

УДК 534.222

ВОЛНОВОДНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

© 2000 г. Ю. Н. Маков

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет

119899 Москва, Воробьевы горы

E-mail: makov@acs364.phys.msu.su

Поступила в редакцию 17.12.99 г.

Теоретически показана возможность волноводного распространения звуковых пучков при компенсации дифракционной расходимости нелинейной рефракцией. Полученное стационарное по продольной координате решение нелинейного уравнения для звукового пучка (уравнения Хохлова–Заболотской) описывает характерный дугообразный волновой профиль пучка и самолокализованное распределение по поперечной координате пиковых значений этого профиля. Обсуждаются физические и математические особенности данного явления в нелинейной акустике в сопоставлении с хорошо известным аналогом в нелинейной оптике. Предложена схема экспериментальной реализации волноводного распространения акустических пучков.

На начальном этапе исследований нелинейных явлений в оптике и физике плазмы было дано [1, 2] теоретическое обоснование возможности волноводного (или самолокализованного по поперечным координатам) распространения волновых пучков в соответствующих нелинейных оптических или плазменных средах. Позднее это явление наблюдалось экспериментально [3], и в настоящее время продолжает неуклонно расти интерес к различным конкретным схемам проявления этого эффекта в оптике [4–6].

В основе оптического явления волноводного распространения пучков лежит возможность взаимной компенсации двух факторов – дифракционной расходимости и нелинейной рефракции, которые характерны также и для нелинейной акустики звуковых пучков [7]. Однако из-за специфических особенностей, которые будут обсуждаться ниже, сама проблема возможности волноводного распространения звуковых пучков за счет неинерционных (нетепловых) нелинейных эффектов до настоящего времени не ставилась и соответственно не давалось ответа на возможность ее решения.

В настоящей работе теоретически (при отсутствии прямой аналогии с оптическим случаем) показана возможность волноводного распространения акустических пучков при неинерционном (нетепловом) проявлении нелинейности, найдены точные решения, описывающие характерные профили волны в пучке в этом режиме распространения, а также указана возможная схема экспериментальной реализации этого явления в нелинейной акустике.

Математическая модель описания оптических и других электромагнитных волновых пучков,

построенная на основе нелинейного уравнения Шредингера для комплексной амплитуды A

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \Delta_{\perp} A + \frac{k^2 \epsilon_{nl} |A|^2}{\epsilon_0} A \quad (1)$$

($\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_{nl} |A|^2$ – диэлектрическая проницаемость с учетом нелинейной поправки, k – волновое число, Δ_{\perp} – лапласиан по поперечным координатам), позволяет, во-первых, качественно прогнозировать наличие или отсутствие эффекта волноводного распространения в зависимости от знака ϵ_{nl} и, во-вторых, для случая $\epsilon_{nl} > 0$, когда происходит взаимная компенсация дифракционного и рефракционного членов в правой части уравнения (1), без особых математических трудностей находить решение соответствующего стационарного по z дифференциального уравнения в обыкновенных производных для щелевых и аксиально-симметричных пучков.

Специфика (в сопоставлении с (1)) математической модели волновых пучков в нелинейной акустике определяется двумя отличительными особенностями. Во-первых, отсутствие дисперсии и, как следствие, лавинообразное уширение спектра исходного волнового профиля за счет нелинейности заставляет находить формирующийся профиль, что усложняет по сравнению с (1) определяющее акустическое уравнение из-за введения дифференциального оператора еще по одной независимой переменной – времени. Во-вторых, характерной для акустики нелинейностью является квадратичная (в отличие от кубичной нелинейности в (1)). Все это дает в параболическом приближении (без учета диссипативных потерь) так называемое уравнение Хохлова–Заболот-

ской [8] для описания акустических пучков с учетом нелинейности¹, которое для безразмерных величин имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \tau} = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(V \frac{\partial V}{\partial \tau} \right). \quad (2)$$

Здесь $V = p/p_0$ ($p(x, y, z, \tau)$, p_0 – переменное акустическое давление и его максимальное значение соответственно), $N = \frac{z_{sh}}{z_d} = \frac{(\rho_0 c_0^2)/(\epsilon \omega p_0)}{\omega a^2/(2c_0)}$ – пара-

метр Хохлова, характеризующий соотношение нелинейных и дифракционных эффектов, z_{sh} – длина образования разрыва, z_d – дифракционная длина, c_0 – равновесная скорость звука, ϵ – параметр нелинейности среды, a^2 – характерная площадь поперечного сечения пучка, ω – характерная частота, z – нормированная на z_{sh} продольная координата, вдоль которой распространяется пучок, Δ_{\perp} – лапласиан по поперечным координатам, нормированным на a , $\tau = \omega \left(t - \frac{z z_{sh}}{c_0} \right)$ – безразмерное “запаздывающее” время.

Структура нелинейного члена уравнения (2) не позволяет (в отличие от (1)) предварительно прогнозировать возможность компенсации дифракционной расходимости, описываемой первым членом в правой части (2), нелинейной рефракцией. Поэтому существование волноводного режима распространения звуковых пучков будет определяться наличием физически обоснованного решения уравнения (2) в стационарном по z случае, который как раз и обусловлен указанной компенсацией. При этом, однако, возникает кажущийся парадокс относительно существования такого решения. Действительно, хорошо известно [7], что упоминавшееся ранее лавинообразное уширение спектра начального профиля волны за счет нелинейности и отсутствия дисперсии приводит к формированию пилообразных волн с ударными (разрывными) фронтами, пиковые значения которых из-за нелинейного высокочастотного затухания уменьшаются при распространении вдоль оси z . Это, казалось бы, исключает стационарные по z решения. Однако пилообразная волна – это единственный асимптотически универсальный тип нелинейной волны в плоском (одномерном) случае. Для неоднородной (пучковой) нелинейной акустики, как показывают численные расчеты [7, 11], возможно наличие второго асимптотически универсального типа волновых профилей с сильными нелинейными искажениями (относительно синусоидального профиля), но не имеющих разрывов. Для волн с таким профилем отсутствует

нелинейное высокочастотное затухание и поэтому они могут быть стационарным по z решением уравнения (2). Такое решение возможно при условии $\frac{N}{4} \sim 1$ (более точные оценки для параметра N будут получены ниже). Это условие удобно пред-

ставить в виде $\frac{N}{4} \equiv \frac{F_{cr}}{F_a} \sim 1$, где $F_{cr} = \frac{\beta \rho_0 c_0^4}{2\omega^2}$ – значение “критической” силы, $F_a = \beta \rho_0 a^2$ – усредненная сила акустического воздействия волны на площадь поперечного сечения пучка a^2 , β – безразмерный коэффициент, определяемый распределением давления по поперечному сечению пучка и его изменением во времени. Для взаимной компенсации дифракции и нелинейной рефракции отношение двух указанных сил должно быть порядка единицы (аналогия с соотношением между критической мощностью и мощностью пучка в оптическом случае).

Рассмотрим самую простую по геометрии задачу о распространении пучка, излучаемого бесконечной щелью. В этом случае стационарный по z вариант уравнения (2) будет нелинейным уравнением в частных производных

$$\frac{N}{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(V \frac{\partial V}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (3)$$

найти общее решение которого не представляется возможным и поэтому можно рассчитывать только на поиск подходящего частного решения. Это искомое решение должно быть локализовано и симметрично по поперечной координате и иметь непрерывный во времени профиль, что принципиально отличает его от обычного решения одномерной задачи нелинейной акустики, приводящего к образованию пилообразной волны.

В наиболее полном справочнике [10] для уравнения (3) указано несколько частных решений, но все они не удовлетворяют только что сформулированным требованиям. Поэтому поиск новых решений уравнения (3) привел к следующему, наиболее подходящему с точки зрения физической обоснованности варианту:

$$V(\tau, y) = Y_2(y)(\tau - T)^2 - Y_0(y), \quad (4)$$

где T – произвольная константа, которую определим равенством $T = 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) для образования периодического по τ решения. Функции $Y_2(y)$ и $Y_0(y)$, как следует из подстановки (4) в (3), должны определяться уравнениями

$$Y_2'' + \frac{24}{N} Y_2^2 = 0, \quad (5)$$

$$Y_0'' + \frac{8}{N} Y_2 Y_0 = 0. \quad (6)$$

¹ В аэродинамике околозвуковых потоков это уравнение было получено значительно раньше в [9].

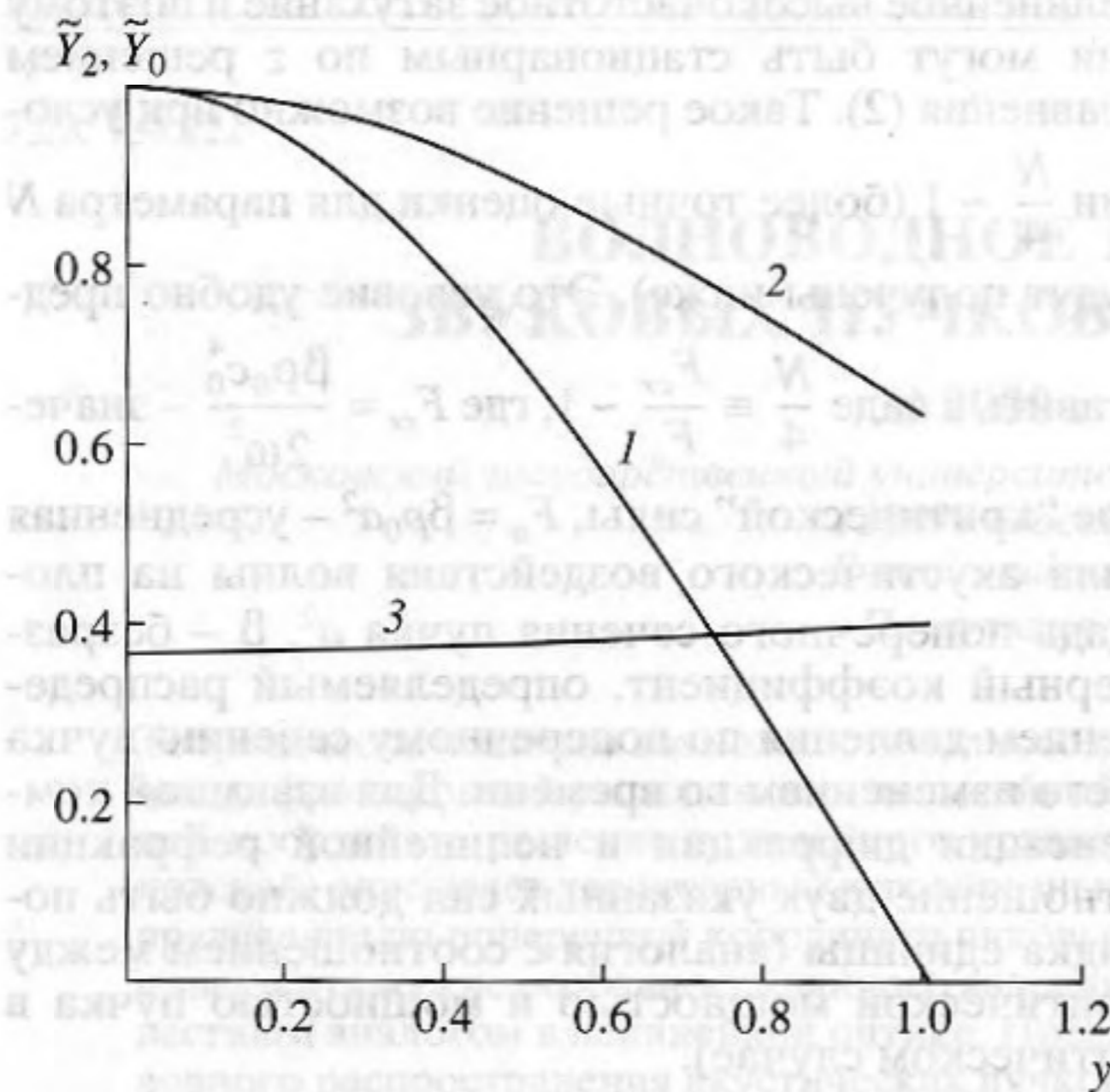


Рис. 1. Нормированные функции $\tilde{Y}_2(y)$ (кривая 1) и $\tilde{Y}_0(y)$ (кривая 2); отношение $\frac{\tilde{Y}_0(y) - \tilde{Y}_0(1)}{\tilde{Y}_2(y)}$ (кривая 3).

Найденное решение (4) представляет собой периодически повторяющиеся по τ симметричные куски параболы с изменяющимися вдоль координаты y крутизной ее ветвей (определяется значениями функции $Y_2(y)$) и смещением параболы по вертикали относительно оси τ (определяется значениями функции $Y_0(y)$). Функции $Y_2(y)$ и $Y_0(y)$ в совокупности опосредовано определяют вдоль оси y распределение пиковых значений получившейся дугообразной волны, причем для выполнения условия локализации пучка эти функции должны симметрично спадать относительно $y = 0$ до нулевого значения при увеличении $|y|$, что определяет нулевое значение амплитуды дугообразной волны на границе пучка. Для функции $Y_2(y)$ этим условиям удовлетворяет частное решение уравнения (5), записанное в виде

$$\pm y = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{N}{Y_2^0}} \int \frac{d\tilde{Y}_2}{\sqrt{1 - \tilde{Y}_2^3}}, \quad (7)$$

где $\tilde{Y}_2(y)$ – нормированная на свое максимальное значение Y_2^0 искомая функция, т.е. $\tilde{Y}_2(y) \equiv Y_2(y)/Y_2^0 \leq 1$. Искомая функция определяется обратной по отношению к (7) зависимостью, причем будем учитывать эту зависимость на интервале $|y| \leq y_0$, где функция $\tilde{Y}_2(y)$ спадает от 1 до 0; вне указанного интервала определим значения $\tilde{Y}_2(y)$ рав-

ными нулю (см. рис. 1). Такое модифицированное решение (ненулевое внутри интервала $|y| \leq y_0$ и нулевое вне его) сохраняет непрерывность функции $\tilde{Y}_2(y)$ в граничных точках $\pm y_0$, а значит, в силу уравнения (5) сохраняет и непрерывность второй производной этой функции, что важно для удовлетворения модифицированного решения исходному уравнению (3) без появления некомпенсированных сингулярных слагаемых. Заметим, что поскольку y изначально было нормировано на ширину пучка, то необходимо положить $y_0 = 1$, а это соотношение, как показывает численный анализ зависимости (7), выполняется при $N/Y_2^0 \approx 8.14$.

Численный анализ решения уравнения (6) при требуемых условиях $Y_0''(0) = 0$, $Y_0' < 0$ дает зависимость, аналогичную решению уравнения (5), однако с краевым значением, отличным от нуля, а именно $Y_0(1) > 0$ (см. рис. 1). Чтобы в решении (4) сделать нулевым смещение парабол по вертикали при $y = \pm 1$, модифицируем это решение, принимая во внимание, что введение в уже полученное волновое поле дополнительного фазового (временного) сдвига при его возможной зависимости от продольной координаты z не нарушит постоянства структуры этого поля вдоль z . С учетом этого вместо (4) рассмотрим решение в виде

$$V(\tau, y) = Y_2(y)(\tau - T + \gamma z)^2 - (Y_0(y) - Y_0(1)), \quad (8)$$

которое должно удовлетворять уже нестационарному по z решению уравнения (2). Легко проверить, что это решение опять приводит к уравнениям (5), (6) при условии $\gamma = Y_0(1)$. Кроме всего прочего, решение (8) должно удовлетворять условию, являющемуся интегралом уравнения (2) [11, 12], которое для симметричного по τ профиля (8) имеет вид

$$\int_{\tau_{\min} = T - \gamma z}^{\tau_{\min} + 2\pi} V d\tau = 0. \quad (9)$$

Это условие при подстановке в него (8) дает

$$Y_2^0 \tilde{Y}_2(y) \pi^2 / 3 = Y_0^0 (\tilde{Y}_0(y) - \tilde{Y}_0(1)). \quad (10)$$

Здесь функции Y_2 и Y_0 записаны через их нормированные аналоги.

Выполнение соотношения (10) при произвольном y не очевидно в силу различных функций в правой и левой частях этого соотношения. Однако численный анализ показывает практически постоянное (с точностью до 0.02) значение отношения $\frac{\tilde{Y}_0(y) - \tilde{Y}_0(1)}{\tilde{Y}_2(y)} \approx 0.38$ (см. рис. 1). С учетом

этого из (10) имеем $Y_2^0/Y_0^0 \approx 0.12$, а сами макси-

мальные значения Y_2^0 и Y_0^0 соответствующих функций определяются тем, что V – это нормированная на максимум величина, т.е. $V_{\max} = 1$. Для профиля (9) с учетом условия (10) это дает

$$V_{\max} \equiv Y_2^0(\pi^2 - \pi^2/3) = 1 \text{ или } Y_2^0 = 1.5/\pi^2 \approx 0.15, \\ Y_0^0 \equiv Y_2^0/0.12 \approx 1.25.$$

Из полученного ранее отношения $N/Y_2^0 \approx 8.14$ находим значение параметра $N \approx 1.22$, при котором реализуется волноводный режим распространения звукового пучка с характерным дугообразным профилем (см. рис. 2), определяемым решением (9) и всеми, полученными выше параметрами.

Для аксиально-симметричного пучка в уравнениях (2), (3), (5), (6) оператор $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ заменяется на

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right); \text{ при этом вид найденного решения (9)}$$

сохраняется. И хотя для аналога уравнения (5) уже нельзя записать результат в конечном виде подобно (7), однако численный анализ показывает полное качественное совпадение в поведении решений для щелевого и аксиально-симметричного пучков с несколько иными значениями характерных параметров. Например, для аксиально-симметричного пучка $N/Y_2^0 \approx 2.81$ и $N \approx 0.35$.

Полученные дугообразные волны являются непрерывными, но имеющими в данной модели разрывы производной по τ , которые с соответствующими острыми пиками профиля должны сгладиться при учете диссипативного члена в исходном уравнении (2), т.е. при переходе к уравнению Хохлова–Заболотской–Кузнецова [13]. Отметим также, что найденные дугообразные волны наряду с хорошо известными пилообразными [7] имеют асимптотически универсальный характер в том смысле, что, сформировавшись на каком-то расстоянии z , далее, при распространении пучка, они не меняют своей характерной формы. Волны подобного вида получались и ранее [7, 11] при численном нахождении решений уравнения Хохлова–Заболотской (безотносительно к проблеме волноводного распространения пучков) для некоторых значений характерных параметров; однако особые свойства таких волн в прежних работах не обсуждались.

Самостоятельный интерес представляет вопрос об устойчивости волноводного режима распространения в той или иной геометрии, что требует специального анализа. При этом развитые нами методы исследования обобщенного уравнения Хохлова–Заболотской с произвольным показателем степенной неустойчивости показывают,

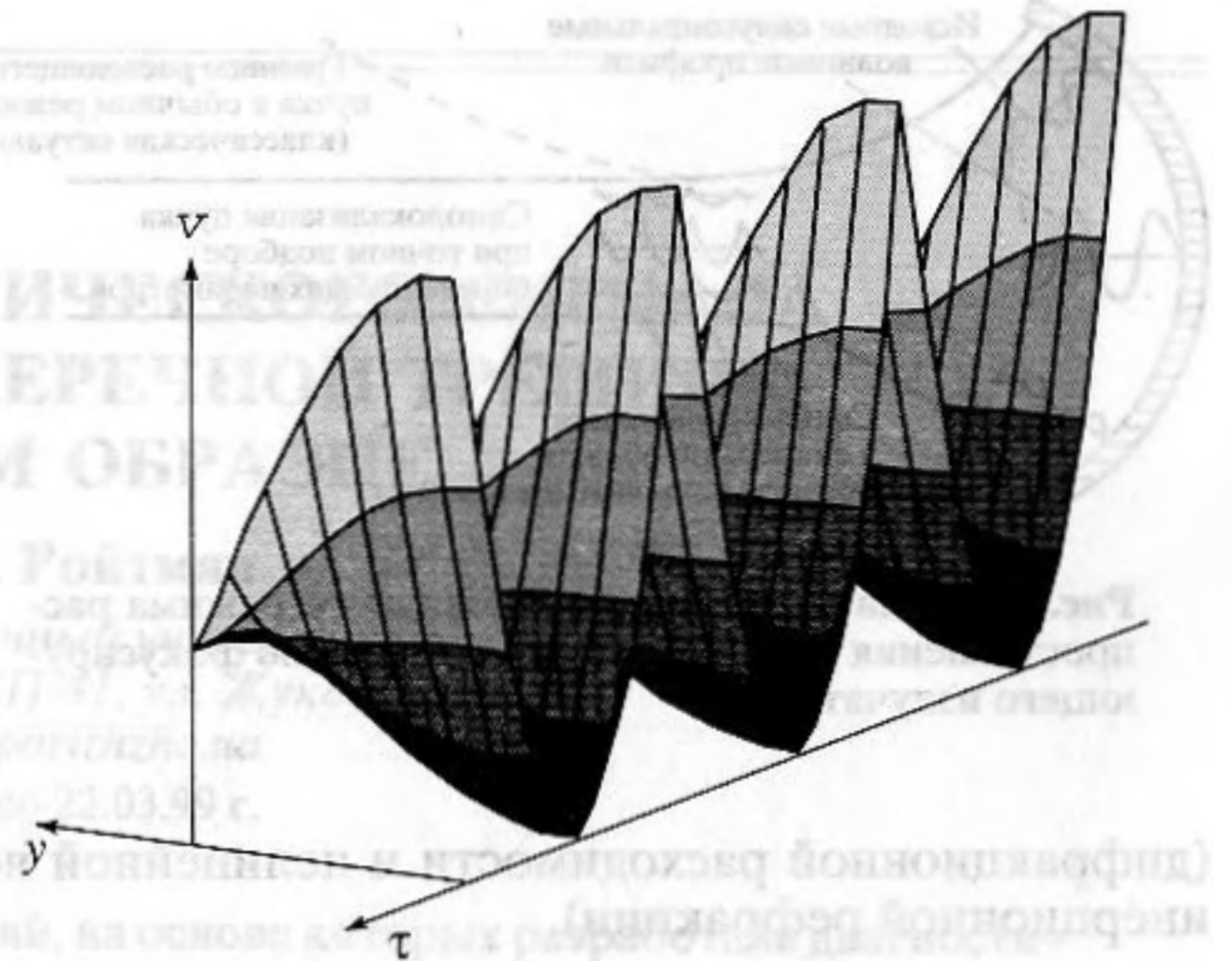


Рис. 2. Волновое поле давления с дугообразным волновым профилем (на рисунке показаны три периода) для реализации волноводного распространения звукового пучка. Для наглядности показано амплитудное распределение только вдоль положительной полуоси y (волновое поле распространяется на нас).

что волноводный режим при квадратичной нелинейности не является безусловно неустойчивым [12]. Кроме того, напомним, что в нелинейной оптике щелевой пучок, ограниченный в поперечном направлении двумя плоскими границами (т.е. заключенный в плоский волновод), дает возможность наблюдать устойчивую картину волноводного распространения [6].

Теоретически “сконструированная” в настоящей работе структура волнового поля звукового пучка для его самолокализованного (волноводного) распространения должна быть практически реализована с целью возможной экспериментальной проверки рассматриваемого акустического эффекта. Прямой синтез звукового поля подобной конфигурации затруднителен. Однако уже упоминавшиеся численные результаты [7, 11] дают основание предложить нестандартный подход к решению данной проблемы. Эти численные результаты показывают, что, когда для изначально сфокусированного звукового пучка эффекты нелинейности и дифракции равнозначимы (т.е. $N \sim 1$) и когда длина образования разрыва z_{sh} превышает фокальную длину (радиус кривизны исходного фронта), то тогда в фокальной зоне пучка формируется как раз дугообразный волновой профиль. Если к тому же учесть, что изначально искривленный за счет фокусировки волновой фронт в области фокуса становится плоским, то, значит, при более тщательном подборе требуемых параметров область фокуса сама создает необходимые условия для дальнейшего волноводного распространения звукового пучка (см. рис. 3) в условиях компенсации эффектов самовоздействия

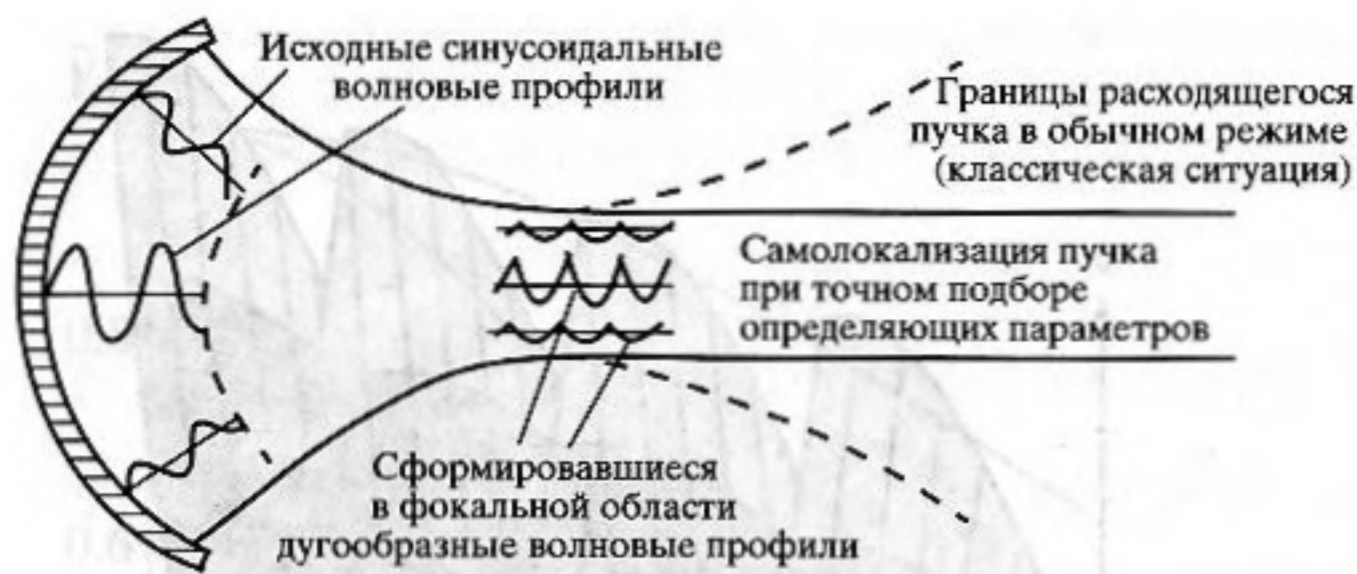


Рис. 3. Схема реализации волноводного режима распространения звукового пучка с помощью фокусирующего излучателя.

(дифракционной расходимости и нелинейной неинерционной рефракции).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, программ ИНТАС и "Университеты России".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таланов В.И. О самофокусировке электромагнитных волн в нелинейных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. № 5. С. 564–565.
2. Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H. Self-trapping of optical beams // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 479–482.

3. Bjorkholm J.E., Ashkin A. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. P. 129.
4. Mitchell M., Segev M. Self-trapping of incoherent white light // Nature. 1997. V. 387. P. 880–883.
5. Chen Z., Mitchell M., Segev M. et al. Self-trapping of dark incoherent light beams // Science. 1998. V. 280. P. 889–892.
6. Segev M., Stegeman G. Self-trapping of optical beams: spatial solitons // Phys. Today. 1998. V. 51(8). P. 42–48.
7. Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // УФН. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
8. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 1. С. 40–47.
9. Lin C., Reissner E., Tsiegn H. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Math. and Phys. 1948. V. 27. № 3. P. 126–140.
10. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: Международная программа образования, 1996.
11. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
12. Маков Ю.Н., Сапожников О.А. Усредненные характеристики (моменты) обобщенного уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 6. С. 1003–1005.
13. Кузнецов В.П. Уравнения нелинейной акустики // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 4. С. 548–552.

Waveguide Propagation of Sound Beams in a Nonlinear Medium

Yu. N. Makov

A possibility of a waveguide propagation of sound beams in the case of the compensation of the diffraction divergence by the nonlinear refraction is demonstrated theoretically. A stationary (with respect to the longitudinal coordinate) solution is obtained to the nonlinear equation for a collimated beam (the Khokhlov–Zabolotskaya equation); the solution describes the characteristic bow-shaped profile of the beam and the self-localized (with respect to the transverse coordinate) distribution of the peak values of this profile. The physical and mathematical features of this phenomenon belonging to nonlinear acoustics are discussed and compared with those of the well-known analog from nonlinear optics. A scheme of an experimental realization of the waveguide propagation of acoustic beams is proposed.