АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 6, с. 844–856

УДК 550.34+534.222

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА В СРЕДЕ С ДВУМЯ РЕЛАКСАЦИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ. АНАЛИЗ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

© 1999 г. **В. А. Ларичев, Г. А. Максимов**

Московский инженерно-физический институт
115409 Москва, Каширское шоссе, 31
E-mail: maximov@dpt.39.mephi.ru

Поступила в редакцию 24.07.98 г.

В работе с использованием теоремы Эфроса об обобщенной свертке получено новое аналитическое представление функции Грина акустического импульса, распространяющегося в среде с двумя релаксационными процессами. Это представление включает три части, которые описывают соответственно акустический предвестник, а также высокочастотную и низкочастотную составляющие тела импульса. Высокочастотная часть тела импульса может быть записана в инвариантной форме, справедливой для любого спектра времен релаксации (СВР). Низкочастотная часть тела импульса имеет значительно более сложную зависимость от параметров СВР. В работе выполнен анализ этой зависимости и получены аналитические выражения для ее расчета. Справедливость этих выражений подтверждена путем их сравнения с результатами прямого численного расчета.

В настоящее время методы импульсной акустодиагностики релаксационных сред достаточно подробно разработаны теоретически [1–3]. Эти методы опираются как на асимптотические исследования распространения импульсов [4, 5], так и на анализ известных точных решений [6–10]. Круг последних весьма ограничен и сводится по существу к двум точным решениям: для единственного релаксационного процесса [6–9] и для непрерывного спектра релаксационных процессов, распределенных по закону $1/\tau$ [10]. Другие известные точные решения для сред Максвелла [11] и Фойгта [12, 13] соответствуют предельным случаям среды с одним релаксационным процессом.

Наличие всего двух точных решений ограничивает понимание того, как функционально связаны параметры распределенного спектра времен релаксации (СВР) с особенностями динамики импульса. Выявление такой связи – ключевой вопрос для импульсной акустодиагностики сред, а также для построения приближенных решений при произвольном СВР. Поэтому поиск новых точных решений для сред с распределенным СВР представляется актуальной задачей.

Наиболее простой случай распределенного СВР соответствует модели с двумя релаксационными процессами. Поэтому вполне естественным представляется желание понять, каким будет аналитическое решение задачи для двух релаксационных процессов и комбинацией каких параметров оно будет определяться. Однако до настоящего времени подходы к построению аналитических решений такой задачи отсутствовали.

В настоящей работе будет получено точное решение для среды с двумя релаксационными процессами в случае малой дисперсии фазовой скорости и проведен анализ этого решения, демонстрирующий зависимость профиля акустического импульса от соотношения между временами релаксации и мощностью релаксационных процессов.

Как известно [1–5], функция Грина (фундаментальное решение) для плоской волны, распространяющейся по релаксационной среде в одном направлении, например вправо, дается интегралом Меллина

$$I(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} dp e^{pt - xK(p)}, \quad \gamma = (-i\infty, +i\infty), \quad (1)$$

где волновое число определяется выражением

$$K(p) = \frac{p}{c_\infty}\left[1 - \frac{\Delta}{\langle\tau\rangle}\int\limits_0^\infty \frac{g(\tau)}{p + 1/\tau}d\tau\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Здесь через Δ обозначена дисперсия фазовой скорости: $\Delta = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_\infty^2$, где c_0 и c_∞ – предельные значения фазовой скорости на низких и высоких

частотах $c_\infty > c_0$, а через $g(\tau)$ обозначен нормированный спектр времен релаксации,

$$g(\tau) \geq 0; \quad \int_0^\infty d\tau g(\tau) = 1; \quad \langle\tau\rangle = \int_0^\infty d\tau g(\tau)\tau$$

и предполагается, что при больших и малых временах релаксации спектр $g(\tau)$ достаточно быстро стремится к нулю.

В случае двух релаксационных процессов с весами g_1 и g_2 нормированный СВР может быть записан в виде

$$g(\tau) = \frac{g_1\delta(\tau-\tau_1) + g_2\delta(\tau-\tau_2)}{g_1+g_2}. \tag{3}$$

Соответственно моменты СВР могут быть записаны в виде

$$\langle\tau^n\rangle = \frac{g_1\tau_1^n + g_2\tau_2^n}{g_1+g_2}. \tag{4}$$

Поскольку дисперсия Δ связана с отношением теплоемкостей при постоянном объеме C_V и давлении $C_P(\Delta = 1 - C_V/C_P)$, то ясно, что для сколь-нибудь сложно устроенных сред условие $\Delta \ll 1$ выполняется с хорошей точностью и не является существенным ограничением. Разлагая волновое число (2) по малому параметру $\Delta \ll 1$

$$K(p) = \frac{p}{c_\infty}\left[1 + \frac{\Delta}{2\langle\tau\rangle}\int_0^\infty \frac{g(\tau)}{p+1/\tau}d\tau\right] \tag{5}$$

и вводя обозначения $t' = t - x/c_\infty$, $\beta = \Delta x/(2c_\infty\langle\tau\rangle)$, функцию Грина (1) можно записать в виде

$$I(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp \exp\left\{pt' - \beta\int_0^\infty \frac{g(\tau)}{p+1/\tau}d\tau\right\}. \tag{6}$$

В случае дискретного СВР

$$g(\tau) = \sum_i g_i\delta(\tau-\tau_i)$$

интеграл (6) приводится к виду

$$I(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp e^{pt'}\prod_i \exp\left\{-\beta\frac{g_i}{p+1/\tau_i}\right\}.$$

Интегралы этого типа могут быть представлены в виде последовательных сверток решений, соответствующих средам с различными единственными временами релаксации. Применительно к спектру (3) такой подход реализован в Приложении. Однако нам будет удобнее воспользоваться другим подходом.

Для СВР (3), соответствующего двум релаксационным процессам, выражение (6) приводится к виду

$$I(t,x) = e^{-\beta}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp e^{pt'} \times \\ \times \exp\left\{\beta\langle\tau^{-1}\rangle\frac{p + \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}/\langle\tau^{-1}\rangle}{p^2 + (\tau_1^{-1}+\tau_2^{-1})p + \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}}\right\}. \tag{7}$$

Представив далее подынтегральную экспоненту как сложную функцию

$$\exp\{\beta\langle\tau^{-1}\rangle f(q(p))\},$$

где

$$f(q) = 1/q, \quad q(p) = \frac{p^2 + (\tau_1^{-1}+\tau_2^{-1})p + \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}}{p + \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}/\langle\tau^{-1}\rangle},$$

и воспользовавшись теоремой Эфроса об обобщенной свертке [14], можно получить следующее интегральное представление:

$$I(t,x) = e^{-\beta}\int_0^\infty d\xi F(\xi,\beta)Q(t',\xi), \tag{8}$$

где через функции $F(\xi,\beta)$ и $Q(t',\xi)$ обозначены лапласовские интегралы

$$F(\xi,\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp e^{p\xi}\exp\left\{\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{p}\right\}, \tag{9}$$

$$Q(t',\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp e^{pt'} \times \\ \times \exp\left\{-\xi\frac{p^2 + (\tau_1^{-1}+\tau_2^{-1})p + \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}}{p + \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}/\langle\tau^{-1}\rangle}\right\}. \tag{10}$$

Отметим, что подынтегральное выражение в (10) аналитично в правой полуплоскости вплоть до первой особенности, обусловленной нулем знаменателя. Поэтому контур интегрирования можно сдвинуть до этой особенности, не меняя значения интеграла. Далее, после соответствующей замены переменных и деления многочленов, подынтегральное выражение в (10) приводится к виду (9), но с противоположным знаком в экспоненте. Используя известные результаты по преобразованию Лапласа [14–16], из (9), (10) получим

$$F(\xi,\beta) = \left[\delta(\xi) + \left(\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{\xi}\right)^{1/2} I_1(2\sqrt{\beta\langle\tau^{-1}\rangle\xi})\theta(\xi)\right], \tag{11}$$

$$Q(t',\xi) = \exp\left\{-\frac{t'}{\tau_1\tau_2/\langle\tau^{-1}\rangle} - \xi\left(\frac{\delta\tau_2}{\tau_1} + \frac{\delta\tau_1}{\tau_2}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[\delta(t'-\xi) + \left(\frac{\xi}{t'-\xi}\frac{\delta\tau_2}{\tau_1}\frac{\delta\tau_1}{\tau_2}\right)^{1/2}\times\right. \tag{12}$$

$$\left.\times J_1\left(2\sqrt{\xi(t'-\xi)\frac{\delta\tau_2}{\tau_1}\frac{\delta\tau_1}{\tau_2}}\right)\theta(t'-\xi)\right],$$

где через $J_n(z)$ и $I_n(z)$ обозначены функции Бесселя действительного и мнимого аргументов, $\delta(z)$ и $\theta(z)$ – соответственно дельта-функция и единичная функция Хевисайда и введены обозначения

$$\delta\tau_1 = 1 - \tau_1^{-1}/\langle\tau^{-1}\rangle, \quad \delta\tau_2 = 1 - \tau_2^{-1}/\langle\tau^{-1}\rangle. \tag{13}$$

Используя выражение (4) для $\langle\tau^{-1}\rangle$, нетрудно показать, что если одна из величин $\delta\tau_1$ или $\delta\tau_2$ больше нуля, то другая обязательно меньше. Произведение этих величин можно представить в виде

$$\delta\tau_1\delta\tau_2 = -\frac{(\tau_1^{-1}-\tau_2^{-1})^2}{\langle\tau^{-1}\rangle^2}\frac{g_1g_2}{(g_1+g_2)^2}. \tag{14}$$

Вследствие отрицательности этого произведения аргумент у функции Бесселя в выражении (12) становится чисто мнимым, и ее следует заменить на модифицированную функцию Бесселя.

Подставляя соотношения (11) и (12) в (8), получим окончательное выражение для функции Грина импульса, распространяющегося в среде с двумя релаксационными механизмами:

$$I(t,x) = I_p(t,x) + I_b^{\infty}(t,x) + I_b^{0}(t,x), \tag{15}$$

где

$$I_p(t,x) = e^{-\beta}\delta(t'), \tag{16}$$

$$I_b^{\infty}(t,x) = e^{-\beta}\exp\left\{-\frac{t'}{\tau_1\tau_2\langle\tau^{-1}\rangle} - t'(\ldots)\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'}\right)^{1/2} I_1(2\sqrt{\beta\langle\tau^{-1}\rangle t'})\theta(t'), \tag{17}$$

$$I_b^{0}(t,x) = e^{-\beta}\exp\left\{-\frac{t'}{\tau_1\tau_2\langle\tau^{-1}\rangle}\right\}\int_0^{t'} d\xi e^{-\xi(\ldots)}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'-\xi}|\ldots|\right)^{1/2} I_1(2\sqrt{\beta\langle\tau^{-1}\rangle\xi})I_1(2\sqrt{\xi(t'-\xi)|\ldots|})\Bigg]. \tag{18}$$

Для сокращения записи в этих выражениях введены обозначения

$$(\ldots) \equiv \left(\frac{\delta\tau_1}{\tau_2} + \frac{\delta\tau_2}{\tau_1}\right), \quad |\ldots| \equiv \left|\frac{\delta\tau_1}{\tau_2}\frac{\delta\tau_2}{\tau_1}\right|. \tag{19}$$

Выражение (15) содержит три слагаемых: первое (16), с сингулярностью дельта-функции, соответствует акустическому предвестнику, определяемому вкладом предельно высоких частот, и в силу этого экспоненциально затухающему с пройденным расстоянием. Два оставшихся слагаемых – интегральное (18) и неинтегральное (17) – описывают тело импульса. При этом из вывода выражения (15) следует, что неинтегральное слагаемое (17) также определяется вкладом высоких частот, но содержит более слабую по сравнению с дельта-сингулярностью предвестника особенность – разрыв. В интегральном слагаемом (18) вклад предельно высоких частот отсутствует, и оно не содержит соответствующих им особенностей.

На рис. 1а показаны временные профили тела импульса на различных безразмерных расстояниях β, рассчитанные на основе точных выражений (17), (18). Отметим, что расчеты интеграла в (18) не представляют значительных трудностей ввиду монотонного изменения подынтегральных функций. Параметры СВР при расчетах выбраны следующими: $g_1/(g_1+g_2) = 0.3$, $g_2/(g_1+g_2) = 0.7$, $\tau_2/\tau_1 = 2$. Обратим внимание, что все выражения в (17)–(19) симметричны относительно обоих релаксационных процессов. На рис. 1б и рис. 1в в том же масштабе отдельно построены графики соответственно неинтегральной (17) и интегральной частей (18), из которых складывается тело импульса. Из приведенных графиков видно, что на небольших расстояниях профиль тела импульса формируется в основном неинтегральным слагаемым (17) (рис. 1б), амплитуда которого экспоненциально затухает с пройденным расстоянием, а профиль из первоначально экспоненциального постепенно трансформируется в гауссов. Одновременно с такой трансформацией неинтегрального слагаемого динамика интегрального слагаемого (18) (рис. 1в) характеризуется сначала постепенным ростом его амплитуды, а начиная с определенного момента – ее убыванием по степенному закону – обратно пропорционально корню из пройденного расстояния. Такое поведение иллюстрирует рис. 2, на котором в логарифмическом масштабе построена зависимость амплитуды тела импульса от безразмерного расстояния β. При этом в силу более медленного затухания интегрального слагаемого его вклад оказывается преобладающим на больших пройденных расстояниях.

Остальная часть статьи посвящена анализу неинтегрального (17) и интегрального (18) слагаемых. Прежде всего нетрудно видеть, что в случае релаксационных процессов с одинаковыми временами релаксации $\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau$ имеем $\langle\tau^{-1}\rangle = 1/\tau$, $\delta\tau_1 = \delta\tau_2 = 0$, так что интегральное слагаемое зануляется, а оставшиеся слагаемые (16), (17) полностью совпадают с выражением для одного релаксационного процесса [7–9]

$$I(t,x) = e^{-\beta}\left[\delta(t') + e^{-t'/\tau}\left(\frac{\beta}{t'\tau}\right)^{1/2} I_1(2\sqrt{\beta t'/\tau})\theta(t')\right]. \tag{20}$$

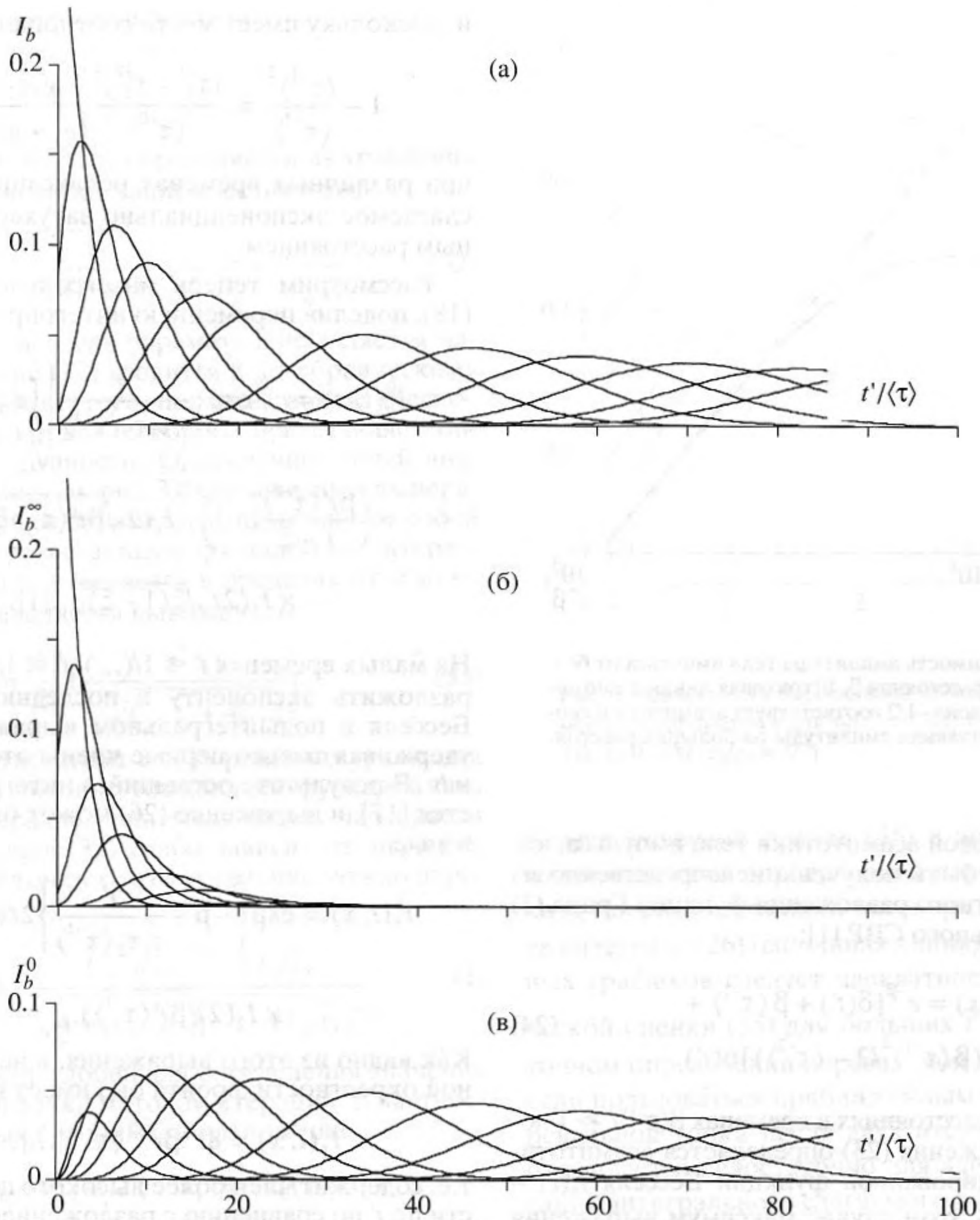

Рис. 1. Временные профили а – тела импульса $I(t, x)$; б – его высокочастотной $I_b^\infty(t, x)$ и в – низкочастотной $I_b^0(t, x)$ составляющих в среде с двумя релаксационными процессами на различных безразмерных расстояниях $\beta = 1, 3, 6, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ при следующих параметрах СВР: $\tau_2/\tau_1 = 2.0$, $g_2/g_1 = 3/7$.

Используя явные выражения (13) для $\delta\tau_1$ и $\delta\tau_2$, можно получить следующие соотношения:

$$(\ldots) = \frac{\langle\tau^{-2}\rangle}{\langle\tau^{-1}\rangle} - \frac{1}{\tau_1\tau_2\langle\tau^{-1}\rangle}, \tag{21}$$

$$|\ldots| = \frac{1}{(\tau_1\tau_2)^2}\left[\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\tau^{-1}\rangle} - \frac{1}{\langle\tau^{-1}\rangle^2}\right]. \tag{22}$$

В результате неинтегральное слагаемое (17), описывающее высокочастотную часть тела импульса, может быть представлено в виде

$$I_b^\infty(t, x) = e^{-\beta}\exp\left\{-t'\frac{\langle\tau^{-2}\rangle}{\langle\tau^{-1}\rangle}\right\}\left(\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'}\right)^{1/2}\times \tag{23}$$
$$\times I_1(2\sqrt{\beta\langle\tau^{-1}\rangle t'})\theta(t').$$

Форма записи (23) может рассматриваться как инвариантная при любом виде СВР, а не только для случая двух релаксационных процессов. Действительно, это выражение описывает все особеннос-

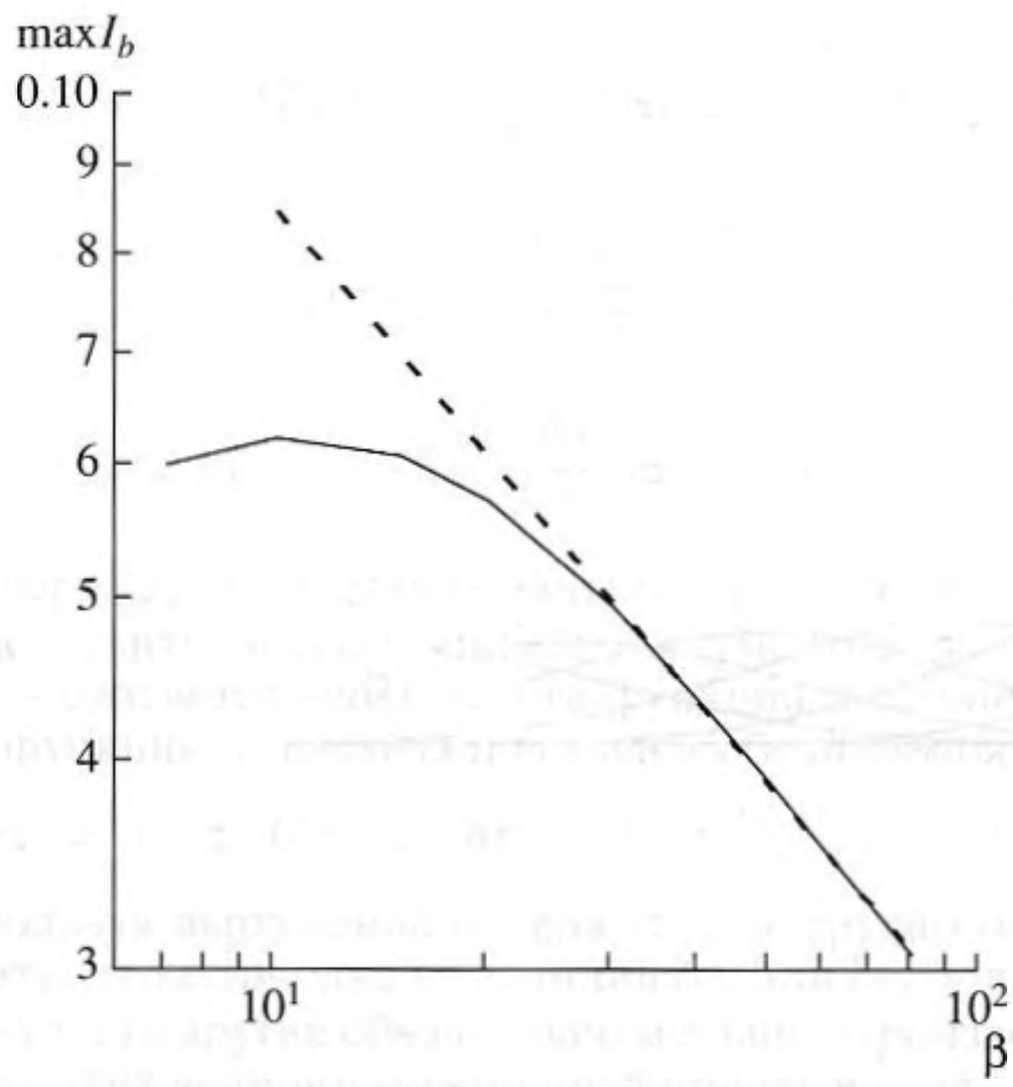

Рис. 2. Зависимость амплитуды тела импульса от безразмерного расстояния β. Штриховая линия с тангенсом угла наклона –1/2 соответствует асимптотическому закону затухания амплитуды на больших расстояниях.

ти прифронтовой асимптотики тела импульса, которые могут быть получены непосредственно из высокочастотного разложения функции Грина (1) для произвольного СВР [1]:

$$I(t, x) = e^{-\beta}[\delta(t') + \beta\langle\tau^{-1}\rangle + \\ + t'\beta(\beta\langle\tau^{-1}\rangle^2/2 - \langle\tau^{-2}\rangle)]\theta(t'). \tag{24}$$

На больших расстояниях и временах $\beta\langle\tau^{-1}\rangle t' \gg 1$ поведение выражения (23) определяется асимптотикой модифицированной функции Бесселя $I_n(z) \approx \approx (2\pi z)^{-1/2}e^z$. В этом случае максимум выражения (23) соответствует максимуму суммарного показателя экспоненты и определяется выражением

$$t'_{\max} = \frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{2|\ldots|}\left[\frac{\langle\tau^{-2}\rangle}{\sqrt{\langle\tau^{-2}\rangle^2 - 4\langle\tau^{-1}\rangle^2|\ldots|}} - 1\right].$$

В самом максимуме при $t' = t'_{\max}$ выражение (23) принимает значение

$$I_b^{\infty}(t' = t'_{\max}, x) = \left(\frac{\sqrt{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}}{2\pi t'_{\max}}\right)^{1/2} \times \\ \times \exp\left\{-\beta\left(1 - \frac{\langle\tau^{-1}\rangle^2}{\langle\tau^{-2}\rangle}\right)\right\}, \tag{25}$$

и, поскольку имеет место соотношение

$$1 - \frac{\langle\tau^{-1}\rangle^2}{\langle\tau^{-2}\rangle} = \frac{(\tau_1^{-1} - \tau_2^{-1})^2}{\langle\tau^{-2}\rangle}\frac{g_1 g_2}{(g_1 + g_2)^2} \geq 0,$$

при различных временах релаксации $\tau_1 \neq \tau_2$ это слагаемое экспоненциально затухает с пройденным расстоянием.

Рассмотрим теперь интегральное слагаемое (18), поделив переменную интегрирования на t':

$$I_b^0(t, x) = e^{-\beta}\exp\left\{-\frac{t'}{\tau_1\tau_2\langle\tau^{-1}\rangle}\right\}\int_0^1 d\xi e^{-\xi t'(\ldots)} \times \\ \times\left(\frac{\beta t'\langle\tau^{-1}\rangle}{1-\xi}|\ldots|\right)^{1/2} I_1(2\sqrt{\beta t'\langle\tau^{-1}\rangle\xi}) \times \\ \times I_1(2t'\sqrt{\xi(1-\xi)|\ldots|})]. \tag{26}$$

На малых временах $t' \ll 1/(\ldots)$, $t' \ll 1/\sqrt{|\ldots|}$ можно разложить экспоненту и последнюю функцию Бесселя в подынтегральном выражении в (22), удерживая только первые члены этого разложения. В результате оставшийся интеграл вычисляется [17], и выражение (26) может быть записано в виде

$$I_b^0(t, x) = \exp\left\{-\beta - \frac{t'}{\tau_1\tau_2\langle\tau^{-1}\rangle}\right\}2t'|\ldots| \times \\ \times I_2(2\sqrt{\beta t'\langle\tau^{-1}\rangle}). \tag{27}$$

Как видно из этого выражения, в непосредственной окрестности фронта оно имеет вид

$$I_b^0(t, x) = 8t'^2\beta e^{-\beta}\langle\tau^{-1}\rangle|\ldots|, \tag{28}$$

т.е. содержит член более высокого порядка малости по t' по сравнению с разложением (24).

На больших временах $t' \gg 1/\sqrt{|\ldots|}$ и расстояниях $\beta\langle\tau^{-1}\rangle t' \gg 1$ оценку интеграла (26) формально можно получить методом перевала, воспользовавшись асимптотиками модифицированных функций Бесселя. Для этого интеграл в (26) удобно переписать в виде

$$\int_0^1 d\xi F(\xi)\exp\{-t'\sqrt{|\ldots|}S(\xi)\}, \tag{29}$$

где

$$F(\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'}|\ldots|\right)^{1/4}\xi^{-1/2}(1-\xi)^{-3/4}, \\ S(\xi) = 2\sqrt{\xi(1-\xi)} - \xi\frac{(\ldots)}{\sqrt{|\ldots|}} + 2\varepsilon\sqrt{\xi}; \tag{30}$$

здесь через ε обозначен параметр

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'|\ldots|}}. \qquad (31)$$

Перевальная точка x_S определяется из уравнения $S'(\xi = x_S) = 0$, которое записывается в виде

$$\left(\sqrt{\frac{1-x_S}{x_S}} - \sqrt{\frac{x_S}{1-x_S}}\right) - \frac{(\ldots)}{\sqrt{|\ldots|}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{x_S}}. \qquad (32)$$

В общем случае, если параметр ε не является малым, уравнение (32) сводится к алгебраическому уравнению четвертого порядка, аналитическое определение корней которого представляет определенные трудности. Однако численный анализ показывает (см. рис. 3), что зависимость перевальной точки от параметра ε представляет собой монотонно возрастающую функцию на интервале $(x_0, 1)$, когда ε меняется в пределах от 0 до ∞. Здесь x_0 определяется выражением

$$x_0 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(\ldots)}{\sqrt{(\ldots)^2 + 4|\ldots|}}\right]. \qquad (33)$$

Тогда в соответствии с (31) решение уравнения (33) будет монотонно убывающей функцией t' на том же интервале. Учитывая далее, что правая часть уравнения (32) слабо зависит от значения перевальной точки x_S, это уравнение можно переписать в виде

$$x_S = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(\ldots)/\sqrt{|\ldots|} - \varepsilon/\sqrt{x_S}}{\sqrt{4 + ((\ldots)/\sqrt{|\ldots|} - \varepsilon/\sqrt{x_S})^2}}\right], \qquad (34)$$

который очень удобен для определения значения перевальной точки методом итераций. В частности, при малых $\varepsilon \ll 1$ имеем разложение

$$x_S = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots, \quad x_1 = 2x_0(1-x_0)^{3/2},$$

а при больших $\varepsilon \gg 1$ асимптотика перевальной точки имеет вид

$$x_S = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots$$

Две первые итерации соотношения (34) приводят к аппроксимации перевальной точки, которая оказывается довольно близкой к ее точному значению.

В соответствии с найденным выражением для перевальной точки интеграл (29) оценивается следующим образом:

$$F(x_S)\sqrt{\frac{2\pi}{t'\sqrt{|\ldots|}S''(x_S)}}\exp\{-t'\sqrt{|\ldots|}S(x_S)\}. \qquad (35)$$

На рис. 4 для сравнения приведены профили интегрального слагаемого, рассчитанные как по

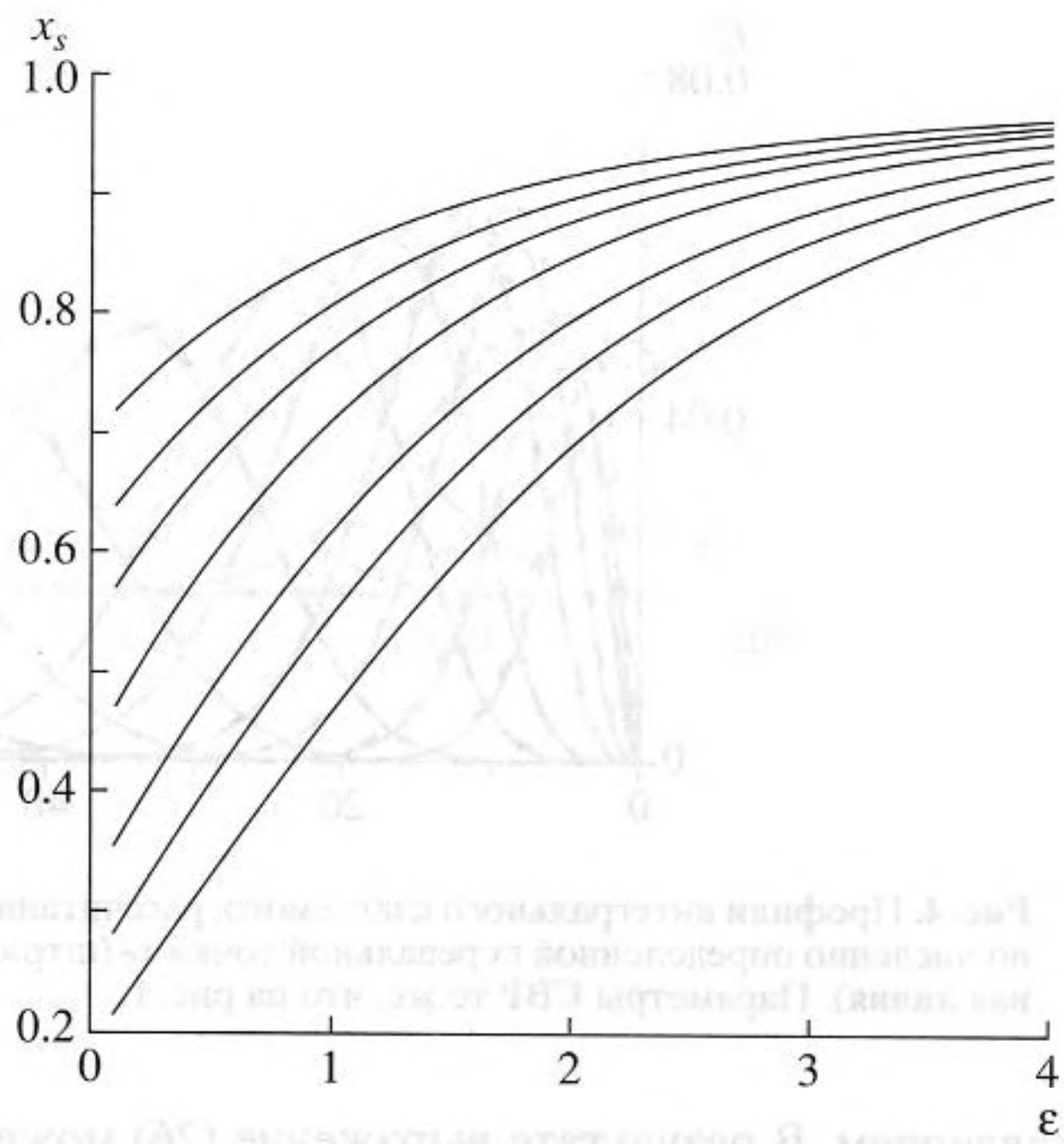

Рис. 3. Зависимость перевальной точки x_S от безразмерного параметра ε для τ_2/τ_1 = 1.01, 1.1, 1.5, 2.0, 3.0, 5.0, 10.0, 100 (g_2/g_1 = 3/7).

асимптотической оценке (35) с использованием точно численно определенной перевальной точки x_S (штриховая линия), так и при точном расчете интеграла (26) (сплошная линия). Из приведенных графиков следует адекватность асимптотической оценки (35) для больших $t'\sqrt{|\ldots|} \gg 1$ при точном определении перевальной точки. Однако если пользоваться приближенным значением перевальной точки после двух итераций, то этого оказывается недостаточно для адекватного описания интегрального слагаемого, так как это приводит к экспоненциальному росту на больших временах.

Таким образом, отсутствие точного аналитического выражения для перевальной точки не позволяет далеко продвинуться в анализе поведения интегрального слагаемого при различных соотношениях параметров СВР.

С целью получения более удобного для анализа выражения воспользуемся следующим приемом. На больших расстояниях $\beta \gg 1$, вдали от фронта ($\beta\langle\tau^{-1}\rangle t' \gg 1$), первая из функций Бесселя в (26) будет давать основной вклад в интеграл вблизи окрестности перевальной точки, поэтому ее аргумент можно разложить в этой окрестности и далее воспользоваться ее асимптотическим пред-

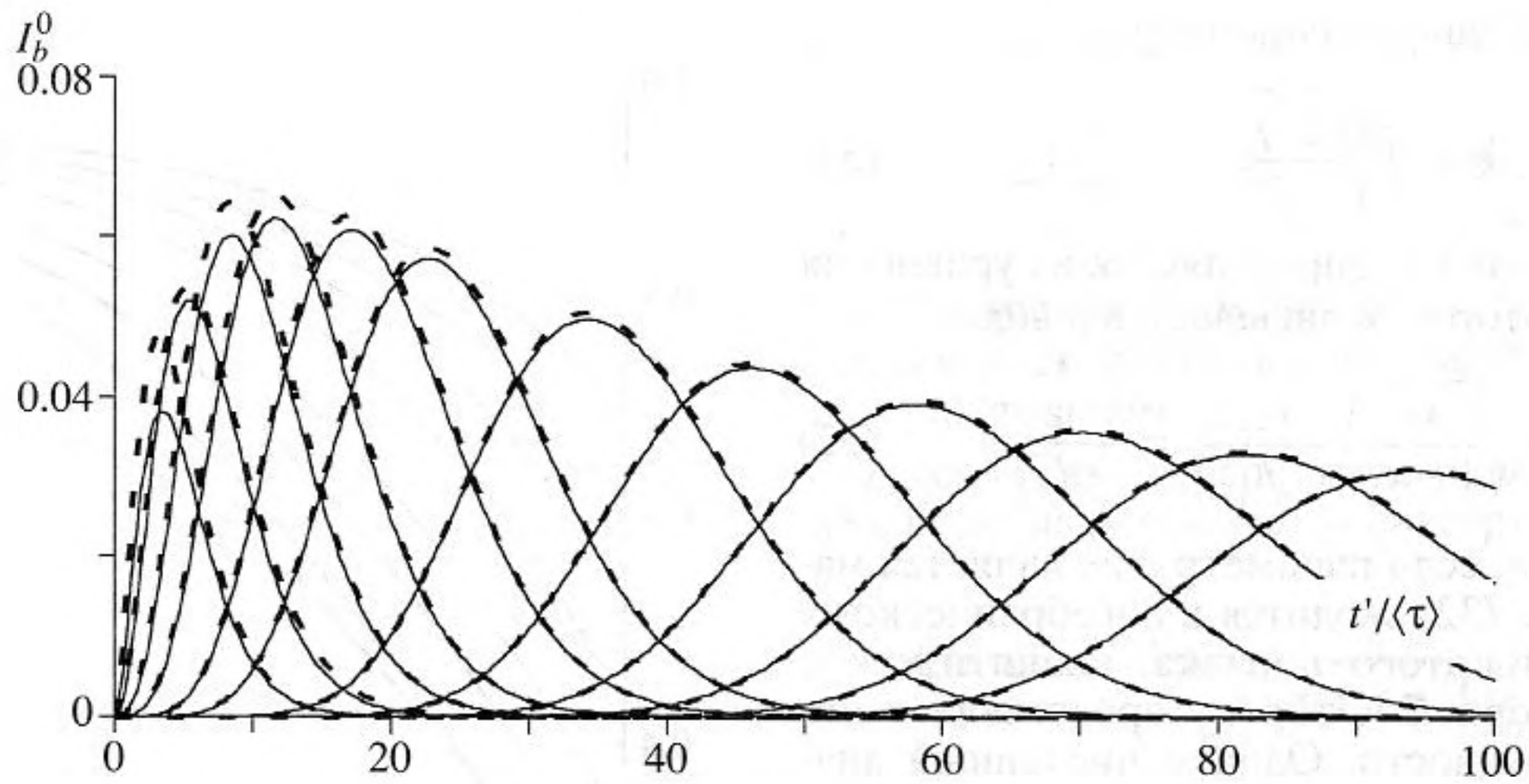

Рис. 4. Профили интегрального слагаемого, рассчитанные по асимптотической оценке (35) с использованием как точно численно определенной перевальной точки x_S (штриховая линия), так и при точном расчете интеграла (26) (сплошная линия). Параметры СВР те же, что на рис. 1.

ставлением. В результате выражение (26) может быть трансформировано к виду

$$I_b^0(t,x) = e^{-\beta}\exp\left\{-\frac{t'}{\tau_1\tau_2\langle\tau\rangle^{-1}}\right\}\sqrt[4]{\beta t'\langle\tau\rangle^{-1}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{|\ldots|}{4\pi}}\exp\{\sqrt{\beta t'\langle\tau^{-1}\rangle x_S}\}\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}\sqrt[4]{x_S}}\times \qquad (36)$$

$$\times\exp\left\{-\xi t'(\ldots)+\xi\sqrt{\frac{\beta t'\langle\tau^{-1}\rangle}{x_S}}\right\}I_1(2t'\sqrt{\xi(1-\xi)|\ldots|}).$$

Поскольку основной вклад в интеграл вносит окрестность перевальной точки, то и предэкспоненциальный множитель следует разложить при значении x_S. Однако с той же точностью нам удобнее сделать замену $\sqrt[4]{x_S}\longrightarrow\sqrt{\xi}$. В этом случае остающийся интеграл может быть вычислен точно, если воспользоваться формулой из [17]:

$$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}e^{-px}I_1(\sqrt{x(a-x)}) = \frac{2}{a}e^{-pa/2}\times \qquad (37)$$

$$\times M_{0,1/2}\left(\frac{a}{2}[\sqrt{p^2+1}+p]\right)M_{0,1/2}\left(\frac{a}{2}[\sqrt{p^2+1}-p]\right).$$

Здесь через $M_{0,1/2}(z)$ обозначена гипергеометрическая функция Уиттекера, связанная с вырожденной гипергеометрической функцией соотношением [18]

$$M_{0,1/2}(z) = ze^{-z/2}{}_1F_1(1,2,z) = \qquad (38)$$

$$= e^{z/2}-e^{-z/2} = 2\,\mathrm{sh}(z/2).$$

Подставляя соотношения (37) и (38) в (36), выражение для интегрального слагаемого (36) можно представить в виде

$$I_b^0(x,t) = \sqrt{\frac{x_S}{\pi}}\frac{\sqrt[4]{\beta t'\langle\tau^{-1}\rangle}}{t'}\exp\left\{-\beta-t'\frac{\langle\tau^{-2}\rangle}{\langle\tau^{-1}\rangle}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\beta t'\langle\tau^{-1}\rangle}\left(\sqrt{x_S}+\frac{1}{\sqrt{x_S}}\right)\right\}\exp\left\{-\frac{t'}{2}\left(\sqrt{\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'x_S}}-(\ldots)\right)\right\}\times$$

$$\times\left[\mathrm{ch}\left\{\frac{t'}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'x_S}}-(\ldots)\right)^2+4|\ldots|}\right\}-\right. \qquad (39)$$

$$\left.-\mathrm{ch}\left\{\frac{t'}{2}\left(\sqrt{\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'x_S}}-(\ldots)\right)\right\}\right].$$

Рассмотрим теперь, насколько адекватным является аналитическое выражение (39) при описании интегрального слагаемого. На рис. 5 для сравнения приведены профили интегрального слагаемого, рассчитанные, согласно соотношению (39), при точном определении перевальной точки (штриховая линия) и полученные путем точного численного расчета интеграла (26) (сплошная линия). Случаи (а) и (б) различаются соотношением времен релаксации $\tau_2/\tau_1 = 1.5$; 7.0 соответственно. Приведенные графики свидетельствуют о хорошем соответствии аналитического выражения (39) точному решению. Однако существенным недостатком выражения (39)

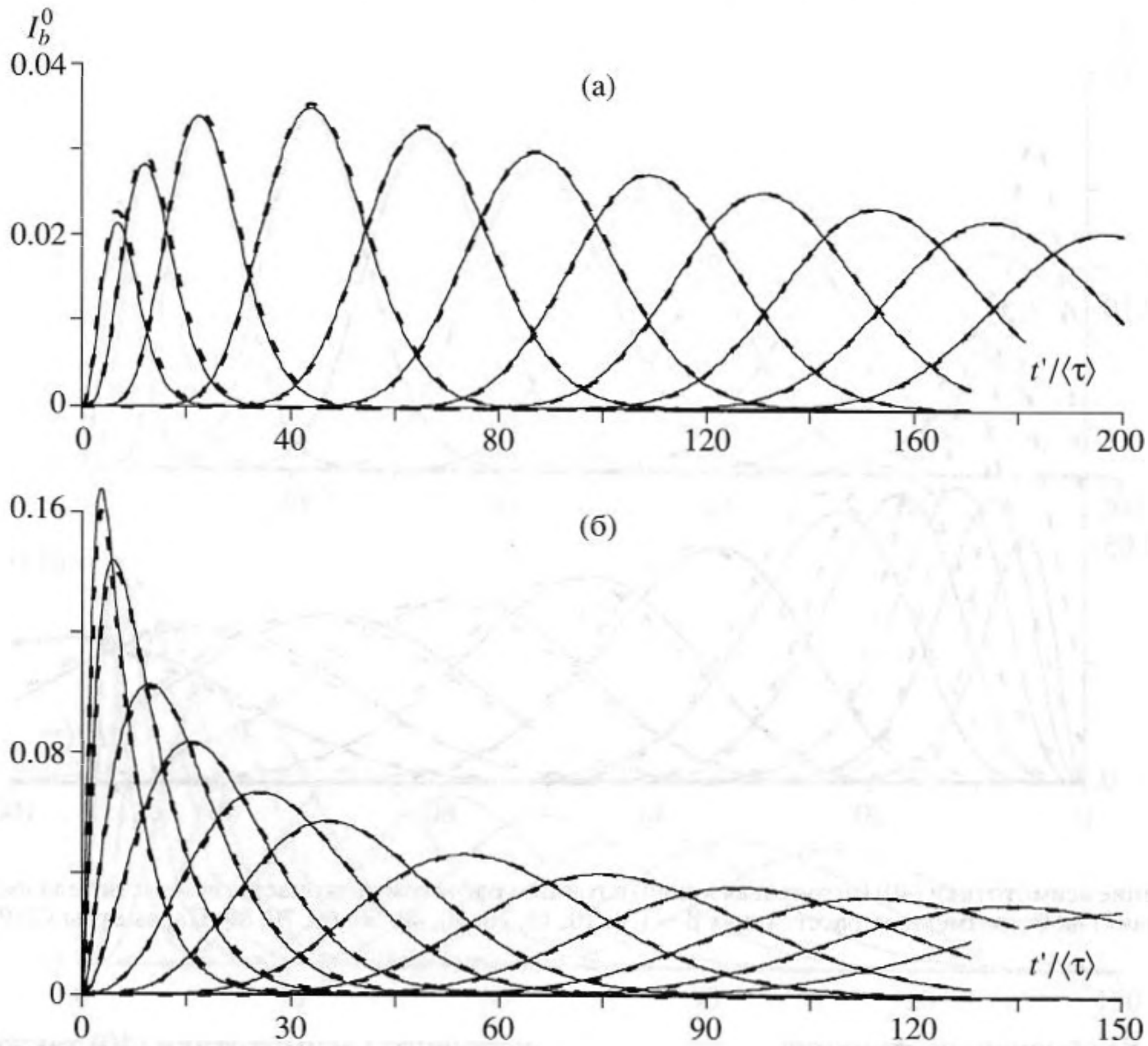

Рис. 5. То же, что на рис. 4, для следующих отношений времен релаксации τ_2/τ_1: а) 1.5; б) 7.0 ($g_2/g_1 = 3/7$). Сплошная линия соответствует точному расчету по (26), штриховая линия – расчет по соотношению (39).

является его чувствительная зависимость от значения перевальной точки. Даже небольшие неточности в ее определении приводят к экспоненциально большим ошибкам на больших пройденных расстояниях.

В этой связи следует отметить, что степенной закон затухания тела импульса на больших расстояниях $\beta \gg 1$ предсказывает и непосредственно асимптотическая оценка исходного интеграла (6) методом перевала [4, 5]. При этом асимптотическая форма импульса в окрестности его максимума описывается выражением

$$I_b^0(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\langle\tau^2\rangle}}\exp\left\{-\frac{(t' - \beta\langle\tau\rangle)^2}{4\beta\langle\tau^2\rangle}\right\}, \quad (40)$$

т.е. определяется вторым моментом СВР. На рис. 6 показано, как соотносится асимптотика (40) с точным расчетом интегрального слагаемого (26) для случая $\tau_2/\tau_1 = 2.0$. Видно, что на участке степенного затухания импульса асимптотика (40) хорошо описывает интегральное слагаемое. Поэтому основной вопрос, который необходимо решить при дальнейшем анализе, заключается в том, каким образом асимптотика (40) может быть получена из точного выражения (18) или асимптотики (39). Попытки ответа на этот вопрос сталкиваются с той сложностью, что из-за отсутствия точного аналитического выражения для перевальной точки различные слагаемые в показателе экспонент в (39) сокращаются не полностью, что в итоге и приводит к экспоненциально большим отличиям от точного решения на больших расстояниях. Чтобы преодолеть указанную трудность, поступим следующим образом. На больших расстояниях и временах выражения (39) и (40) дают асимптотически близкие результаты. Поэтому, выделяя из выражения (39) ее асимптотику больших расстояний и времен и заменяя эту асимптотику ей эквивалентной (40), можно (39) переписать в виде

$$I_b^0(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi\langle\tau^2\rangle}}\frac{\sqrt[4]{\beta t'/\langle\tau\rangle}}{t'/\langle\tau\rangle}\times \exp\left\{-\frac{(t' - \beta\langle\tau\rangle)^2}{4\beta\langle\tau^2\rangle}\right\}H(t', \beta), \quad (41)$$

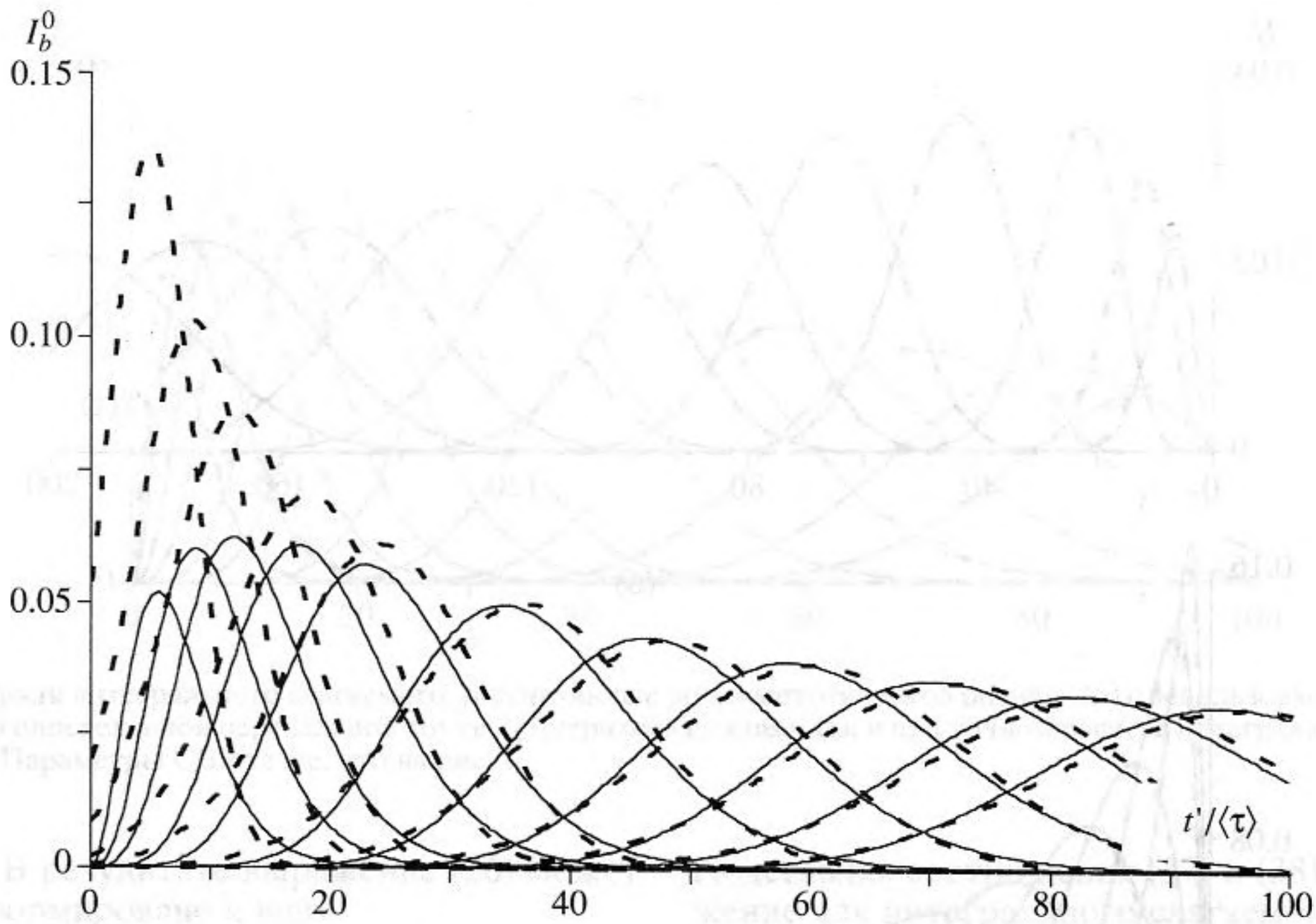

Рис. 6. Сравнение асимптотики (40) (штриховая линия) с точным расчетом низкочастотной части тела импульса по (26) (сплошная линия) на безразмерных расстояниях $\beta = 3, 6, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$. Параметры СВР те же, что на рис. 1.

где через $H(t', \beta)$ обозначена функция

$$H(t', \beta) = \exp\left\{\frac{t'}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'x_S}} - (\ldots)\right)^2 + 4|\ldots|}\right\}\times$$

$$\times\left[\mathrm{ch}\left\{\frac{t'}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'x_s}} - (\ldots)\right)^2 + 4|\ldots|}\right\} - \right. \tag{42}$$

$$\left. - \mathrm{ch}\left\{\frac{t'}{2}\left(\sqrt{\frac{\beta\langle\tau^{-1}\rangle}{t'x_s}} - (\ldots)\right)\right\}\right].$$

При записи предэкспоненциального множителя в (41) было учтено, что асимптотика (40) справедлива в окрестности максимума $t' = \beta\langle\tau\rangle$ и, следовательно, можно эквивалентно заменять t' на $\beta\langle\tau\rangle$ и наоборот. Поэтому предэкспоненциальный множитель в (42) записан так, чтобы сохранить функциональную зависимость (39). Сравнение выражения (41) с точным решением показало, что оно достаточно хорошо воспроизводит поведение тела импульса в окрестности максимума, но при удалении от этого максимума в сторону малых времен точное решение стремится к нулю быстрее. Это означает, что в знаменателе показателя экспоненты асимптотики (40) также можно эквивалентно заменять t' на $\beta\langle\tau\rangle$ и наоборот. Анализ такой возможности показал, что наилучшее совпадение между точным решением и выражением (41) достигается в случае, когда в показателе экспоненты производится следующая замена знаменателя:

$$4\beta\langle\tau^2\rangle \longrightarrow (2t')^{1/8}(t' + \beta\langle\tau\rangle)^{7/8}\langle\tau^2\rangle.$$

После указанной замены поведение тела импульса на больших и малых временах, рассчитанное по соотношению (41), практически совпадает с аналогичным поведением точного решения. Некоторое различие остается только в амплитуде максимума тела импульса на малых расстояниях, где выражение (41) дает несколько завышенные значения по сравнению с точным решением. Сравнение выражения (41) на малых расстояниях $\beta \ll 1$ с разложением (28) показывает, что зависимость от β в (41) оказывается более слабой ($\sim\beta^{1/4}$), чем линейная в (28). Чтобы скорректировать указанную особенность, в выражение (41) был введен дополнительный множитель, который имеет необходимую степень роста $\beta^{3/4}$ при малых $\beta \ll 1$ и выходит на единицу при $\beta \gg 1$:

$$\left(\frac{\beta}{(1+\beta^n)^{1/n}}\right)^{3/4},$$

где параметр $n = 3/4$ был выбран при минимизации отклонения амплитуды максимумов, рассчитанных на основе выражения (41) и точного решения.

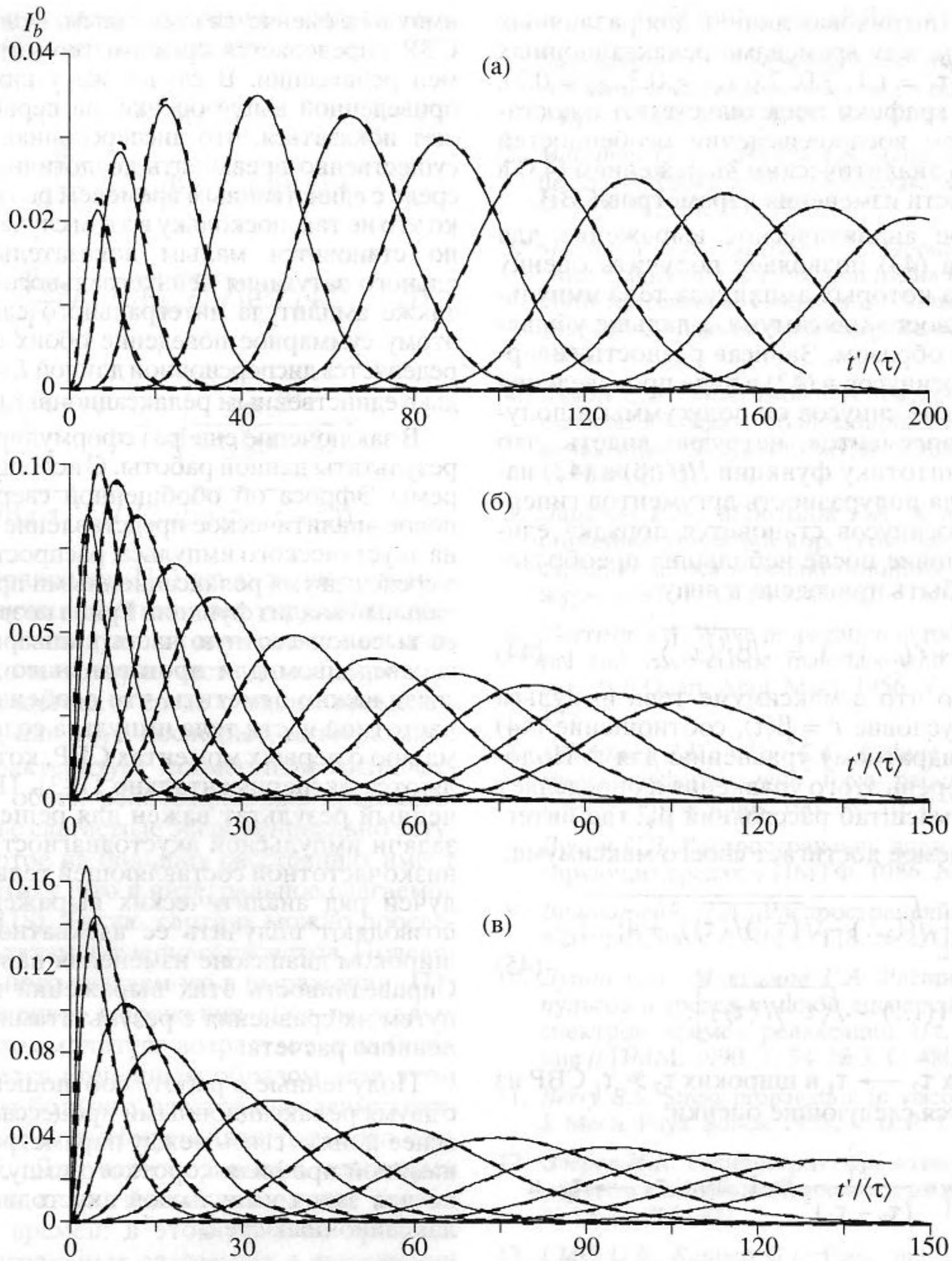

Рис. 7. Профили интегрального слагаемого при соотношениях между временами релаксационных процессов τ_2/τ_1: а) 1.1; б) 3.0; в) 7.0 ($g_2/g_1 = 3.7$). Сплошная линия соответствует точному расчету по (26); штриховая линия – расчет по аналитическому соотношению (43).

Таким образом, с учетом сделанных выше корректировок аналитическое выражение для тела импульса может быть записано в виде

$$I_b^0(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi\langle\tau^2\rangle}}\beta\left(\frac{t'}{\langle\tau\rangle}(1+\beta^{3/4})^{4/3}\right)^{-3/4} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{(t'-\beta\langle\tau\rangle)^2}{(2t')^{1/8}(t'+\beta\langle\tau\rangle)^{7/8}\langle\tau^2\rangle}\right\}H(t',\beta). \quad (43)$$

Важно отметить, что хотя в (43) формально осталась зависимость от перевальной точки через (42), однако теперь она входит лишь в такой комбинации, которая на больших временах и расстояниях не зависит от значения перевальной точки, что позволяет исключить эту зависимость, заменив перевальную точку единицей.

На рис. 7а–7в для сравнения с точным решением (сплошная линия) приведены графики тела импульса, рассчитанные по аналитическому вы-

ражению (43) (штриховая линия), для различных соотношений между временами релаксационных процессов: $\tau_2/\tau_1 = 1.1$; 3.0; 7.0 ($g_1 = 0.3$, $g_2 = 0.7$). Приведенные графики свидетельствуют о достаточно хорошем воспроизведении особенностей тела импульса аналитическим выражением (43) в широкой области изменения параметров СВР.

Полученное аналитическое выражение для тела импульса (43) позволяет получить оценку расстояний, на которых амплитуда тела импульса достигает своего максимума, а дальше убывает степенным образом. Записав разность гиперболических косинусов в (42) в виде произведения гиперболических синусов от полусуммы и полуразности их аргументов, нетрудно видеть, что выход на асимптотику функции $H(t', \beta)$ в (42) начинается, когда полуразность аргументов гиперболических косинусов становится порядка единицы. Это условие после небольших преобразований может быть приведено к виду

$$t'^2|\ldots| + t'(\ldots) - 1 = \sqrt{\beta t' \langle \tau^{-1} \rangle}. \tag{44}$$

С учетом того что в максимуме тела импульса выполняется условие $t' = \beta\langle\tau\rangle$, соотношение (44) сводится к квадратному уравнению для t'. Положительный корень этого уравнения и определяет характерный масштаб расстояний β_*, где интегральное слагаемое достигает своего максимума:

$$\beta_* = \frac{1}{2\langle\tau\rangle|\ldots|}\left[\sqrt{\left((\ldots) - \sqrt{\langle\tau^{-1}\rangle/\langle\tau\rangle}\right)^2 + 4|\ldots|} - \right.$$
$$\left. - \left((\ldots) - \sqrt{\langle\tau^{-1}\rangle/\langle\tau\rangle}\right)\right]. \tag{45}$$

В случае узких $\tau_2 \longrightarrow \tau_1$ и широких $\tau_2 \gg \tau_1$ СВР из (45) получаются следующие оценки:

$$\beta_* \approx \frac{1}{\langle\tau\rangle^2|\ldots|} \approx \frac{\tau_1^2}{(\tau_2 - \tau_1)^2} \gg 1 \text{ при } \tau_2 \longrightarrow \tau_1 \text{ и}$$

$$\beta_* \approx \frac{1}{\langle\tau\rangle\sqrt{|\ldots|}} \approx \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \le 1 \text{ при } \tau_2 \gg \tau_1.$$

Они согласуются с закономерностями поведения интегрального слагаемого, наблюдаемыми на приведенных выше рисунках. В размерных величинах приведенные оценки соответствуют расстояниям

$$x_* \approx \frac{\tau_1^2}{(\tau_2 - \tau_1)^2}\frac{c_\infty \tau_1}{\Delta} \text{ при } \tau_2 \longrightarrow \tau_1 \text{ и}$$

$$x_* \approx \frac{c_\infty\sqrt{\tau_1\tau_2}}{\Delta} \text{ при } \tau_2 \gg \tau_1.$$

Таким образом, дисперсионная длина, на которой экспоненциальный режим затухания короткого импульса сменяется степенным, в случае широких СВР определяется средним геометрическим времен релаксации. В случае же узких СВР, следуя приведенной выше оценке, на первый взгляд может показаться, что дисперсионная длина может существенно превышать аналогичную величину в среде с единственным временем релаксации. Однако это не так, поскольку в этом случае одновременно становится малым показатель экспоненциального затухания неинтегрального слагаемого, а также амплитуда интегрального слагаемого. Поэтому суммарное поведение обоих слагаемых определяется дисперсионной длиной $L = c_\infty\tau/\Delta$ для среды с единственным релаксационным процессом.

В заключение еще раз сформулируем основные результаты данной работы. С использованием теоремы Эфроса об обобщенной свертке получено новое аналитическое представление функции Грина акустического импульса, распространяющегося в среде с двумя релаксационными процессами. Детальный анализ функции Грина позволил записать ее высокочастотную часть в инвариантном виде, справедливом для произвольного СВР. В этой связи важно отметить, что особенности высокочастотной части тела импульса содержат информацию о первых моментах СВР, которые определяются экспериментально [1–3]. Поэтому отмеченный результат важен для решения обратной задачи импульсной акустодиагностики сред. Для низкочастотной составляющей тела импульса получен ряд аналитических выражений, которые позволяют получить ее адекватное описание в широком диапазоне изменения параметров СВР. Справедливость этих выражений подтверждена путем их сравнения с результатами прямого численного расчета.

Полученные в работе соотношения для среды с двумя релаксационными процессами позволяют яснее понять связь между параметрами СВР и динамикой профиля короткого импульса, что важно для задач импульсной акустодиагностики релаксационных сред.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МНТЦ в рамках проекта № 697.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Другой способ преобразования выражения (7) заключается в использовании обычной теоремы о свертке. Для этого запишем (7) в следующем виде:

$$I(t, x) = e^{-\beta}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp e^{pt'} \times$$
$$\times \exp\left\{\beta\frac{g_1\tau_1^{-1}}{p + \tau_1^{-1}}\right\}\exp\left\{\beta\frac{g_2\tau_2^{-1}}{p + \tau_2^{-1}}\right\}.$$

Тогда, после применения теоремы о свертке, получим, используя соотношение (9),

$$I(t,x) = e^{-\beta}\delta(t') +$$
$$+ e^{-\beta - t'/\tau_1}\sqrt{\frac{\beta g_1}{t'\tau_1}} I_1(2\sqrt{\beta g_1 \tau_1^{-1} t'})\theta(t') +$$
$$+ e^{-\beta - t'/\tau_2}\sqrt{\frac{\beta g_2}{t'\tau_2}} I_1(2\sqrt{\beta g_2 \tau_2^{-1} t'})\theta(t') + \qquad (\Pi 1)$$
$$+ e^{-\beta}\int_0^{t'} d\xi e^{-\xi/\tau_1 - (t'-\xi)/\tau_2}\sqrt{\frac{g_1 g_2 \beta^2}{\tau_1\tau_2\xi(t'-\xi)}} \times$$
$$\times I_1(2\sqrt{\beta g_1 \tau_1^{-1}\xi}) I_1(2\sqrt{\beta g_2 \tau_2^{-1}(t'-\xi)}).$$

Структура выражения (П1) ясна: первое слагаемое с дельта-функцией описывает упругий предвестник; каждое из следующих двух слагаемых описывает высокочастотную часть тела импульса, распространяющегося в среде с одним временем релаксации (τ_1 или τ_2), а последнее, интегральное слагаемое характеризует совместный низкочастотный вклад обоих релаксационных процессов. Второе и третье слагаемые экспоненциально затухают, а четвертое на больших расстояниях имеет ту же асимптотику, что и интегральное слагаемое в выражении (18). Такую картину можно проследить по результатам численных расчетов. Поведение интегрального слагаемого в выражении (П1) подобно поведению выражения (18): на малых расстояниях его амплитуда возрастает, а на больших уменьшается степенным образом, при этом его профиль на больших расстояниях асимптотически совпадает с профилем интегрального слагаемого в (15). Для неинтегральных слагаемых можно сделать аналогичный вывод для малых расстояний и времён: в этой области профиль суммы неинтегральных слагаемых в выражении (П1) совпадает с профилем неинтегрального слагаемого в (15). Однако в промежуточной области расстояний профили как интегрального, так и неинтегрального слагаемых в (П1) и (15) различны.

Несмотря на то что поведение слагаемых в (П1) во многом подобно поведению слагаемых в (15), выражение (15) более удобно для анализа, поскольку, например, высокочастотная часть может быть записана в инвариантном виде, справедливом для любого СВР. К достоинствам выражения (П1) следует отнести то, что в него явным образом, в виде неинтегральных слагаемых, входят главные части импульсов, распространяющихся в средах с соответствующими одиночными релаксационными процессами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Максимов Г.А.* О возможностях импульсной акустодиагностики однородных релаксационных сред // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 4. С. 541–550.
2. *Maksimov G.A., Larichev V.A.* Acoustic pulse diagnostics of relaxation media // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 103. № 5. Pt. 2. P. 2881.
3. *Maksimov G.A., Larichev V.A.* Opportuity of acoustic pulse diagnostics of relaxation media // Proceedings of Forth International Congress on Sound and Vibration, 1996, 24–27 june, St. Petersburg, Russia, V. 3. P. 1601–1606.
4. *Дунин С.З., Максимов Г.А.* Распространение импульсов в средах, обладающих спектром времен релаксации // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 6. С. 1048–1055.
5. *Ларичев В.А., Максимов Г.А.* К аналитическому описанию динамики короткого импульса, распространяющегося в релаксационной среде // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 3. С. 367–375.
6. *Morrison J.A.* Wave propagation in rods of Voigt material and visco-elastic materials with three parameter models // Quart. Appl. Math. 1956. V. 14. № 2. P. 153–169.
7. *Achenbach J.D., Chao C.C.* A three parameter visco-elastic matherials with three parameter models // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. P. 245–252.
8. *Дунин С.З.* Распространение волн в слабодиспергирующих средах // ПМТФ. 1986. № 1. С. 138–141.
9. *Вайнштейн Л.А.* Распространение импульсов // Усп. физ. наук. 1976. Т. 118. № 2. С. 339–367.
10. *Дунин С.З., Максимов Г.А.* Распространение импульсов в средах с малой дисперсией скоростей и спектром времен релаксации $1/\tau$. Точное решение // ПММ. 1990. Т. 54. № 3. С. 480–484.
11. *Berry B.S.* Stress propagation in visco-elastic bodies // J. Mech. Phys. Solids. 1958. V. 6. P. 177–185.
12. *Зверев И.К.* Распространение возмущений в вязкоупругом и вязкопластичном стержне // ПММ. 1950. Т. 14. С. 295–302.
13. *Clark G.B., Ruppert G.B.* Plane and spherical waves in Voigt medium // J. Geophys. Res. 1966. V. 71. № 8. P. 2047–2053.
14. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.
16. *Диткин В.А., Кузнецов Т.И.* Справочник по операционному исчислению. М., Л., 1951.
17. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
18. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.

Acoustic Pulse Propagation in a Medium with Two Relaxation Processes. Analysis of the Exact Solution.

V. A. Larichev and G. A. Maksimov

On the basis of the Efros theorem on the generalized convolution, a new analytical representation of the Green's function is obtained for an acoustic pulse propagating in a medium with two relaxation processes. This representation contains three parts which describe, respectively, the acoustic precursor and high and low-frequency components of the pulse body. The high-frequency part of the pulse body may be written in the invariant form which is valid for any relaxation time spectrum (RTS). The low-frequency part of the pulse body has significantly more complicated dependence on the parameters RTS. In this paper, this dependence is analyzed and some analytical expressions for its calculations are obtained. The validity of these expressions is confirmed by comparing with the results of direct numerical calculations.