

О ВКЛАДЕ РЕЗОНАНСНЫХ СТРУКТУР В ФОРМИРОВАНИЕ ОБЛАСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

© 2000 г. М. В. Курбатов

Акустический институт им. Н.Н. Андреева
117036 Москва, ул. Шверника, 4
E-mail: bvp@akin.ru

Поступила в редакцию 29.12.98 г.

В последнее время в ряде работ [1–4] рассматривались различные аспекты эффекта локализации волн. Для одномерного случая падения волны на слой дискретных случайно расположенных неоднородностей в среде без поглощения было показано [5, 6], что область локализации волны стремится к половине слоя при увеличении числа неоднородностей в слое с фиксированной амплитудой каждой неоднородности. В работах [7, 8] обращается внимание на решающую роль резонансных структур (внутри которых поле значительно превышает поле падающей на слой волны) в формировании области локализации. В настоящей работе методом численного моделирования показано, что масштаб локализации определяется крайне незначительным числом реализаций с большими выбросами интенсивности – в приведенном ниже случае это число составляет доли процента от общего числа реализаций, по которым проводится усреднение.

Рассматривается задача о нахождении поля в одномерной структуре со случайными неоднородностями. Гармоническая волна $\exp(ikx)$ падает слева на систему из дискретных неоднородностей, каждая из которых может равномерно и независимо находиться на интервале, равном половине длины волны, интервалы для разных неоднородностей не перекрываются, среднее расстояние между соседними неоднородностями – a . Результирующее поле в среде с дискретными неоднородностями удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\varphi''(x) + k^2 \left(1 + \mu \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \right) \varphi(x) = 0, \quad (1)$$

μ – амплитуда дискретных неоднородностей, n – их число, $k = q(1 + i\beta)$ – волновой вектор, β – поглощение (вначале считаем $\beta = 0$) x_j – координаты неоднородностей, $j = 1, 2, \dots, n$.

Для численного решения задачи можно использовать различные методы. Наиболее экономным с точки зрения затраты машинного вре-

мени (требуемое время растет лишь линейно с ростом n) и при этом абсолютно точным является метод расчета поля с помощью матриц перехода, который заключается в следующем: зная поле между x_m и x_{m+1} – $\varphi(x) = A_m \exp(ikx) + B_m \exp(-ikx)$, можно найти поле между x_{m-1} и x_m – $\varphi(x) = A_{m-1} \exp(ikx) + B_{m-1} \exp(-ikx)$, исходя из непрерывности поля в x_m и скачка первой производной в x_m согласно (1):

$$\varphi'(x_m + 0) - \varphi'(x_m - 0) + k^2 \mu \varphi(x_m) = 0.$$

В результате получается матрица перехода:

$$\begin{aligned} A_{m-1} &= A_m(1 - i\varepsilon) - i\varepsilon B_m \exp(-2ikx_{m+1}), \\ B_{m-1} &= B_m(1 + i\varepsilon) + i\varepsilon A_m \exp(2ikx_{m+1}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon = k\mu/2$.

Поле после прохождения системы n неоднородностей имеет вид: $\varphi(x > x_n) = Ae^{ikx}$, где $A \neq 0$ – некоторое комплексное число.

$\varphi_{new}(x) = \varphi(x)/A$ тоже удовлетворяет (1).

Для нахождения $\varphi_{new}(x)$ воспользуемся следующим методом: используя (2), найдем $\varphi_{new}(x)$ между x_{n-1} и x_n (считая, что при $x > x_n$ поле $e^{ikx} \Rightarrow A_n = 1, B_n = 0$), далее – по $\varphi_{new}(x)$ в этом интервале найдем $\varphi_{new}(x)$ при $x \in (x_{n-2}, x_{n-1})$ и т.д. до промежутка $x < x_1$ $\varphi_{new}(x < x_1) = A_0 e^{ikx} + B_0 e^{-ikx}$, т.е. $A = 1/A_0$.

Найдя A и $\varphi_{new}(x)$ получим искомое поле – решение уравнения (1), которое принимает вид $\exp(ikx)$ слева от слоя, т.е. для $x < x_1$ $\varphi(x) = A \varphi_{new}(x) = \varphi_{new}(x)/A_0$ и величину среднего квадрата модуля поля после усреднения по числу возможных реализаций

$$|\overline{\varphi(x)^2}| = (1/n) \sum_{i=1}^n [\text{Re}^2(\varphi_i(x)) + \text{Im}^2(\varphi_i(x))].$$

Результат численного моделирования совпадает с аналитической зависимостью, полученной в [5, 6], согласно которой для $n\varepsilon^2 \rightarrow \infty$ область локализации стремится к половине слоя, при этом

распределение интенсивности поля в слое стремится к “ступеньке” (см. рис. 1, 2, кривые 1).

На первый взгляд кажется странным, что область локализации волны не зависит от величины неоднородностей слоя. Действительно, для подавляющего большинства конфигураций при увеличении ϵ длина локализации уменьшается. Однако, как показано в [9], всегда существуют такие расположения неоднородностей, что квадрат модуля поля внутри слоя может значительно превышать интенсивность падающей на слой волны (максимальная величина этого отношения – см. [9]). Эти “резонансные” конфигурации очень неустойчивы по отношению к малейшему изменению координат неоднородностей. Численный анализ резонансов для $n = 100$, $\epsilon = 1$, у которых квадрат модуля поля внутри слоя может превышать интенсивность поля падающей волны в $\sim 10^7$ раз показывает, что при изменении координаты какой-либо неоднородности вблизи резонанса на доли процента максимальное отношение квадрата модуля поля внутри слоя к интенсивности падающей волны уменьшается в $\sim 10^3$ раз.

Таким образом, статистический вес “резонансных” конфигураций при увеличении $n\epsilon^2$ резко падает, при этом также резко растет усиление поля в этих структурах, в результате сильно увеличивается роль очень малой доли реализаций, так, что ее вклад при статистическом усреднении в образование “ступеньки” становится решающим.

Рассмотрим случай $n = 60$, $\epsilon = 0.9$. Распределение квадрата модуля поля внутри слоя при усреднении по 5×10^8 реализациям показано на рис. 1 (кривая 1). Если при этом усреднении удалить 5000 самых сильных “резонансов”, которые составляют одну тысячную процента от общего числа реализаций, то распределение квадрата модуля поля внутри слоя станет таким, как изображено на рис. 2 (кривая 2), т.е. длина локализации уменьшится в 2 раза. Если удалить 1% реализаций с самым большим усилением поля внутри слоя, то длина локализации станет равной 1/10 длины слоя.

Введение слабого поглощения β практически не оказывает влияния на нерезонансные структуры, в то же время для достаточно больших n интерференция волн, приводящая к резонансу в случае отсутствия поглощения, разрушается, т.е. происходит энергетическое сложение, а не амплитудное. Как показано в [9], ни для какой конфигурации усиление поля не может превысить некоторой величины, зависящей от ϵ и β . Если эта величина соответствует максимальному усилению поля в среде без поглощения для слоя из n_0 неоднородностей, то при наличии поглощения, очевидно, область локализации волны ни при каком сколь угодно большом n не будет содержать более $\sim n_0$ неоднородностей. Таким образом, при больших n из-за быстрого уменьшения n_0 с увели-

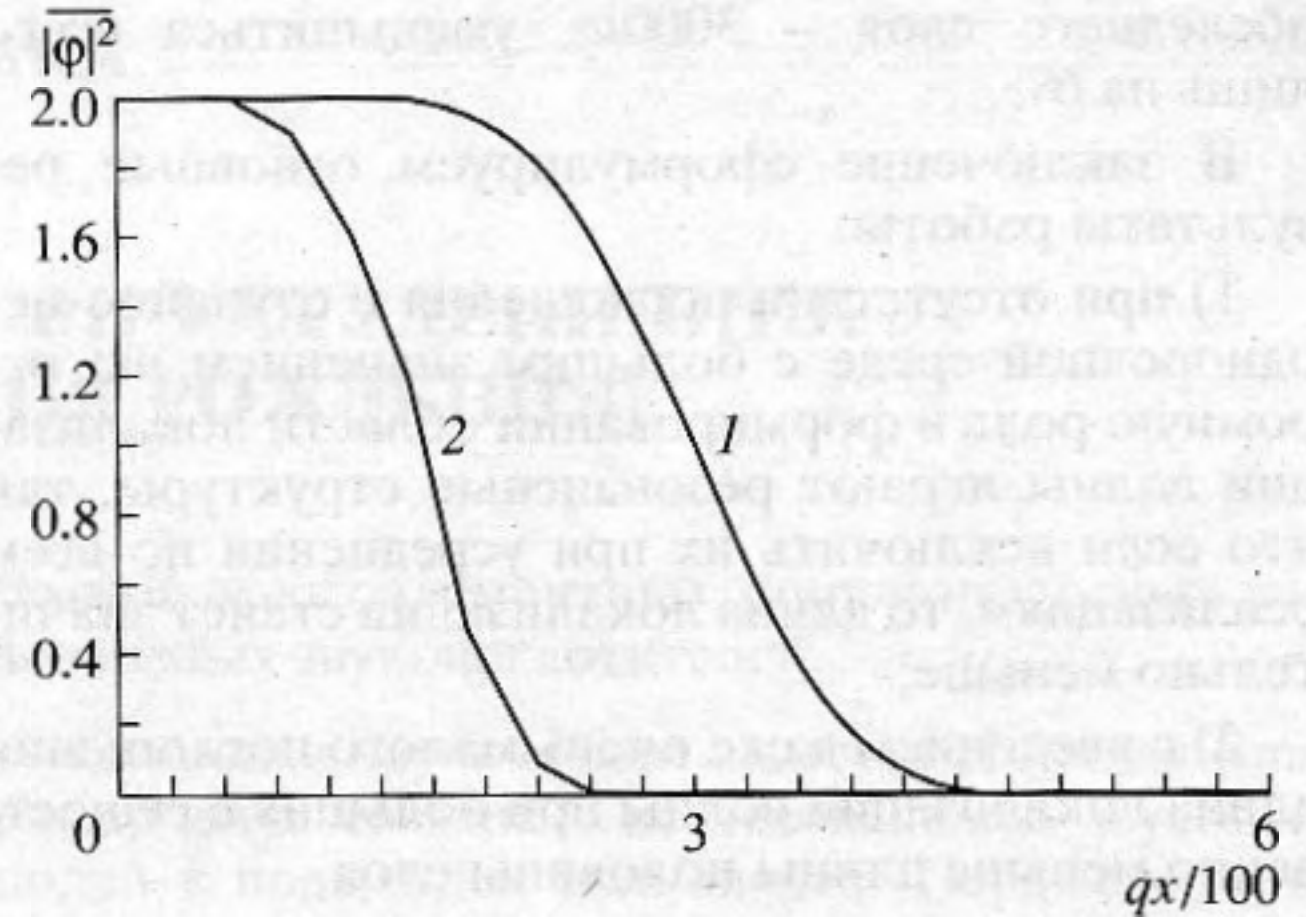


Рис. 1. Распределение интенсивности поля вдоль структуры неоднородностей в среде без поглощения: 1 – результат усреднения по 5×10^8 реализациям, совпадающий с аналитической зависимостью (24) работы [5]; 2 – результат исключения из предыдущего усреднения 5000 самых сильных резонансов. Среднее расстояние между неоднородностями при этом $a = 10/q$, $n = 60$, $\epsilon = 0.9$.

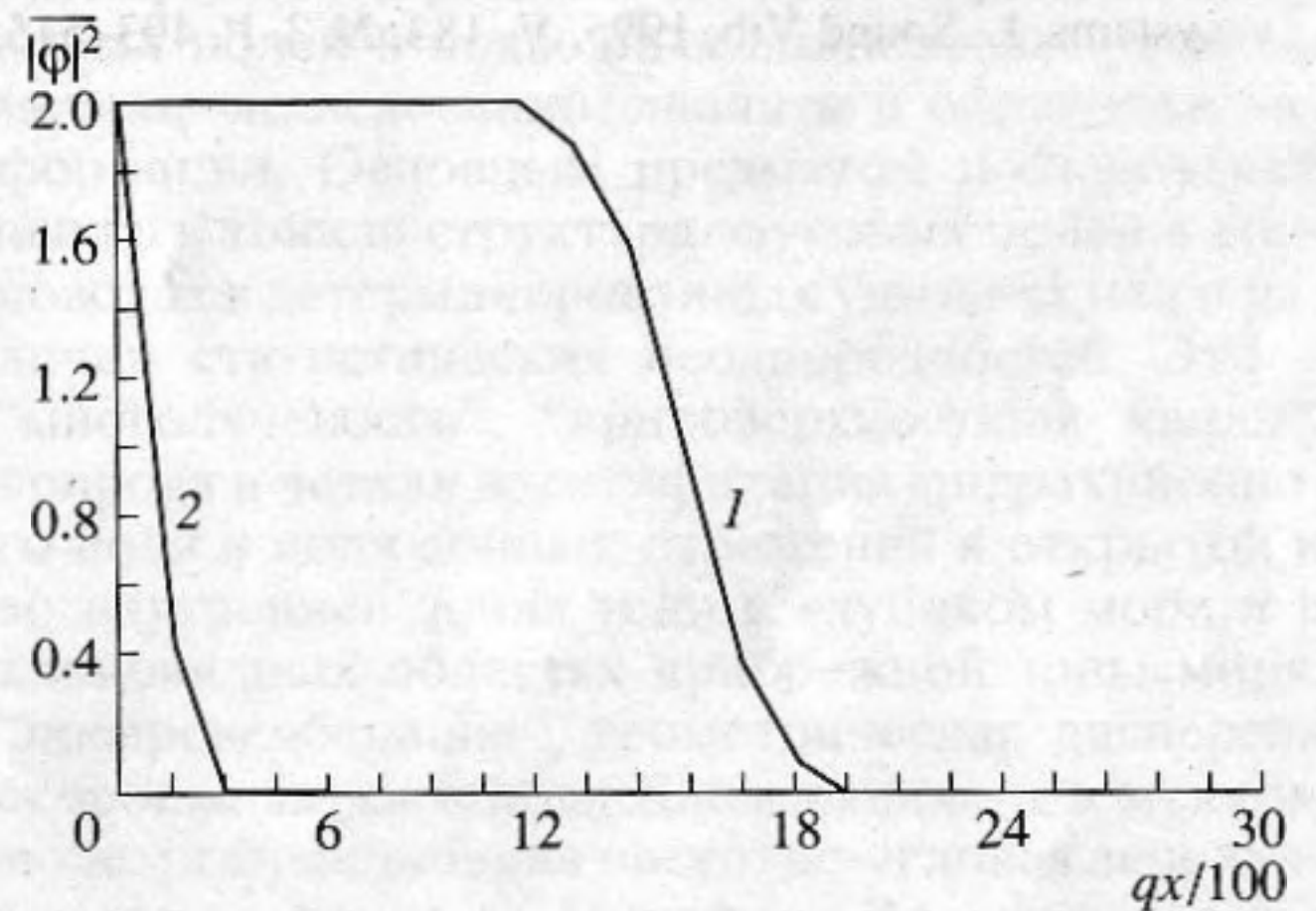


Рис. 2. Распределение интенсивности поля вдоль структуры неоднородностей в случайно-неоднородной среде: 1 – при отсутствии поглощения; 2 – при наличии малого поглощения $\beta = 10^{-5}$. Среднее расстояние между неоднородностями при этом $a = 10/q$, $n = 300$, $\epsilon = 0.9$.

чением β происходит резкое уменьшение длины локализации волны. На рис. 2 приведены результаты численного расчета для $n = 300$, $\epsilon = 0.9$. Среднее расстояние между соседними неоднородностями $a = 10/q$. Кривая 1 изображает пространственное распределение квадрата модуля поля внутри слоя без поглощения. При наличии малого поглощения $\beta = 10^{-5}$ эта зависимость примет вид кривой 2 (рис. 2), т.е. область локализации уменьшится в 10 раз. Заметим, что в однородной среде с таким поглощением интенсивность волны после прохождения расстояния, равного длине

последнего слоя – $3000/q$, уменьшиться всего лишь на 6%.

В заключение сформулируем основные результаты работы:

1) при отсутствии поглощения в случайно-неоднородной среде с большим значением $n\epsilon^2$ огромную роль в формировании области локализации волны играют резонансные структуры, так что если исключить их при усреднении по всем реализациям, то длина локализации станет значительно меньше;

2) с введением даже очень малого поглощения длина локализации волны при больших n существенно меньше длины половины слоя.

Автор выражает благодарность С.А. Рыбаку за стимулирующее обсуждение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 96-02-16561, и гранта Л-96-15-96608.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Castanier M.P., Pierre C.* Lyapunov exponents and localization phenomena in multi-coupled nearly-periodic systems, *L. Sound Vib*, 1995. V. 183. № 3. P. 493–515.
2. *Photiadis D.M.* Fluid loaded structures with one-dimensional disorder, *Applied Mechanics Reviews*, 1996. V. 49. № 2. P. 100–125.
3. *Cha P.D., Morganti C.R.* Numerical statistical investigation on the dynamics of finitely long, nearly periodic chains, *AIAA*, 1994. V. 32. № 11. P. 2269–2275.
4. *Anderson P.W.* "Absence of diffusion in certain random Lattice", *Phys. Rev.*, 1958. V. 109. № 5. P. 1492–1505.
5. *Газарян Ю.Л.* Об одномерной задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями. *ЖЭТФ*. 1969. Т. 56. № 6. С. 1856–1871.
6. *Гельфгат В.И.* Поле точечного источника в случайно неоднородной среде. Одномерная задача. *Акуст. журн.*, 1972. Т. 18. № 1. С. 31–41.
7. *Кляцкин В.И., Саичев А.И.* Статистическая и динамическая локализация плоских волн в хаотически неоднородных средах, *УФН*, 1992. Т. 162. № 3. С. 161–194.
8. *Кляцкин В.И.* Метод погружения в теории распространения волн. М.: Наука, 1986. С. 134.
9. *Курбатов М.В., Рыбак С.А.* О структуре поля в среде с нерегулярно расположенными сосредоточенными неоднородностями. *Акуст. журн.* 1999. Т. 45. № 3. С. 370–375.