

УДК 534.231.1

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ДИФРАКЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВЫСТУПЕ

© 2000 г. В. И. Кондратьев, Ю. С. Крюков

Научно-исследовательский институт прикладной акустики

141980 Дубна-1, а/я 36

E-mail: NIIPA@dubna.ru

Поступила в редакцию 08.02.99 г.

Разработана компьютерная модель для расчетов распространения и дифракции нелинейного акустического импульсного сигнала на неровностях абсолютно жесткой границы. Модель основана на конечно-разностном решении с использованием явной схемы Мак-Кормака начально-краевой задачи для системы нелинейных уравнений газовой динамики. Оценена точность численных расчетов. Проведены вычисления дифракции сигнала на выступах неоднородной границы. Результаты расчетов сопоставлены с оценками по эмпирической теории Маякавы.

В большинстве работ по исследованию дифракции импульсных сигналов используются дифракционные линейные эмпирические теории [1, 2], основанные на разложении импульсного сигнала в ряд Фурье и учете отношения геометрических размеров препятствия к длине волны соответствующей спектральной компоненты сигнала. Хотя данные теории являются определенными приближениями, существует большое количество экспериментальных данных по дифракции сигнала на вертикальных препятствиях, хорошо согласующихся с этими теориями [3].

Цель настоящего исследования заключается в разработке численной конечно-разностной модели для расчетов дифракции сигнала на препятствиях различной формы. Модель основана на численном решении нестационарной начально-краевой задачи для уравнений газовой динамики в полуограниченной области с абсолютно жесткой нерегулярной нижней границей, содержащей различного вида выступы и впадины. В данной работе применена явная конечно-разностная схема Мак-Кормака [4], которая для нелинейных акустических импульсных сигналов является вполне удовлетворительной по скорости вычислений и точности результатов. Данная схема была апробирована в работе [5] для расчетов взаимодействия импульсных сигналов с термиками (областями горячего газа), где вычисления проводились в регулярной области расчетов с ровными однородными границами.

В настоящей работе предлагается и обосновывается метод моделирования для нерегулярной расчетной области с неоднородными границами произвольной конфигурации.

Рассмотрим двумерную полуограниченную область Ω , заполненную однородной воздушной средой (рис. 1). Введем декартовы координаты x, y .

На рис. 1 схематически изображена нерегулярная нижняя граница с точками излома при $x = x_2, x = x_3, x = x_4$. Импульсный сигнал занимает интервал (x_0, x_1) в момент времени $t_0 = 0$. Для описания движения импульсного сигнала заданной формы в двумерной однородной воздушной среде воспользуемся системой нелинейных уравнений для сжимаемой жидкости [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_x V_y)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x V_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y^2 + p)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial((\varepsilon + p)V_x)}{\partial x} + \frac{\partial((\varepsilon + p)V_y)}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ, p, V_x, V_y – физические параметры среды, соответственно плотность, давление, проекции ско-

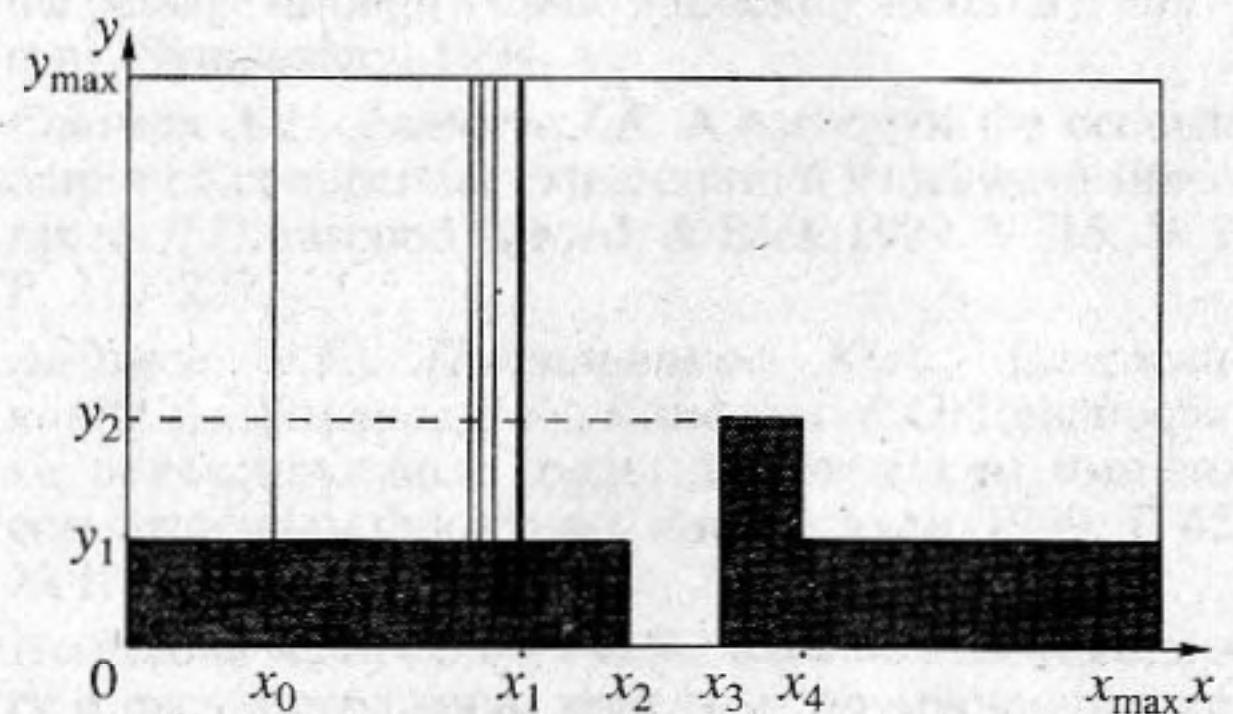


Рис. 1. Схема нерегулярной области расчета.

рости на оси x и y ; $\epsilon = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2}(V_x^2 + V_y^2)$ – полная энергия; γ – отношение удельных теплоемкостей.

Для задачи о движущейся волне необходимо определить начальные условия в момент времени $t_0 = 0$. Пусть при $t_0 = 0$ $V_y(x, y) = 0$, а $V_x(x, y) = u_1(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, т.е. имеем волну с плоским фронтом, бегущую в сторону препятствия. Значения p и ρ в момент $t_0 = 0$ зададим в виде решения для простой бегущей волны в политропном газе [6]:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_x}{a_0} \right)^{\frac{2}{\gamma - 1}}, \\ p &= p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_x}{a_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ_0, p_0 – параметры среды в невозмущенном газе, a_0 – скорость звука в невозмущенном газе.

Граничные условия. Вычисления проводятся в неоднородной кусочно-постоянной области расчета. На нижней неровной границе заданы условия не протекания $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}} = 0$, где $\mathbf{V} = (V_x \cdot i, V_y \cdot j)$, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к нижней границе.

На левой и правой границах области расчета, а также на верхней границе заданы условия отсутствия обратных отражений волн.

Перейдем к безразмерным параметрам $\rho', p', V'_x, V'_y, x', y', z'$, определяя их значения относительно величин физических параметров невозмущенной среды:

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\rho}{\rho_0}; \quad V'_x = \frac{V_x}{a_0}; \quad V'_y = \frac{V_y}{a_0}; \quad p' = \frac{p}{p_0}; \quad x' = \frac{x}{L}; \\ y' &= \frac{y}{L}; \quad t' = \frac{a_0 t}{L}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ_0, p_0, a_0 – плотность, давление и скорость звука в невозмущенной среде; L – некоторый характерный линейный размер.

Используя соотношения (3), а также учитывая равенство $\rho_0 a_0^2 = \gamma p_0$, перепишем систему уравнений (1) в компактном векторном виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t'} + \frac{\partial F_x}{\partial x'} + \frac{\partial F_y}{\partial y'} = 0, \quad (4)$$

где

$$q = \begin{bmatrix} \rho' \\ \rho' V'_x \\ \rho' V'_y \\ \frac{p'}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{\rho'(V_x'^2 + V_y'^2)}{2} \end{bmatrix};$$

$$F_x = \begin{bmatrix} \rho' V'_x \\ \rho' V_x'^2 + \frac{p'}{\gamma} \\ \rho' V'_x V'_y \\ V'_x \left(\frac{p'}{\gamma - 1} + \frac{\rho'(V_x'^2 + V_y'^2)}{2} \right) \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$F_y = \begin{bmatrix} \rho' V'_y \\ \rho' V'_x V'_y \\ \rho' V_y'^2 + \frac{p'}{\gamma} \\ V'_y \left(\frac{p'}{\gamma - 1} + \frac{\rho'(V_x'^2 + V_y'^2)}{2} \right) \end{bmatrix};$$

Введем равномерную прямоугольную сетку во всей области расчета $\Omega_{j,i} = (x_j = x_{j-1} + \Delta x; y_i = y_{i-1} + \Delta y)$, а также определим дискретизацию процесса по времени $t^n = t^{n-1} + \Delta t$, где $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ – интервалы дискретизации по пространственным координатам и, соответственно, по времени. Для численного решения гиперболической системы уравнений (4) с начальными и граничными условиями воспользуемся явной конечно-разностной схемой Мак-Кормака [4]:

$$\begin{aligned} q_{j,i}^* &= q_{j,i}^n - \frac{\Delta t'}{\Delta x'} (F_{xj+1,i}^n - F_{xj,i}^n) - \\ &\quad - \frac{\Delta t'}{\Delta y'} (F_{yj,i+1}^n - F_{yj,i}^n), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} q_{j,i}^{n+1} &= \frac{q_{j,i}^n - q_{j,i}^*}{2} - \frac{\Delta t'}{2\Delta x'} (F_{xj,i}^* - F_{xj-1,i}^*) - \\ &\quad - \frac{\Delta t'}{2\Delta y'} (F_{yj,i}^* - F_{yj,i-1}^*). \end{aligned}$$

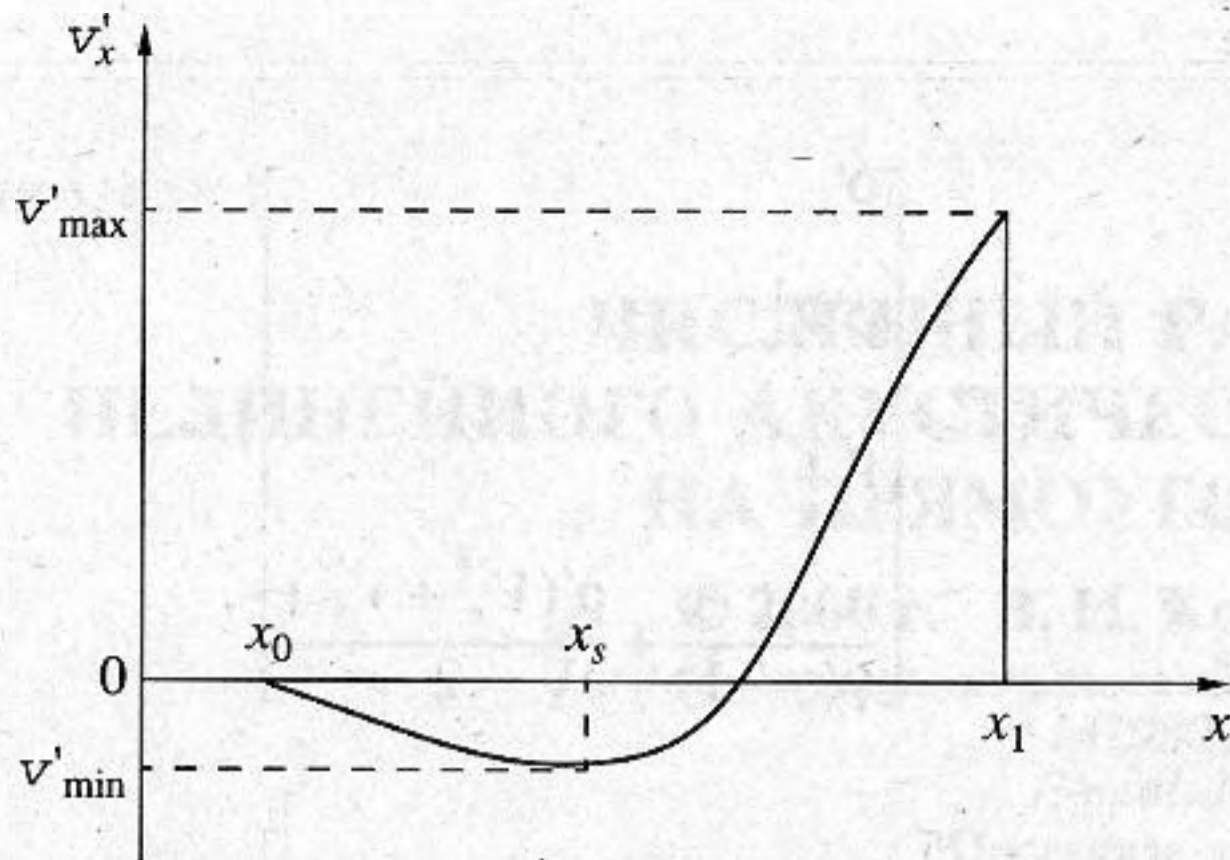


Рис. 2. Профиль скорости начального нелинейного импульсного сигнала.

Для данной схемы существует ограничение на величину шага сетки $\Delta t'$ согласно условию Куранта

$$\frac{\Delta t'}{\Delta x'} \left(\sqrt{V_x'^2 + V_y'^2} + a \right) \leq 1, \quad (7)$$

где a – локальная скорость звука.

Условия на свободных границах области, где отсутствуют “обратные” волны, сводятся в конечно-разностной интерпретации к равенству градиентов соответствующих параметров на смежных шагах сетки [7]. Эти условия для каждого из физических параметров на вертикальных левой и правой границах и горизонтальной верхней границе имеют вид:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{j+1}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{i+1}, \quad (8)$$

где φ – произвольный физический параметр p , ρ , V_x , V_y . На нижней границе, состоящей из вертикальных и горизонтальных изломов, задаются условия непротекания для соответствующих компонент скорости: $V_{xj,i} = -V_{xj+2,i}$ для горизонтальной границы; $V_{yj,i} = -V_{yj,i+2}$ для вертикальной границы.

Учитывая тот факт, что при наличии ступенчатых профилей нелинейных импульсов, разностная аппроксимация дифференциальных уравнений (4) может приводить к появлению сильной диффузии, сглаживающей ступенчатый профиль импульса, в данном случае применен метод коррекции потоков, разработанный Борисом и Буком [8]. Суть метода заключается в том, что за счет введения специального ограничения антидиффузии в численном решении не возникает новых минимумов и максимумов, а имеющиеся экстремумы не усиливаются. Заметим, что при использовании метода коррекции потоков рекомендуется исполь-

зовать более сильное условие устойчивости схемы по сравнению с выражением (7):

$$\left(\sqrt{V_x'^2 + V_y'^2} + a \right) \frac{\Delta t'}{\Delta x'} < 0.4. \quad (9)$$

На основе вышеописанного метода разработана программа на языке Фортран-90 в среде HP-UX, X11 для рабочей станции типа HP-715 и в среде Power Fortran для Windows 95 в среде IBM-PC совместимых компьютеров. Для оценки точности вычислений проведен пример расчета бегущего импульса вдоль идеальной, абсолютно жесткой плоскости в полуограниченной области. Начальная форма распределения V'_x – компоненты скорости импульса в момент времени t_0 задавалась в виде ступенчатой функции с задним фронтом, спадающим вдоль координаты x по параболе вида $V'_x = A(x - x_s)^2 - \alpha x$ при $x < x_1$ согласно рис. 2, где A , α – заданные коэффициенты.

В начальный момент времени t_0 передний фронт импульса задавался в области расчета на расстоянии x_1 , а задний фронт – на расстоянии x_0 . Сферический импульс рассматривался в дальней зоне от источника, так что передний фронт в заданной области расчета задавался плоским. Плотность и давление в импульсе рассчитывались через значения относительной скорости V'_x по формуле (2).

Параметры области расчета $y_{\max} = 20$ м; $x_{\max} = 60$ м. Ширина ячейки прямоугольной конечно-разностной сетки равна 0.2 м. Шаг расчетов по времени $\Delta t' = \frac{\Delta t}{aL}$, где $L = 100$ м; $a = 330$ м/с выбирался автоматически, исходя из условия (9). На основе проведенных численных расчетов на рис. 3 получена кривая изменения максимума амплитуды сигнала с расстоянием. Согласно рис. 3а, I максимальная амплитуда сигнала убывает по закону, хорошо аппроксимируемому асимптотической формулой [6]:

$$p \approx \frac{p_0}{r \ln \left(\frac{r}{\alpha} \right)} \quad (\text{линия, обозначенная цифрой 2}),$$

где $\alpha = 9.31$ – константа; r – расстояние от источника до точки приема сигнала; p_0 – значение максимальной амплитуды сигнала на некотором характерном расстоянии от источника.

Соответствующие профили импульсного сигнала, распространяющегося вдоль ровной жесткой поверхности, вычисленные по конечно-разностным формулам (6) приведены на рис. 3б, где I – профиль сигнала на первом шаге расчета при расположении переднего фронта импульса на расстоянии 30 м от левой границы области расче-

та; 2 – профиль сигнала на 320-м шаге расчета, что соответствует расположению переднего фронта импульса на расстоянии 58 м от левой границы области расчета. Относительная длина импульса l увеличивается незначительно на данной дистанции и составляет величину 1.1, что согласуется с

оценками работы [6] по формуле $l \approx \sqrt{\ln \frac{\Delta r}{\alpha}}$, где $\Delta r = r_1 - r$ – разность расстояний, проходимых импульсом.

Таким образом, выполнение условий устойчивости численной схемы, а также пример численного расчета распространения сферического импульса в дальней зоне от источника вблизи от абсолютно жесткой поверхности, показывают приемлемую точность численной модели.

С помощью описанной выше компьютерной модели было проведено исследование дифракции нелинейного импульса, движущегося вдоль плоской поверхности на прямоугольном выступе, высотой 1.6 м и шириной 0.4 м, а также дифракции нелинейного импульса, движущегося вдоль плоской поверхности на впадине шириной 1.4 м и глубиной 1 м, сочлененной с прямоугольным выступом. Однако вначале приведем результаты сравнения формы и спектра сигнала за выступом, полученные при расчетах по конечно-разностной модели и по эмпирической теории Маякавы. Для расчетов по теории Маякавы была использована дифракционная формула для прямоугольного препятствия конечных размеров [1]:

$$p_d = p_0 \frac{1}{\sqrt{3.16}} \frac{\text{th}(2\pi N_1)^{1/2} \text{th}(2\pi N_2)^{1/2}}{(2\pi N_2)^{1/2} (2\pi N_2)^{1/2}}, \quad (10)$$

где $N_1 = 2 \frac{\delta_1}{\lambda}$, $N_2 = 2 \frac{\delta_2}{\lambda}$ – числа Френеля, вычисленные для δ_1, δ_2 соответственно. δ_1 – разность траекторий прямого и дифракционного сигналов при дифракции на левом углу выступа. δ_2 – разность траекторий прямого и дифракционного сигналов при дифракции на правом углу выступа. При расчетах импульсный сигнал предварительно с помощью преобразования Фурье представлялся в виде суммы спектральных компонент. Для каждой спектральной компоненты применялась формула (10). Затем для спектральных компонент дифракционного сигнала p_d с помощью обратного преобразования Фурье вычислялся импульсный сигнал за препятствием.

Результаты расчетов изменения уровней относительного давления в фиксированной точке наблюдения за препятствием, полученные по конечно-разностной модели –1 и по модели Маякавы –2 приведены на рис. 4а. На рис. 4б приведены уровни спектральных плотностей сигналов: вычисленного по конечно-разностной модели –1 и

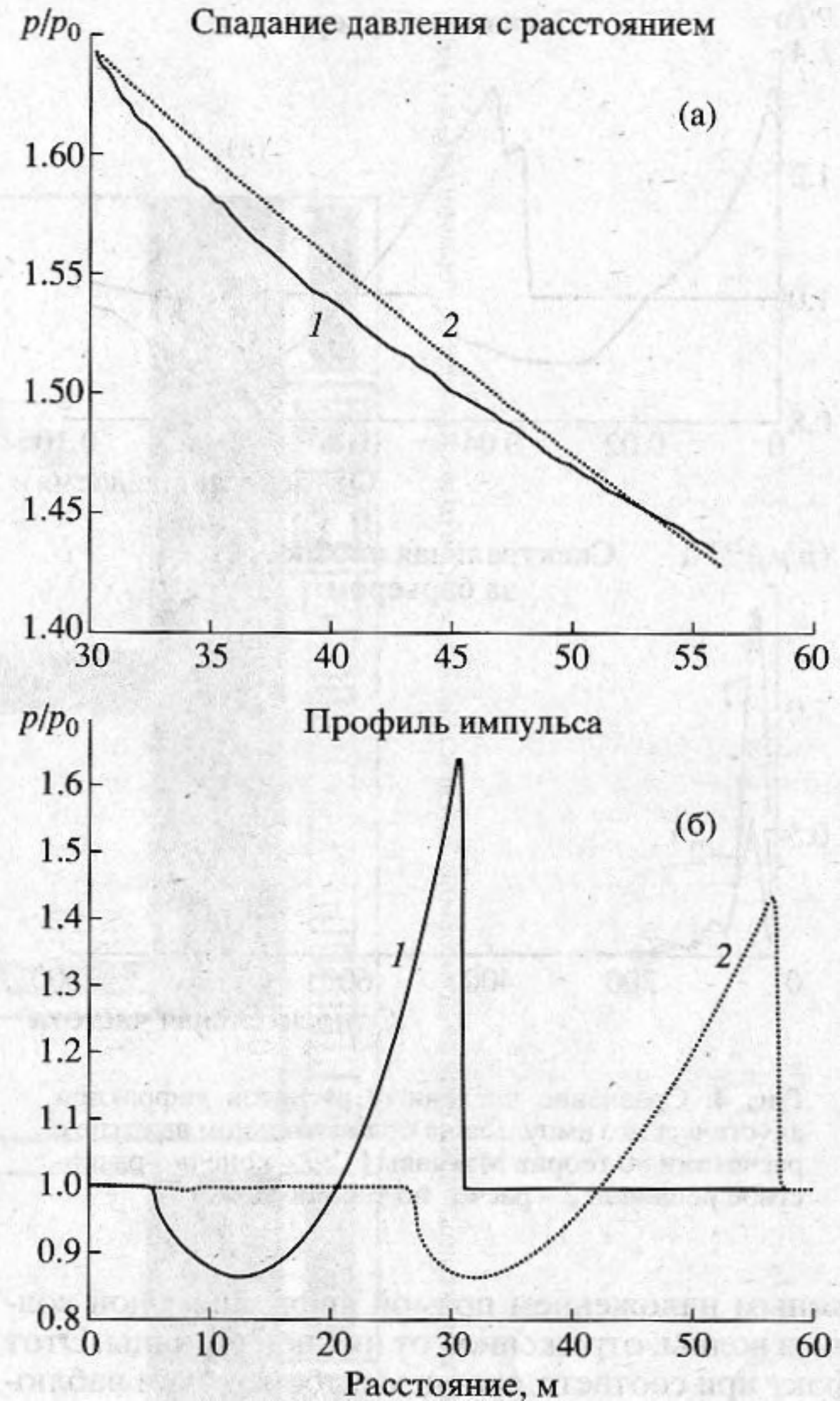


Рис. 3. Сравнение точности расчетов для частного случая ровной жесткой поверхности.

а) Изменение относительного давления с расстоянием: 1 – конечно-разностное решение; 2 – асимптотическое решение по формуле Ландау [6].

б) Изменение формы импульса с расстоянием: 1 – профиль импульса на первом шаге расчета; 2 – профиль импульса на 320 шаге расчета.

по теории Маякавы –2. Точка наблюдения находилась на расстоянии 1 м от выступа на высоте 1 м от жесткой поверхности. Рис. 4а показывает достаточно хорошее совпадение уровней сигналов в зоне сжатия импульса, где относительные давления в обоих случаях составляют значения 1.35. В зоне разряжения импульса теория Маякавы дает несколько большие значения относительного давления по сравнению с конечно-разностной моделью, соответственно, 0.89 и 0.85. Следует отметить, что за барьером форма импульса, вычисленного по конечно-разностной модели, имеет два локальных максимума в зоне сжатия, что связано с вза-



Рис. 4. Сравнение численных расчетов дифракции акустического импульса на прямоугольном выступе с расчетами по теории Маякавы [1]: 1 – конечно-разностное решение; 2 – расчет по теории Маякавы.

имным наложением прямой дифракционной волны и волны, отраженной от нижней границы. Этот факт при соответствующем выборе точки наблюдения подтверждается многочисленными экспериментальными данными [3, 9]. Спектральный состав сигналов импульсов, вычисленных по двум разным моделям, имеет близкие значения, причем относительные частоты максимумов спектров совпадают (рис. 4б).

Преимущество конечно-разностной модели заключается в том, что она позволяет отображать процесс дифракции не в отдельной точке наблюдения, а во всей области расчета в целом в последовательные моменты времени. Компьютерная модель выполнена в виде интерактивной оболочки, позволяющей контролировать процесс дифракции визуально. На экран монитора выводится распределение относительного давления p/p_0 во всей области расчета в последовательные моменты времени. Относительное давление изображается в виде цветовой палитры, либо в виде изолиний. На рис. 5–6 изображены изолинии относительного давления в последовательные моменты относительного времени $t' = 0.09, 0.14$. На каждом из приведенных рисунков, являющихся твердыми копиями экрана монитора, изображено

следующее. В основном окне приведены изолинии относительного давления импульса в области расчета, изменяющегося от минимальных значений 0.6 до максимальных значений 1.7. Нижняя граница области расчетов изображена серым цветом. В крайнем нижнем правом окне рисунка на темном фоне отображается момент относительного времени, для которого получено соответствующее распределение давления.

Рассмотрим теперь результаты расчетов. На рис. 5 приведены картины изолиний процесса дифракции нелинейного импульса на прямоугольном выступе. В момент относительного времени $t' = 0.09$ передний фронт набегающего импульса доходит до правой границы прямоугольного выступа, а от левой границы выступа формируется отраженная волна, распространяющаяся в обратном направлении (рис. 5а). Максимальная величина относительного давления переднего фронта импульса вверху над выступом составляет 1.539, а в отраженной волне 1.651. Дальнейший процесс дифракции хорошо виден на следующем рис. 5б, где изображено распределение давления в момент времени $t' = 0.14$. Здесь фронты двух дифракционных волн – отраженной от левой границы выступа и отошедшей от правого верхнего угла препятствия – имеют четкие очертания в виде сгущения изолиний. Максимум давления в отраженной волне наблюдается внизу у поверхности, где давление равно 1.3. Следует отметить, что отраженная волна бежит по зоне разряжения прямого импульса, поэтому ее интенсивность быстро уменьшается. Форма импульса давления в отраженной волне в основном повторяет форму импульса прямой волны с небольшим растяжением переднего фронта, что взаимосвязано с размерами препятствия. При этом над выступом образовалась зона разряжения со значением давления 1.03. Максимальное давление над препятствием в исходном импульсе равно 1.49. Давление на фронте отошедшей волны составляет 1.32. По мере распространения исходный импульс проходит препятствие, как бы отрываясь от него. При этом, отошедшая волна, отражаясь от нижней абсолютно жесткой границы, образует новую волну, изображенную на рис. 5б за выступом внизу в виде сгущения изолиний, давление в которой 1.36. С течением времени отраженная волна догонит исходный импульс и их фронты сольются. Перед выступом образовалась зона разряжения со значениями давления 0.88.

На рис. 6 приведены картины изолиний процесса дифракции нелинейного импульса на прямоугольном выступе, перед которым находится выемка. При $t' = 0.09$ передний фронт набегающего импульса доходит до правой границы прямоугольного выступа, а от левой границы выступа формируется отраженная волна, взаимодействующая с выемкой (рис. 6а). Максимальная величина

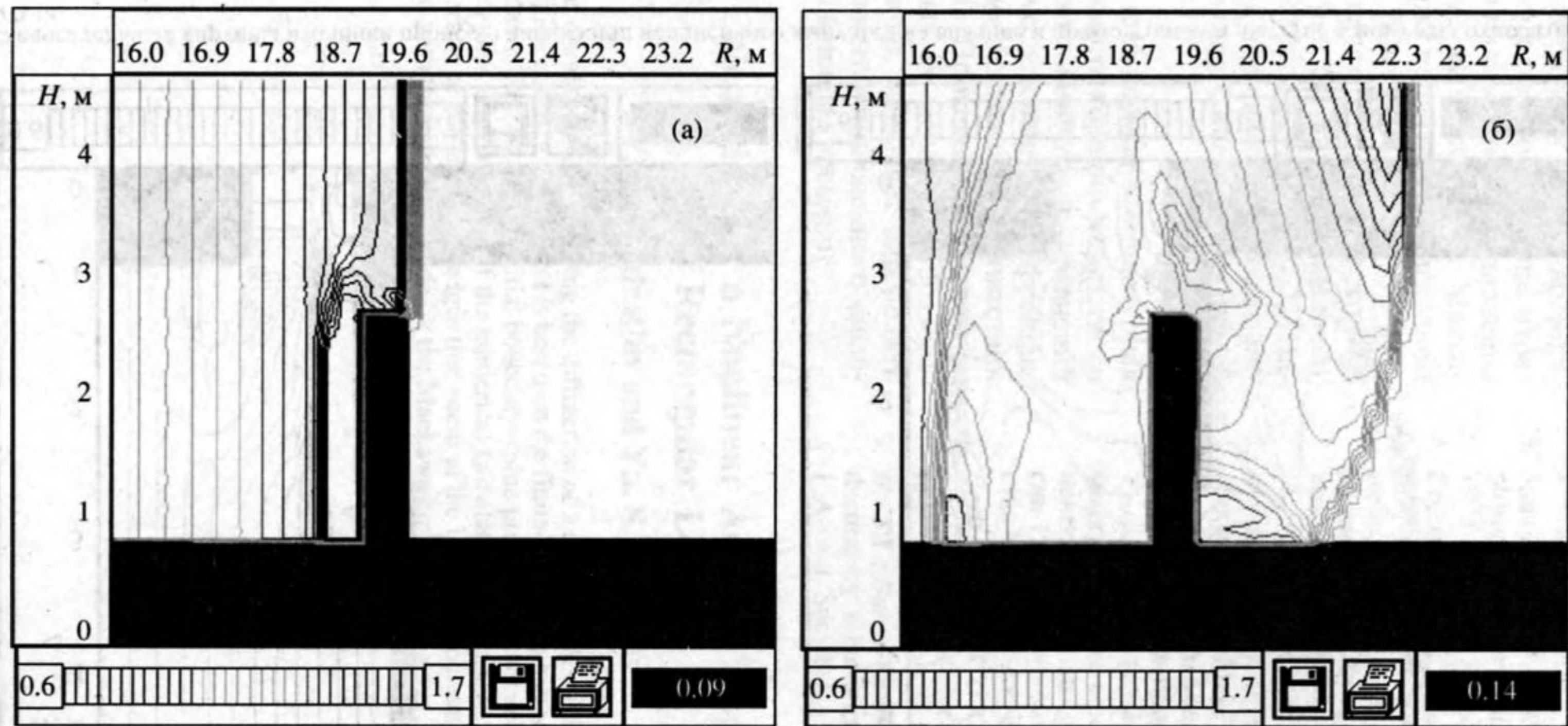


Рис. 5. Последовательные картины изолиний процесса дифракции нелинейного импульса на прямоугольном выступе в моменты относительного времени 0.09 и 0.14.

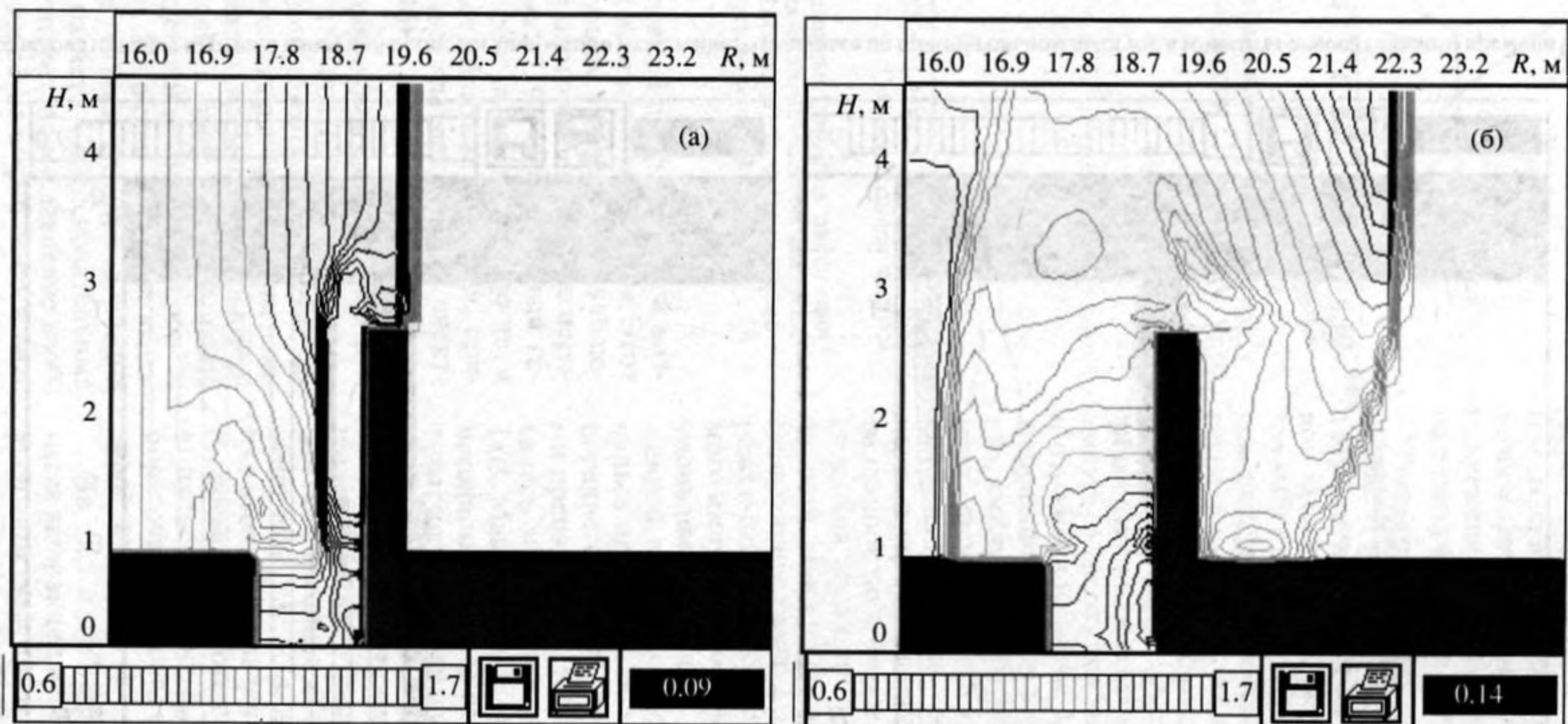


Рис. 6. Последовательные картины изолиний процесса дифракции нелинейного импульса на впадине и прямоугольном выступе в моменты относительного времени 0.09 и 0.14.

относительного давления внутри выемки перед выступом составляет 1.65. В момент времени $t' = 0.14$ (рис. 6б) максимум давления в отраженной волне наблюдается также внизу у поверхности, однако давление равно 1.19. При этом внутри выемки давление остается равным 1.54 и наблюдается направленное вверх распространение отраженной от дна выемки волны. Значение давления в зоне разряжения над выступом 0.99. Максимальное давление сверху препятствия в исходном импульсе равно 1.49. Давление на фронте отошедшей волны составляет 1.26, что несколько меньше, чем в случае рис. 5б. За выступом внизу у жесткой границы давление составляет 1.25. Наличие выемки, в целом, приводит к снижению интенсивности дифракционной волны, образуемой за уступом.

Таким образом, разработанная компьютерная модель на основе прямого конечно-разностного решения системы газодинамических уравнений позволяет выполнять исследования по дифракции нелинейного импульсного сигнала на препятствии произвольной формы. Проведенное численное моделирование раскрывает механизм образования дифракционных волн, позволяет определить особые точки повышенного и пониженного давления и динамику их изменения во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maekawa Z.* Noise reduction by screens // *Appl. Acoust.* 1968. V. 1. P. 157–173.
2. *Medwin H., Childs E., Jepsen G.M.* Impulse studies of double diffraction: a discrete Huygens interpretation // *J. Acoust. Soc. Am.* 1982. V. 72. P. 1005–1013.
3. *Saunders D.J., Ford R.D.* A study of the reduction of explosive impulses by sized barriers // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 94. № 5. P. 2859–2875.
4. *Зосимов В.В., Кондратьев В.И.* Вихреобразование при распространении интенсивного звукового импульса вдоль плоской и неровной жесткой поверхности // Докл. 10 Юбилейной научно-технической конференции по аэроакустике (Суздаль 1992 г.). М.: ЦАГИ. 1992. Т. 1. С. 5–8.
5. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкости. М.: Мир, 1991. Т. 2.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
7. *Крюков Ю.С.* Вычисление распространения сейсмоакустических волн в упругих средах явным конечно-разностным методом / Сборник трудов 5 сессии РАО "Проблемы геоакустики: методы и средства". М.: Изд. Акуст. Инст. 1996. С. 38–41.
8. *Boris J.P., Book D.K.* Finite-difference techniques for vectorized fluid dynamics calculations // *J. Comput. Phys.* 1976. V. 16. P. 85–129.
9. *Ho S.T., Busch-Vishniak I.J., Blackstock D.T.* Noise reduction by a barrier having a random edge profile // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. V. 101. № 5. Pt. 1.

Numerical Calculation for a Nonlinear Acoustic Impulse Diffracted by a Rectangular Ledge

V. I. Kondrat'ev and Yu. S. Kryukov

A computer model is developed for describing the diffraction of a nonlinear acoustic impulse by the irregularities of a perfectly rigid boundary. The model is based on the finite-difference method with the use of the MacCormack explicit scheme for solving the initial boundary-value problem formulated for a system of nonlinear equations of gas dynamics. The accuracy of the numerical calculations is estimated. The calculations are performed for the diffraction of the signal by ledges that occur at the irregular boundary. The results of the calculations are correlated with the estimates made by the Maekawa empirical theory.