $\Sigma_0(\theta)$ для бесконечной длины приемной антенны (здесь и в дальнейшем результаты численных расчетов приводятся для $N = 12$, $\lambda = 6$ м, $R = 8\lambda$). Отметим неплохое совпадение аналитически вычисленных величин $\Sigma_0(0) \approx 36$ и $\Sigma_0(\pm\pi/2) \approx 1.68$ с расчетными.

Таким образом, даже при бесконечной длине приемной антенны дисперсия реконструируемой ДН, обусловленная внешней изотропной помехой, сильно зависит от угла; минимальная дисперсия соответствует приосевым направлениям ДН, максимальная – в направлении, нормальном к оси источника (их отношение примерно равно $0.56N^{-1}$).

Для приемной решетки конечных размеров поведение μ_i и \mathbf{c}_i в зависимости от M исследовалось в [8, 11, 12]. Показано, что с уменьшением M до некоторого значения M_0 величина μ_1 практи-

⁸ Следует заметить, что строгого доказательства этого утверждения в настоящее время нет.

⁹ В этом приближении у i -го собственного вектора число изменений знаков амплитуд элементов равно $i-1$.

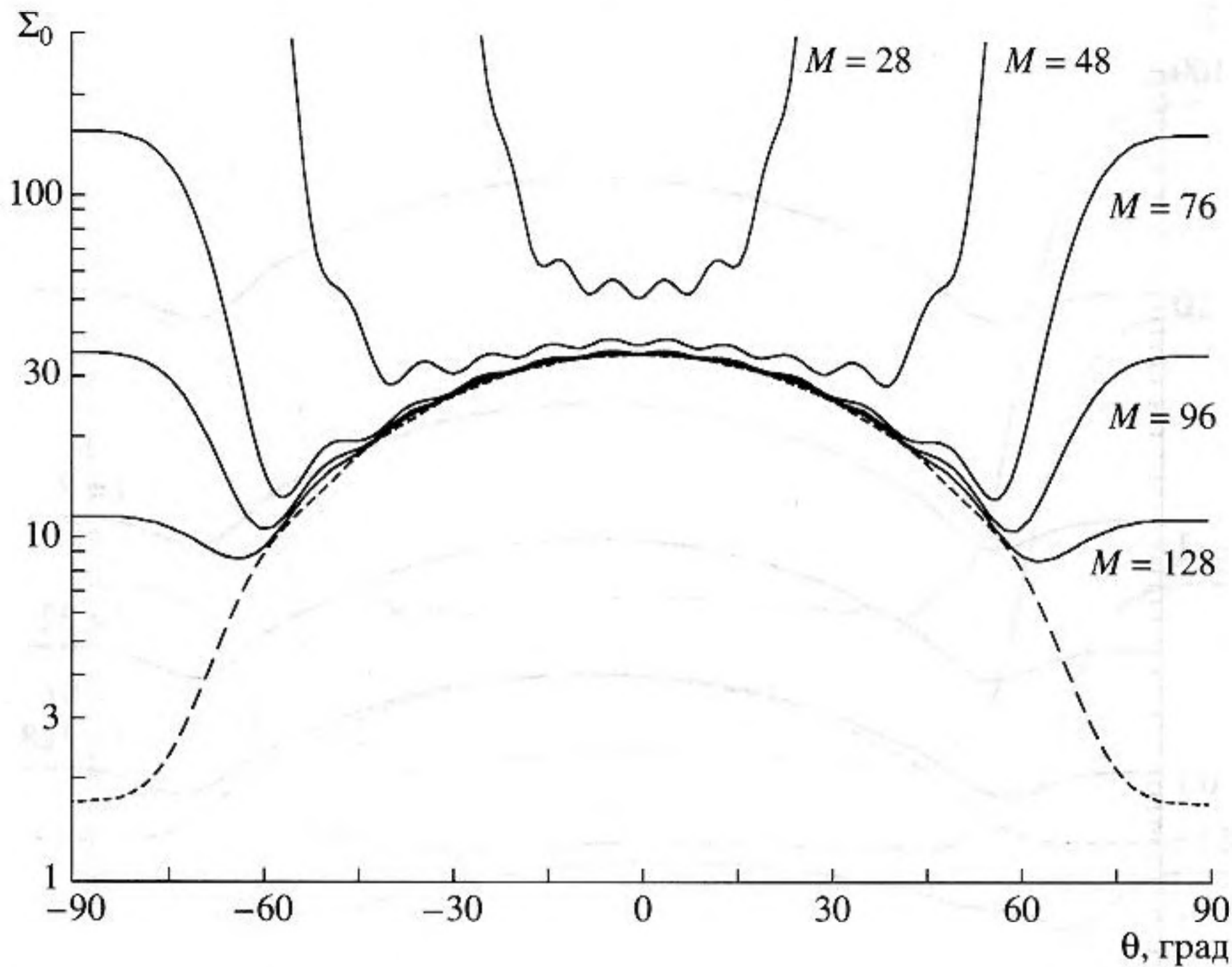


Рис. 1. Зависимости дисперсий $\Sigma_0(\theta)$ для различного числа элементов приемной апертуры M .

чески не изменяется ($\mu_1 \approx \mu'_1$), а величина μ_N монотонно уменьшается. При дальнейшем уменьшении M ($M < M_0$) вначале одно собственное значение μ_1 начинает быстро приближаться к 0, а затем начинает возрастать число собственных значений $\mu_i \sim 0$, что приводит к резкому увеличению дисперсии; при этом у элементов собственных векторов в первом приближении изменяется лишь величина амплитуды, но не ее знак, т.е. у соответствующих им ДН возрастают только боковые лепестки, а направление главного максимума сохраняется. Величина M_0 соответствует случаю, когда минимальное собственное значение μ_1 матрицы $A^\dagger A|_{M=M_0}$ вырождено, т.е. ему отвечают два собственных вектора, один из которых имеет ДН с максимумом при $\theta = 0$, другой – с максимумами при $\theta = \pm\pi/2$ ¹⁰.

Таким образом, можно ожидать, что при уменьшении M возрастание дисперсии начнется с приосевых направлений, а при $M \sim M_0$ величина $\sigma_0^2(\pm\pi/2)$ сравняется с $\sigma_0^2(0)$. Дальнейшее уменьшение M должно приводить, во-первых, к резко-

му возрастанию $\sigma_0^2(\pm\pi/2)$ и расширению области углов с большой дисперсией. Во-вторых, уменьшение M должно привести вначале к появлению (или увеличению) явной неравномерности дисперсии вблизи углов $\theta \sim 0$, а затем к общему возрастанию дисперсии. Это связано с тем, что при небольших M дисперсия в области малых углов будет определяться уже не максимальными значениями ДН векторов, у которых направления главных лепестков близки к $\theta \sim 0$, а боковыми лепестками ДН собственных векторов с $\mu_i \sim 0$.

Описанное выше поведение дисперсии иллюстрируется рис. 1, где сплошными кривыми показаны зависимости $\Sigma_0(\theta)$ для различных M .

Заканчивая рассмотрение реконструкции ДН неподвижного источника, расположенного в свободном пространстве, можно отметить, что если длина приемной апертуры $L_a = M\lambda/2 \geq M_0\lambda/2$, то дисперсия ДН, обусловленная внешними изотропными шумами, не превзойдет величины $S_0^{-1} \epsilon_0^4 R_F^4 0.25N^2$ для любого угла. Перейдем далее к случаю движущегося излучателя.

3. Реконструкция ДН для движущегося источника. В этом случае оценка ковариационной матрицы G определяется из уравнения (8), которое можно рассматривать как обычную систему из N^2 линейных уравнений относительно неизвестных элементов матрицы G . Непосредственно систему (8) в явном (или каноническом) виде решить невозможно, поэтому в [11, 12] был разработан спе-

¹⁰ В [8] была получена приближенная аналитическая формула для вычисления величины M_0 , которая определялась из условия $|(Ac'_N)|_{M=M_0}|^2 = \mu'_1 \approx 2R_F^{-2}$. При используемых в численных расчетах значениях N, λ, R величина $M_0 \approx 96$.

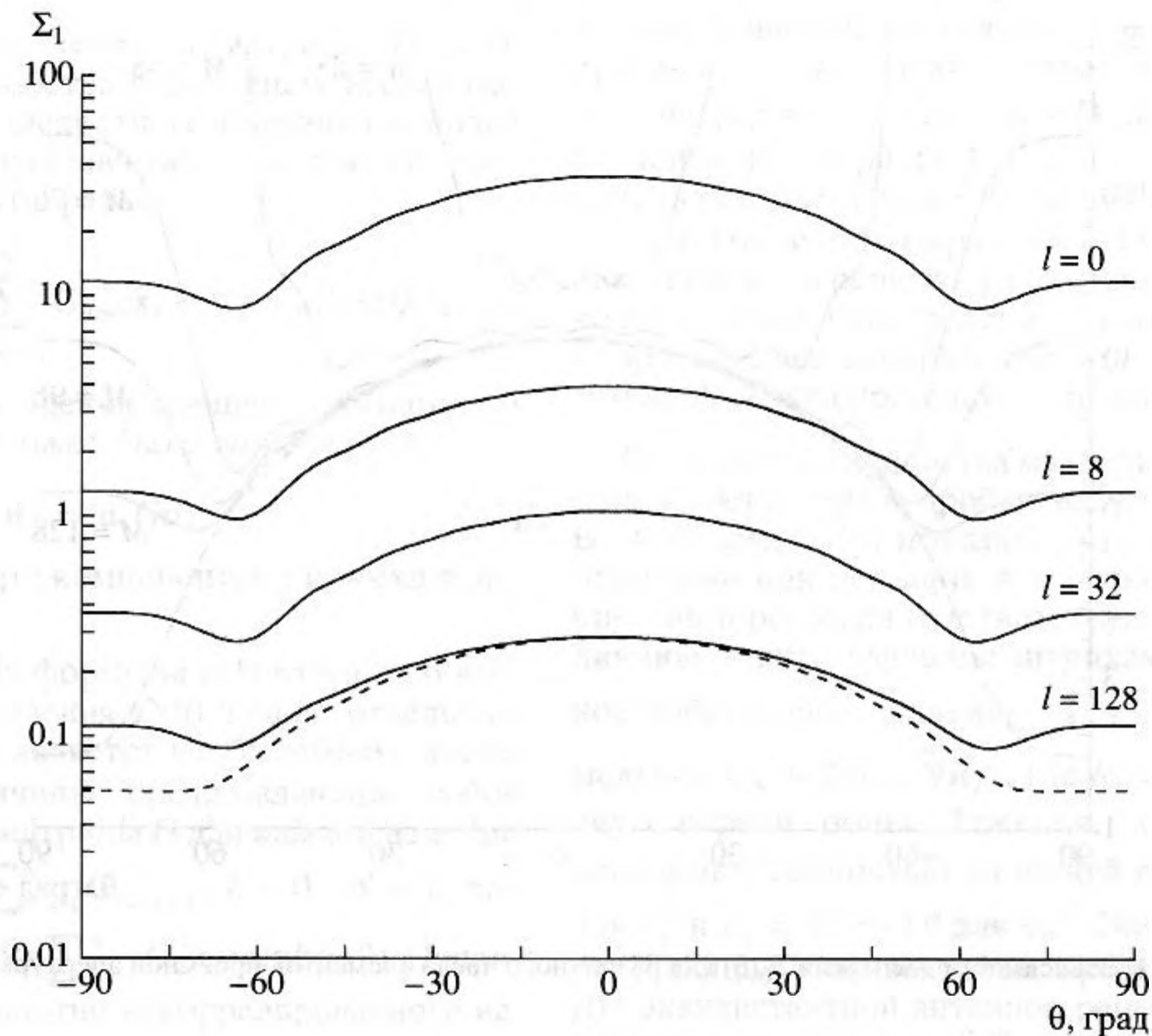


Рис. 2. Зависимости дисперсий $\Sigma_1(\theta)$ для различных длин траектории l при $M = 128$.

циальный метод¹¹, существенно использующий эрмитовость входящих в эту систему матриц B_s, G, Z , где Z — правая часть (8): $Z = \sum_s A_s^\dagger K^{-1} p_s p_s^\dagger K^{-1} A_s - \sum_s B_s$. Уравнение (8) может быть записано в виде

$$\mathcal{A}(\hat{G}) = Z, \quad (14)$$

где оператор \mathcal{A} имеет вид $\mathcal{A}(X) = \sum_s B_s X B_s$. Процедура решения (14) подробно описана в [12, 13], там же найден явный вид оператора \mathcal{A} (из-за громоздкости выкладок здесь не приводится). Если известен оператор \mathcal{A} , то оценку G можно записать в виде

$$\hat{G} = \mathcal{A}^{-1}(Z). \quad (15)$$

¹¹ Метод заключается в разложении эрмитовых матриц по определенному базису и установлении взаимно однозначного соответствия между эрмитовыми матрицами и вещественными векторами размерностью $N^2 \times 1$. После этого исходное матричное уравнение записывается в виде обычной системы линейных уравнений для определения элементов вещественного вектора, для решения которой уже можно использовать стандартные процедуры. Определив таким образом вектор, отвечающий оценке ковариационной матрицы, обратным преобразованием можно восстановить и саму матрицу.

Зная оценку \hat{G} , можно построить оценки угловой ковариационной матрицы источника (7) и средней по мощности ДН (12). Качество оценки средней по мощности диаграммы направленности $\hat{D}(\theta)$ будем характеризовать так же, как и в случае неподвижного источника, величиной дисперсии, обусловленной только шумовой компонентой. Опуская громоздкие выкладки, получим для изотропных шумов

$$\sigma_1^2(\theta) = \varepsilon_0^4 \text{tr}[\mathbf{u}\mathbf{u}^\dagger \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{u}\mathbf{u}^\dagger)]. \quad (16)$$

Исследуем зависимость дисперсии σ_1^2 от длины траектории движения L при заданном размере приемной решетки M для источника, движущегося в свободном пространстве, полагая, что сам источник и его траектория движения параллельны приемной решетке, а центральная точка траектории находится напротив центра решетки ($L = 0$ соответствует неподвижному источнику). При расчетах будем полагать, во-первых, что положение источника меняется дискретно с шагом $\lambda/2$, т.е. длину траектории можно характеризовать безразмерным числом $l = 2L/\lambda$, и, во-вторых, что независимые временные отсчеты равномерно распределены по траектории (при этом число отсчетов, проходящихся на каждую точку траектории,

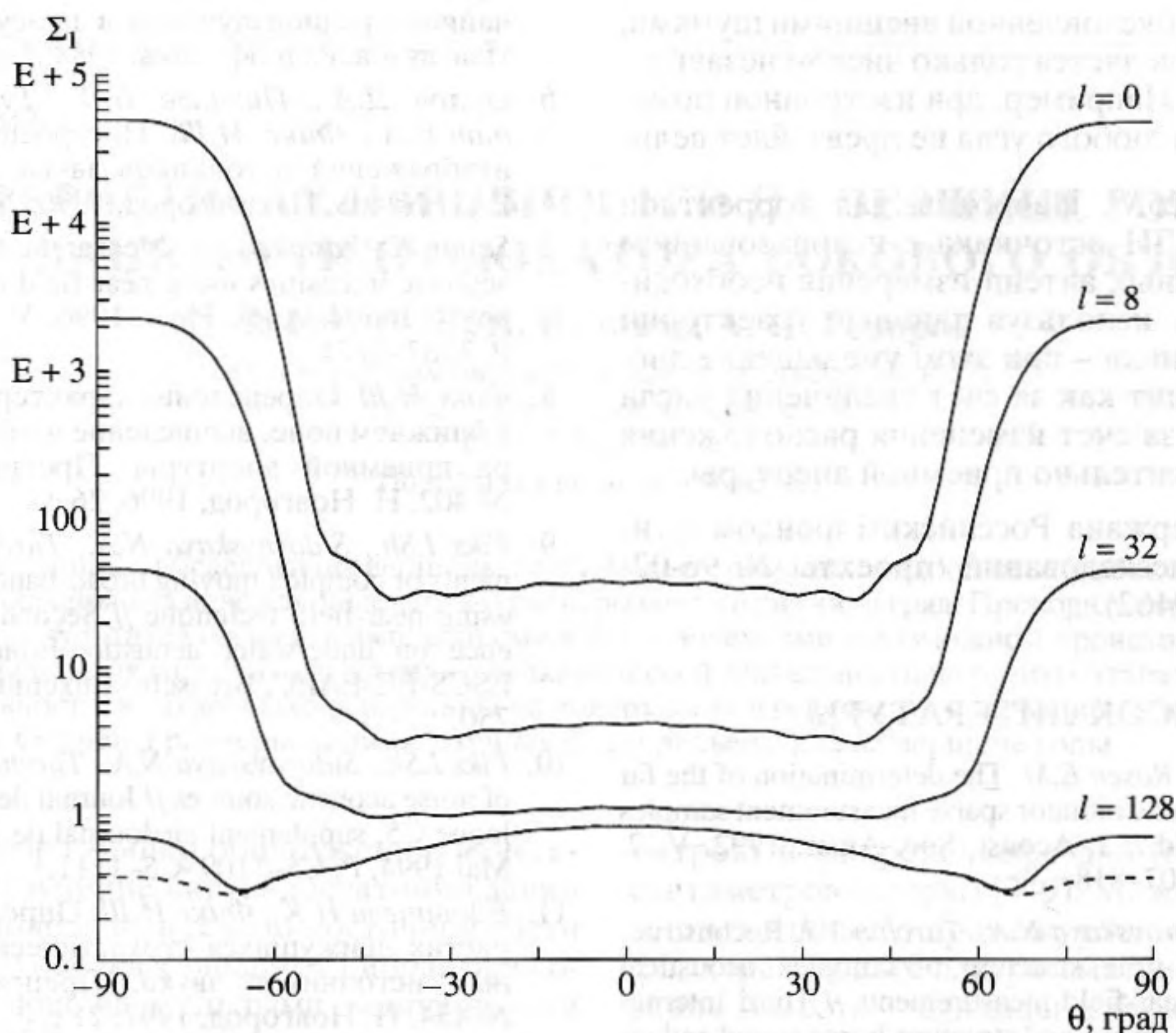


Рис. 3. Зависимости дисперсий $\Sigma_1(\theta)$ для различных длин траектории l при $M = 48$.

равно $S/(l+1)$). Отметим, что при $l=0$ $\sigma_1^2|_{l=0} = \sigma_0^2|_{S_0=S}$. Исследование дисперсии для движущегося источника проведем для случая $S = (l+1)S_0$. Для удобства, как и ранее, обозначим $\Sigma_1(\theta) = \sigma_1^2(\theta)\epsilon_0^{-4}R_F^{-4}S_0$.

В качестве иллюстрации на рисунках приведены зависимости $\Sigma_1(\theta)$ для $M = 128$ (рис. 2) и $M = 48$ (рис. 3) при различных длинах траектории l ; штриховой линией показана зависимость Σ_1 при "бесконечной" длине траектории (в расчетах $l = 10^4$). Вначале отметим, что при движении источника вблизи приемной апертуры изменение дисперсии обусловлено в основном двумя факторами. Во-первых, растет число выборок S , во-вторых, если по мере увеличения смещения источника относительно центра приемной апертуры изменение вида (структуры) собственных векторов в первом приближении незначительно, то величины соответствующих им собственных значений μ изменяются значительно (более подробно об этом см., например, в [11]). Однако при небольших длинах траектории изменение μ не столь выражено и все определяется числом выборок, т.е. величиной $\Sigma_1 \sim (l+1)^{-1}\Sigma_0$, как это видно из рис. 2, 3. Далее, с увеличением смещения, т.е. длины траектории,

определяющую роль начинает играть изменение μ у соответствующих векторов. Если приемная апертура достаточно длинная ($M \geq M_0$), т.е. при $l=0$ все $\mu_i \geq 2R_F^{-2}$, такое изменение не может существенно повлиять на вид Σ_1 (см. рис. 2). Напротив, при $M < M_0$ с увеличением смещения у векторов с максимумами ДН в приосевых направлениях быстро возрастают значения μ , которые при $l=0$ были близки к нулю. Это приводит к резкому уменьшению дисперсии при $\theta \sim \pm\pi/2$. На рис. 3 отчетливо видно, что с увеличением l величина $\Sigma_1(\pm\pi/2)$ убывает гораздо быстрее, чем $\Sigma_1(0)$; более того, при $l \rightarrow \infty$ величина $\Sigma_1(\pm\pi/2)$ становится меньше $\Sigma_1(0)$! На рисунках хорошо видно, что при больших длинах траектории $l \rightarrow \infty$ (т.е. когда источник "уходит" в дальнюю зону) значения Σ_1 практически не меняются. Это объясняется тем, что в дальней зоне остается один собственный вектор (практически неизменного вида) с μ , отличным от 0, а уменьшение дисперсии из-за возрастания числа выборок полностью компенсируется увеличением расстояния между источником и приемной антенной.

Таким образом, для длинных приемных апертур измерения ДН можно проводить при небольших траекториях движения источника (или даже при неподвижном источнике), так как уменьше-

ние дисперсии, обусловленной внешними шумами, в основном определяется только числом независимых выборок S . Например, при изотропной помехе дисперсия для любого угла не превзойдет величины $S^{-1} \epsilon_0^4 R_F^4 0.25N^2$. Напротив, для корректной реконструкции ДН источника с использованием коротких приемных антенн измерения необходимо производить, используя длинные траектории движения источника – при этом уменьшение дисперсии происходит как за счет увеличения числа выборок, так и за счет изменения расположения источника относительно приемной апертуры.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 96-02-19457 и 96-02-19462).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borgiotti G.V., Rosen E.M.* The determination of the far field of an acoustic radiator sparse measurement samples in the near-field // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1992. V. 2. № 2. Pt. 1. P. 807–818.
2. *Fiks I.Sh., Sidorovskaya N.A., Turchin V.I.* Reconstruction of spatial-time structure of complex acoustical sources from near-field measurements // *Third International Congress on air- and structure-borne sound and vibration.* June 13–15, 1994, Montreal, Canada. Edited by M.J. Crocker. P. 1701–1708.
3. *Турчин В.И., Фикс И.Ш.* Многоакурсный апертурный синтез. Препринт ИПФ РАН № 431. Н. Новгород, 1997. 23 с.
4. *Кнафель А.Н., Салин Б.Н., Семенова Л.Р., Турчин В.И., Фогель А.Л.* Голографические методы измерений характеристик излучения акустических источников // *Виброакустические поля сложных объектов и их диагностика.* Горький: ИПФ АН СССР, 1994. С. 118–141.
5. *Кремер И.Я., Костылев В.И.* Получение радиоизображений протяженных источников слабого слу-
6. *Орлов Д.А., Пикалев В.В., Турчин В.И., Тютин В.А., Фикс И.Ш.* Построение акустических изображений источников звука. Препринт ИПФ РАН № 408. Н. Новгород, 1996. 24 с.
7. *Saijon K., Yoshikawa S.* Measurement of structural and acoustic intensities using near-field acoustical holography // *Jpn. J. Appl. Phys.* 1996. V. 35. № 5B. Pt. 1. P. 3167–3174.
8. *Фикс И.Ш.* Определение характеристик источника в ближнем поле: вычисление необходимого размера приемной апертуры. Препринт ИПФ РАН № 402. Н. Новгород, 1996. 26 с.
9. *Fiks I.Sh., Sidorovskaya N.A., Turchin V.I.* Measurements of complex moving broad-band acoustic radiators using near-field technique // *Second European conference on underwater acoustic.* Edited by L. Bjorno. ESCS-EC-EAEC, Brussels • Luxemburg, 1994. P. 745–750.
10. *Fiks I.Sh., Sidorovskaya N.A., Turchin V.I.* Diagnostics of noise acoustic sources // *Journal de Physique IV. Colloque C5, supplement au Journal de Physique III.* V. 4. Mai 1994. P. C5–1109–C5–1111.
11. *Вдовичева Н.К., Фикс И.Ш.* Определение характеристик движущихся стохастических распределенных источников звука. Препринт ИПФ РАН № 434. Н. Новгород, 1997. 21 с.
12. *Вдовичева Н.К., Турчин В.И., Фикс И.Ш.* Реконструкция характеристик протяженных стохастических источников звука // *Акуст. журн.* 1998. Т. 44. № 6. С. 757–763.
13. *Вдовичева Н.К., Турчин В.И., Фикс И.Ш.* Дистанционная диагностика широкополосных движущихся источников // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1998. Т. 41. № 9. С. 1163–1176.
14. *Guo J., Pan J., Bao Ch.* Activele created quiet zones bu multiple control sources in free space // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1997. V. 101. № 3. P. 1492–1501.
15. *Гармаш В.Н.* Задачи и методы синтеза антенных систем по полю в ближней зоне излучения // *Антенны.* 1998. Вып. 2(41). С. 3–13.

Reconstruction of the Far Field of an Extended Noise Source from Near-Field Measurements

N. K. Vdovicheva, V. I. Turchin, and I. Sh. Fiks

Methods and potentiality of reconstruction of the angular distribution of the far-field power generated by an extended noise source from near-field measurements with an antenna array are considered. The research is carried out for a source that rests or moves in an inhomogeneous medium and assumes that the correlation matrix of the external interference is known *a priori*. The reconstruction of the angular distribution is formulated in terms of statistical estimation procedures based on the likelihood function. Analysis and numerical results for estimate covariations are given.