АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2000, том 46, № 5, с. 690–697

УДК 534.2

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН ОТ УПРУГОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ: РЕЗОНАНСНЫЙ ПОДХОД И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

© 2000 г. М. С. Фокина, В. Н. Фокин

Институт прикладной физики РАН
603600 Н. Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: fok@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 08.07.99 г.

Резонансный подход, ранее развитый H. Überall для модели жидкого слоя, лежащего на жидком полупространстве, расширен для модели упругого слоя, лежащего на упругом полупространстве. С использованием матричной техники Томсона–Хаскелла получено точное аналитическое выражение для комплексного коэффициента отражения. Получены характеристические уравнения и аналитически найдены их корни, определяющие положения резонансов коэффициента отражения относительно продольных и поперечных волн. В резонансном подходе точное выражение для коэффициента отражения заменяется приближенным выражением, описывающим поведение коэффициента отражения вблизи резонансов. Проведено сопоставление результатов расчета точных и приближенных значений коэффициентов отражения и показано хорошее совпадение результатов вблизи частотных и угловых резонансов.

ВВЕДЕНИЕ

Рассчитанные коэффициенты отражения акустического сигнала от слоистого морского дна образуют в целом сложную структуру, состоящую из более или менее регулярных последовательностей пиков и впадин. Зависимости подобного рода обычно приписывают резонансным явлениям [1]. Резонансы коэффициентов отражения являются индикаторами упругих свойств материалов, таких, как плотность и постоянные Ламэ, которые связаны с продольными и поперечными скоростями звука. Резонансы могут просигнализировать о любых изменениях в толще слоев и в межслойных контактах в многослойных структурах. Высокая чувствительность резонансов к параметрам взаимодействующих со звуком слоистых сред способствовала широкому использованию резонансов в науке и технике [2, 3]. Развит метод бесконтактной резонансной акустической спектроскопии для определения упругих свойств материалов [4]. В работе [5] с помощью резонансов продольных и поперечных волн успешно решается задача уменьшения отклика системы упругое покрытие – металлическая пластина. Большой интерес представляет исследование резонансов и для описания эффектов влияния морского дна на распространение акустических сигналов в мелком море. Импедансная функция слоистого морского дна имеет ярко выраженные резонансы [6] и включает информацию о дне, которая эквивалентна той, что заключена в коэффициенте отражения. Поэтому в дальнейшем значения импедансной функции, полученной из обратного преобразования Ханкеля, предлагается использовать как входные данные для обратной задачи нахождения геоакустических параметров дна [7]. В настоящее время возрастает интерес к использованию резонансных явлений в слоистых средах непосредственно для реконструкции параметров дна [8]. Поэтому представляется логичным использовать найденную из измерений структуру резонансов для определения свойств данной среды, т.е. решать соответственно обратную задачу в каждом конкретном случае.

До сих пор было сделано лишь несколько попыток применить резонансный подход к отражению звука от дна океана для получения информации о строении и свойствах отражающей среды. Первыми исследованиями в этом направлении являются работы [9–12], где рассматривается случай жидкого слоя и упругой пластины, помещенных в жидкую среду, и исследуется связь акустических резонансов с материальными параметрами среды [12, 13].

В реалистичных моделях слоистого морского дна кроме наличия слоев должны учитываться также распространяющиеся поперечные волны и поглощение. Введение таких усложнений при исследовании резонансов рассматривается в данной работе. Резонансный подход, ранее развитый H. Überall в [10–12] для жидкой модели дна, был применен для упругой слоистой модели дна.

Экспериментально установленные свойства отраженных от слоистого дна сигналов при тональном излучении подробно рассмотрены в работе [14]. Теоретическая разработка вопроса об отражении звука от системы плоскопараллельных слоев представлена в работе [15]. Интерес к

исследованию взаимодействия звуковых волн с дном обусловлен как влиянием структуры дна на распространение акустических волн в водной толще, так и проблемой дистанционного определения характеристик дна. Так, исследования влияния слоистой структуры дна на распространение звука в мелком море рассматривается в работе [16]. Однако наряду с разработкой новых методов определения характеристик дна в мелком море [17] продолжается разработка методов определения частотно-угловых зависимостей коэффициента отражения по измерениям акустического поля [18].

ФИЗИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В данной работе точные выражения комплексных коэффициентов отражения получены аналитически с помощью матричной техники Томсона–Хаскелла [15, 19–21]. Физическая модель среды, использованная для изучения частотно-угловых резонансов коэффициента отражения, состоит из упругого слоя между жидким и упругим полупространствами. Параметры, связанные с жидким полупространством и упругим полупространством, идентифицируются индексами 0 и ∞ соответственно: c_0, ρ_0 – скорость звука и плотность в воде; d, ρ, c_l, c_t – толщина, плотность, продольная и поперечная скорости звука в осадочном слое; ρ_∞, $c_{l\infty}$ и $c_{t\infty}$ – плотность, продольная и поперечная скорости звука полупространства. Эффекты поглощения учитываются путем введения комплексных скоростей продольных и поперечных волн. Рассматривая волны лишь вертикальной поляризации, вектор смещения U может быть записан в терминах скалярного и векторного потенциалов φ и ψ:

$$U = \mathrm{grad}\varphi + \mathrm{rot}\psi. \quad (1)$$

Компоненты вектора смещения и тензора деформации в декартовой системе координат могут быть записаны соответственно в виде

$$U_x = \partial\varphi/\partial x - \partial\psi/\partial z, \quad U_z = \partial\varphi/\partial z + \partial\psi/\partial x, \quad (2)$$

$$\sigma_{xz} = 2\mu(\partial^2\varphi/\partial x\partial z - \partial^2\psi/\partial z^2),$$

$$\sigma_{zz} = -\lambda\partial^2\varphi/\partial x^2 + \quad (3)$$

$$+ (\lambda + 2\mu)\partial^2\varphi/\partial z^2 + \partial^2\psi/\partial x\partial z,$$

где λ и μ – константы Ламэ, связанные с продольными и поперечными скоростями звука. Компоненты вектора смещения и тензора деформации, вовлеченные в граничные условия, непрерывны на границах осадочный слой/упругое основание и водная толща/осадочный слой:

$$U_x = U_{x\infty}, \quad U_{z0} = U_z,$$
$$U_z = U_{z\infty}, \quad p_0 = \sigma_{xz},$$
$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz\infty}, \quad 0 = \sigma_{xz}. \quad (4)$$
$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz\infty},$$

Потенциалы φ и ψ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + \alpha^2\varphi = 0,$$
$$\Delta\psi + \beta^2\psi = 0. \quad (5)$$

Записывая систему волн в водной толще, осадочном слое и в упругом полупространстве через амплитуды продольных и поперечных волн, распространяющихся по и против оси z и вводя векторы-столбцы для двух полупространств и упругого слоя, а также воспользовавшись граничными условиями (4), систему алгебраических уравнений на границе можно представить в матричной форме

$$Z_0 = Q^{-1}K_{ls}DZ_\infty, \quad (6)$$

где Q^{-1} – обратная матрица жидкого полупространства, K_{ls} – переходная матрица между жидким полупространством и упругой средой, $D = ALA^{-1}K_0$ – матрица упругой слоистой среды, A – характеристическая матрица слоя, L – диагональная матрица (переменные $\delta = \alpha d$ и $\eta = \beta d$ связаны с частотой, углом падения волны и толщиной осадочного слоя d), K_0 – матрица упругого полупространства.

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2i\alpha_0} & -\frac{1}{2\omega^2\rho_0} \\ -\frac{1}{2i\alpha_0} & -\frac{1}{2\omega^2\rho_0} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} i\xi & i\xi & -i\beta & i\beta \\ i\alpha & -i\alpha & i\xi & i\xi \\ -2\mu\xi\alpha & 2\mu\xi\alpha & -2\mu\xi\gamma & -2\mu\xi\gamma \\ 2\mu\xi\gamma & 2\mu\xi\gamma & -2\mu\xi\beta & 2\mu\xi\beta \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$L = \begin{bmatrix} \exp(i\delta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-i\eta) \end{bmatrix},$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} i\xi & i\xi & -i\beta_\infty & i\beta_\infty \\ i\alpha_\infty & i\alpha_\infty & i\xi & i\xi \\ -2\mu_\infty\xi\alpha_\infty & 2\mu_\infty\xi\alpha_\infty & -2\mu_\infty\xi\gamma_\infty & -2\mu_\infty\xi\gamma_\infty \\ 2\mu_\infty\xi\gamma_\infty & 2\mu_\infty\xi\gamma_\infty & -2\mu_\infty\xi\beta_\infty & 2\mu_\infty\xi\beta_\infty \end{bmatrix}.$$

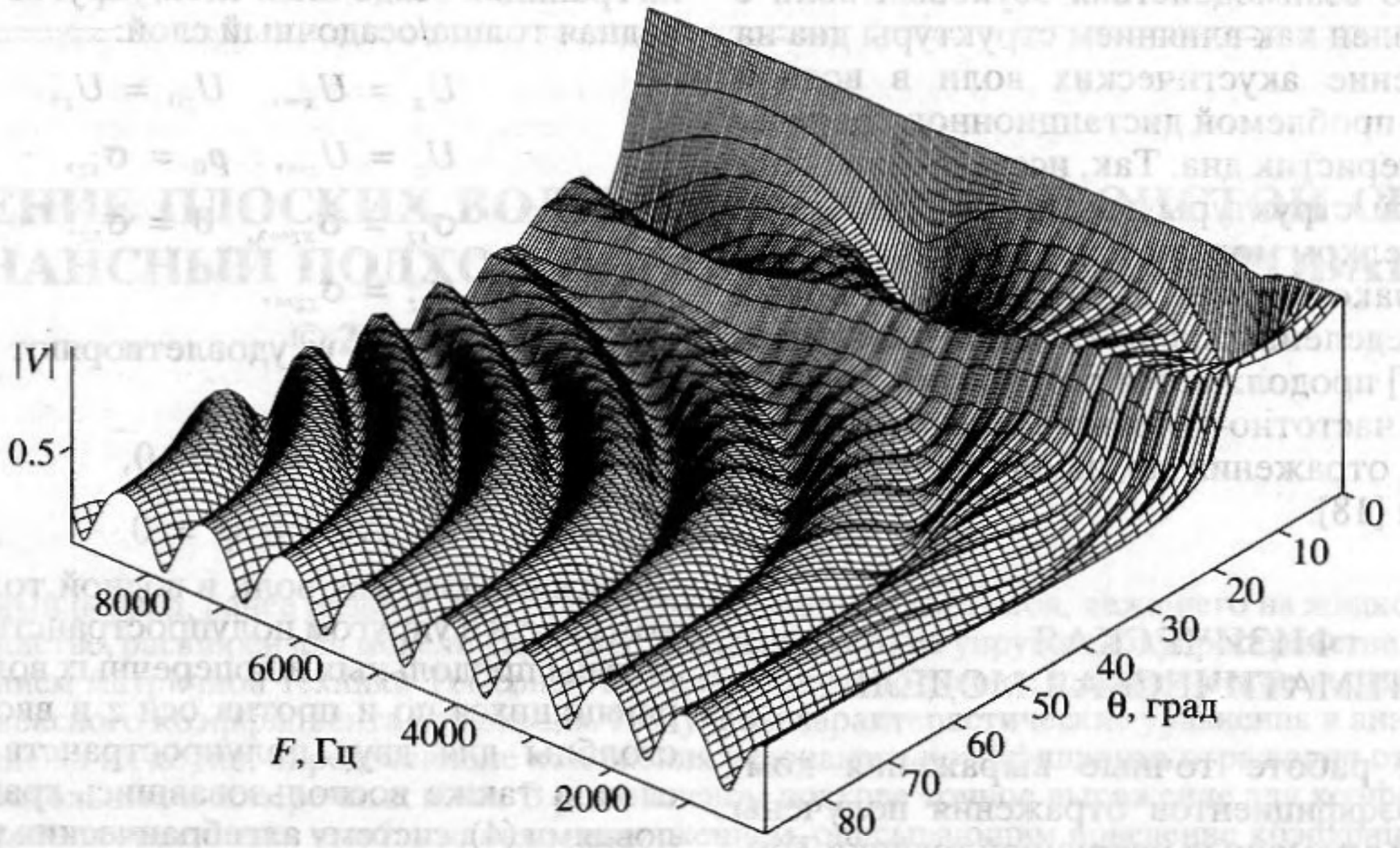

Рис. 1. Модуль коэффициента отражения плоской волны на плоскости частота–угол скольжения.

Решение системы матричных уравнений (6) относительно коэффициента отражения V в водной толще может быть получено по правилу Крамера.

ТОЧНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ

Точное выражение для комплексного коэффициента отражения может быть записано с помощью элементов матриц Q^{-1} и D:

$$V = \frac{Q_{21}^{-1}(D_{21}D_{33} - D_{23}D_{31}) - Q_{22}^{-1}(D_{43}D_{31} - D_{41}D_{33})}{Q_{11}^{-1}(D_{21}D_{33} - D_{23}D_{31}) - Q_{12}^{-1}(D_{43}D_{31} - D_{41}D_{33})}. \quad (8)$$

Затем (8) записывается аналитически в терминах материальных параметров среды и переменных δ и η. Выделением в нем реальной и мнимой части точное выражение для коэффициента отражения преобразуется к более компактной форме

$$V = \frac{E^2 - B^2 + C^2 - G^2}{E^2 + 2EB + B^2 + C^2 + 2CG + G^2} + \frac{i(2CB + 2GE)}{E^2 + 2EB + B^2 + C^2 + 2CG + G^2}. \quad (9)$$

Параметры модели дна

	c_l, м/с	c_t, м/с	ρ, г/см^3
Водная толща	1500		1.0
Осадочный слой, d = 70 см	1455	250	1.45
Упругое полупространство	1575	800	2.6

Здесь функции E, B, C и G связаны как с материальными параметрами слоистой упругой среды, так и с переменными $\delta = \alpha d$ и $\eta = \beta d$. Для оценки и выявления особенностей частотно-угловых зависимостей коэффициента отражения пользуются объемным представлением результатов, как это показано на рис. 1, где приведены расчеты модуля коэффициента отражения в широком диапазоне частот и углов скольжения. Материальные параметры модели дна приведены в таблице. Из рис. 1 видно, что частотно-угловая зависимость коэффициента отражения представляет собой регулярную последовательность минимумов и максимумов. Особенности подобного рода связаны с резонансами коэффициента отражения. Аналогичные эффекты наблюдал H. Überall [10–12] для случая жидкого слоя осадков между двумя различными жидкостями.

В реалистичных моделях слоистого морского дна дополнительный учет поперечных волн приводит к значительному изменению структуры резонансов (рис. 2). Численные расчеты показывают, что на всех углах скольжения, кроме нормального падения плоской волны, появляются дополнительные по сравнению с жидким слоем резонансные пики. Меняется также и амплитуда резонансов; это легко объясняется тем, что сдвиговые волны уносят энергию от границы, в результате чего граница становится как бы мягче. При нормальном же падении плоской волны на упругую среду влияния сдвиговой волны на коэффициенты отражения не наблюдается, так как в этом случае возбуждение сдвиговой волны невозможно из-за отсутствия тангенциальной проекции волны

сжатия на границе сред. Численные расчеты для упругого слоя толщиной 70 см (таблица) с учетом поглощения в слое и полупространстве ($\upsilon_l = 0.01$, $\upsilon_t = 0.001$, $\upsilon_{l\infty} = 0.015$, $\upsilon_{t\infty} = 0.15$) показывают, что эффекты поглощения до некоторой степени маскируют влияние сдвиговых волн. Однако из расчетов коэффициента отражения, выполненных для двух углов скольжения – $\theta = 3°$ и $\theta = 50°$ (рис. 2), видно, что учет поглощения приводит в основном к уменьшению амплитуды резонансов коэффициентов отражения на всех углах.

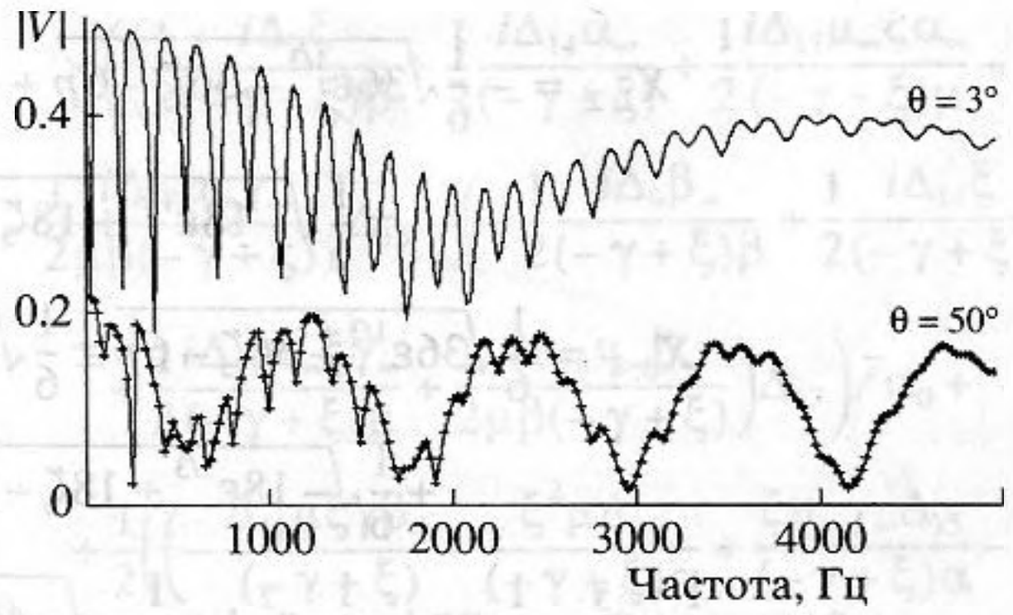

Рис. 2. Частотная зависимость коэффициента отражения для углов скольжения 3° и 50°.

РЕЗОНАНСНЫЙ ПОДХОД

Для анализа поведения коэффициента отражения плоских волн вблизи резонансных минимумов точное выражение коэффициента отражения (9) преобразуется к форме

$$V = \frac{(E^2 - B^2 + C^2 - G^2)^2 + (2CB + 2GE)^2}{(E^2 + 2EB + B^2 + C^2 + 2CG + G^2)(E^2 - B^2 + C^2 - G^2 - i(2CB + 2GE))}. \quad (10)$$

Анализ выражения (10) показал, что резонансное поведение коэффициента отражения проявляется всякий раз, когда реальная часть знаменателя становится исчезающе малой, т.е. когда характеристические уравнения, полученные из (10) в условиях резонанса, удовлетворены:

$$E^2 - B^2 + C^2 - G^2 = 0, \quad (11)$$

$$(E + B)^2 + (C - G)^2 = 0. \quad (11a)$$

После разделения переменных относительно δ и η уравнение (11) может быть переписано в виде

$$K_1\cos(\delta)\cos(\eta) + K_2\cos^2(\delta)\cos^2(\eta) + K_3\sin(\delta)\sin(\eta) + K_4\cos^2(\delta) + K_5\cos^2(\eta) + K_6\cos(\delta)\cos(\eta)\sin(\delta)\sin(\eta) + K_7 = 0, \quad (12)$$

где константы $K_1 - K_7$ связаны уже только с материальными параметрами упругой слоистой среды. Характеристическое уравнение (12) может быть решено отдельно для переменных δ и η. Будем искать решения в виде $\delta = 2\,\mathrm{arctg}(X)$, тогда (12) можно переписать в виде уравнения 4-й степени:

$$(-K_1\cos(\eta) + K_2\cos^2(\eta) + K_4 + K_5\cos^2(\eta) + K_7)X^4 + (2K_3\sin(\eta) - 2K_6\cos(\eta)\sin(\eta))X^3 + (-2K_2\cos^2(\eta) - 2K_4 + 2K_5\cos^2(\eta) + 2K_7)X^2 + (2K_3\sin(\eta) + 2K_6\cos(\eta)\sin(\eta))X + (K_1\cos(\eta) + K_2\cos^2(\eta) + K_4 + K_5\cos^2(\eta) + K_7) = 0. \quad (13)$$

Если искать решения в виде $\eta = 2\,\mathrm{arctg}(X)$, тогда уравнение (12) примет вид

$$(-K_1\cos(\delta) + K_2\cos^2(\delta) + K_4\cos^2(\delta) + K_5 + K_7)X^4 + (2K_3\sin(\delta) - 2K_6\cos(\delta)\sin(\delta))X^3 + (-2K_2\cos^2(\delta) + 2K_4\cos^2(\delta) - 2K_5 + 2K_7)X^2 + (2K_3\sin(\delta) + 2K_6\cos(\delta)\sin(\delta))X + (K_1\cos(\delta) + K_2\cos^2(\delta) + K_4\cos^2(\delta) + K_5 + K_7) = 0. \quad (14)$$

Решения этих уравнений определяют положения резонансов коэффициентов отражения на плоскости частота–угол падения для продольных и поперечных волн, возникающих в упругой среде. Корни уравнений (13) и (14) могут быть получены в виде решений Декарта–Эйлера уравнения 4-й степени:

$$X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d = 0. \quad (15)$$

Корни характеристического уравнения (12), учитывая, что период арктангенса π, находятся как

$$\delta = 2\,\mathrm{arctg}(X), \quad \eta = 2\,\mathrm{arctg}(X), \quad \delta_n = \delta + 2\pi n, \quad \eta_n = \eta + 2\pi n, \quad (16)$$

где X – корни уравнений (13) и (14) соответственно, $n = 0, 1, 2, \ldots$ – номера резонансов. Переменные δ_n и η_n определяют положения частотно-угловых резонансов коэффициента отражения. Корни уравнения (15) X_1–X_4 могут быть выражены через коэффициенты "неполного" уравнения 4-й степени (p, r, q) и коэффициенты (a, b, c, d):

$$X_{1,2} = -\frac{1}{6}\sqrt{36\varepsilon^{1/3} - 36\zeta - 6p} + \frac{1}{6}\sqrt{-18\varepsilon^{1/3} + 18\zeta - 6p + i18\sqrt{3}(\varepsilon^{1/3} + \zeta)} \pm$$
$$\pm\frac{1}{6}\sqrt{-18\varepsilon^{1/3} + 18\zeta - 6p - i18\sqrt{3}(\varepsilon^{1/3} + \zeta)} - \frac{1}{4}a,$$
$$X_{3,4} = \frac{1}{6}\sqrt{36\varepsilon^{1/3} - 36\zeta - 6p} \pm \frac{1}{6}\sqrt{-18\varepsilon^{1/3} + 18\zeta - 6p + i18\sqrt{3}(\varepsilon^{1/3} + \zeta)} + \quad (17)$$
$$+\frac{1}{6}\sqrt{-18\varepsilon^{1/3} + 18\zeta - 6p - i18\sqrt{3}(\varepsilon^{1/3} + \zeta)} - \frac{1}{4}a,$$
$$\varepsilon = \frac{1}{1728}p^3 - \frac{1}{48}pr + \frac{1}{128}q^2 + \frac{1}{1152}\sqrt{-48p^4 + 384p^2r^2 - 768r^3 + 12p^3q^2 - 432prq^2 + 81q^4},$$
$$\zeta = \frac{-\frac{1}{144}p^2 - \frac{1}{12}r}{\varepsilon^{1/3}}.$$

Материальные константы слоистой среды входят в решение через соответствующие выражения для коэффициентов уравнений. Одновременно можно записать точные выражения для частотно-угловых переменных δ' и η' как функций текущих частот и углов падения плоской волны:

$$\delta' = \frac{2\pi F d\cos(\theta_l)}{c_l}, \quad \eta' = \frac{2\pi F d\cos(\theta_r)}{c_t}. \quad (18)$$

Резонансы коэффициента отражения появляются, когда разность между точными δ' или η' и переменными δ_n или η_n, найденными из характеристических уравнений, стремится к нулю: $|\delta' - \delta_n| = 0$ или $|\eta' - \eta_n| = 0$. При этих условиях коэффициент отражения имеет минимумы во всем диапазоне углов и частот. На рис. 3 приведены точные расчеты частотной зависимости коэффициента отражения вблизи первого минимума, соответствующего частоте $F_r = 105$ Гц, маркерами отмечена разность $|\delta' - \delta_n|$. Переменные δ' и η' являются функциями частоты и угла падения, поэтому, фиксируя только частотную или угловую переменные, положения частотных и угловых резонансов можно записать относительно продольных и поперечных волн отдельно:

$$\underline{\theta = \text{const}}: \ (F_r)_l = \frac{\delta_n c_l}{2\pi d\cos(\theta_l)},$$
$$(F_r)_t = \frac{\eta_n c_t}{2\pi d\cos(\theta_t)}, \quad (19)$$
$$\underline{F = \text{const}}: \ (\theta_r)_l = \arcsin\left(\sqrt{\frac{c_0^2(4\pi^2F^2d^2 - \delta_n)}{4\pi^2F^2d^2c_l^4}}\right),$$
$$(\theta_r)_t = \arcsin\left(\sqrt{\frac{c_0^2(4\pi^2F^2d^2 - \eta_n)}{4\pi^2F^2d^2c_t^4}}\right). \quad (20)$$

Для выбранных параметров модели дна (таблица) на плоскости частота–угол падения проведено сопоставление положений резонансов, полученных с

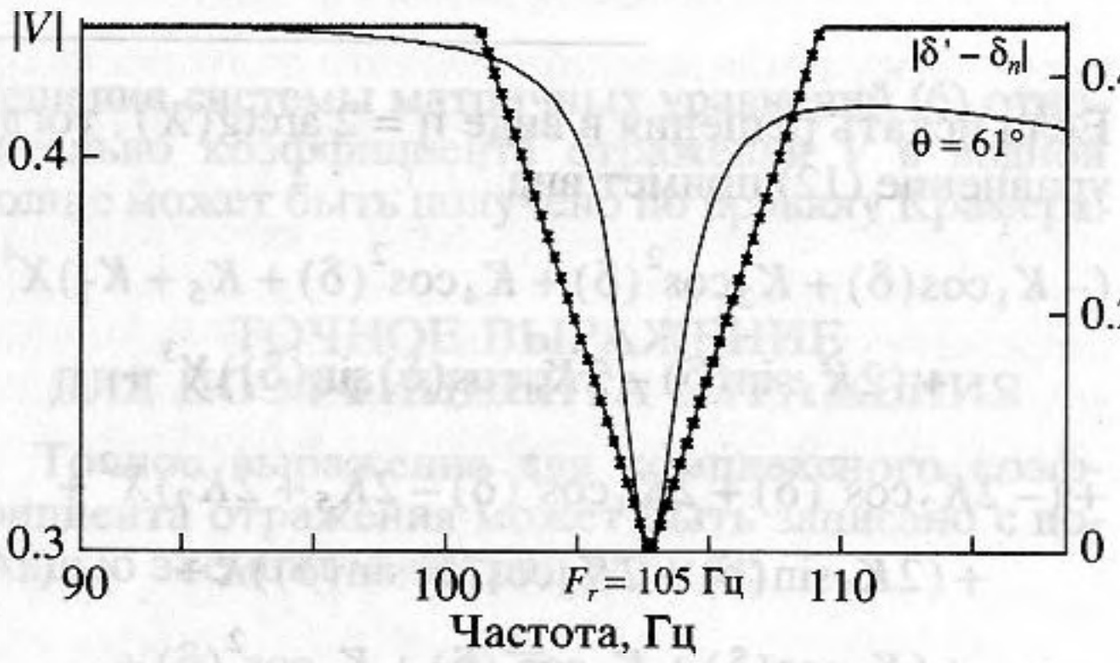

Рис. 3. Положения первого частотного резонанса, определяемого корнями характеристического уравнения, если $|\delta' - \delta_n| = 0$ (выделено маркерами), и частотная зависимость коэффициента отражения (сплошная линия).

Рис. 4. Положения первых резонансов, полученных при точных расчетах (сплошная линия), и положения резонансов, полученных из характеристических уравнений (выделено маркерами), для различных значений продольных скоростей звука (c_l, м/с) в осадочном слое: *1* – 1455 м/с, *2* – 1520 м/с и *3* – 1475 м/с.

помощью формул (16) и (18), и получено хорошее совпадение результатов. Зависимость положений резонансов от продольных скоростей в слое осадка отчетливо наблюдается на рис. 4; δ' и δ_n были рассчитаны для трех различных продольных скоростей звука в слое осадка: линий *1* – $c_l = 1455$ м/с, линия *2* – $c_l = 1520$ м/с и линия *3* – $c_l = 1475$ м/с. Точные расчеты для δ' отмечены сплошной линией, значения δ_n выделены маркерами. Численные расчеты показали, что изменение продольной скорости звука в слое осадков приводит к смещению положений резонансов на плоскости частота–угол падения.

СРАВНЕНИЕ РЕЗОНАНСНОГО ПОДХОДА И ТОЧНЫХ РАСЧЕТОВ

Основное предположение при резонансном подходе состоит в том, что вблизи резонанса амплитуду процесса можно с небольшим отклонением представить резонансной кривой Брейта–Вигнера на фоне некоторого слабо меняющегося основания [10]. Следуя этой идее, точное выражение коэффициента отражения (9) можно разложить в ряд Тейлора по степеням малого параметра $(\delta' - \delta_n)$ и $(\eta' - \eta_n)$ вблизи минимумов коэффициента отражения:

$$V(\delta', \eta') \cong V(\delta_n) + V(\eta_n) + \\ + V'(\delta_n)(\delta' - \delta_n) + V'(\eta_n)(\eta' - \eta_n) + \dots . \quad (21)$$

Линеаризуя (21) в окрестности δ_n и η_n и приравнивая к нулю первые производные в разложении $V'(\delta_n) = 0$, $V'(\eta_n) = 0$, по теореме Ферма приближенное выражение для коэффициента отражения можно записать через материальные характеристики среды:

$$V_r = \sum_n \left[\frac{1}{2} i \left(\left(\frac{1}{2}\frac{i\Delta_9\xi}{(-\gamma+\xi)\beta} + \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{14}\alpha_\infty}{(-\gamma+\xi)} + \right.\right.\right. \\ + \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{11}\mu_\infty\xi\alpha_\infty}{(-\gamma+\xi)\mu} - \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{18}\mu_\infty\gamma_\infty}{\mu\beta(-\gamma+\xi)} \Big)\Delta_{13} - \\ - \left(-\frac{1}{2}\frac{i\Delta_9\beta_\infty}{(-\gamma+\xi)\beta} + \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{14}\xi}{(-\gamma+\xi)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{11}\mu_\infty\xi\gamma_\infty}{(-\gamma+\xi)\mu} + \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{18}\mu_\infty\beta_\infty}{\mu\beta(-\gamma+\xi)} \right)\Delta_{17} \Big) / \alpha_0 + \\ + \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\Delta_{11}\mu\xi\gamma\beta_\infty}{(-\gamma+\xi)} - \frac{\xi^2\mu\Delta_{16}}{(-\gamma+\xi)\alpha} + \frac{\xi\mu_\infty\gamma_\infty\Delta_{15}}{(-\gamma+\xi)\alpha} - \right.\right. \\ - \frac{\xi\mu_\infty\beta_\infty\Delta_{14}}{(-\gamma+\xi)} \Big)\Delta_{17} - \left(\frac{\xi^2\mu\gamma\Delta_{11}}{(-\gamma+\xi)} - \frac{\xi\mu\alpha_\infty\Delta_{16}}{(-\gamma+\xi)\alpha} + \\ \left. \left. + \frac{\mu_\infty\alpha_\infty\xi\Delta_{15}}{(-\gamma+\xi)\alpha} + \frac{\xi\mu_\infty\gamma_\infty\Delta_{14}}{(-\gamma+\xi)} \right)\Delta_{13} \right) / (\omega^2\rho_\infty) \Big) / \left(-\frac{1}{2} i \times \right. \\ \times \left(\left(\frac{1}{2}\frac{i\Delta_9\xi}{(-\gamma+\xi)\beta} + \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{14}\alpha_\infty}{(-\gamma+\xi)} + \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{11}\mu_\infty\xi\alpha_\infty}{(-\gamma+\xi)\mu} - \right.\right. \\ - \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{18}\mu_\infty\gamma_\infty}{\mu\beta(-\gamma+\xi)} \Big)\Delta_{13} - \left(-\frac{1}{2}\frac{i\Delta_9\beta_\infty}{(-\gamma+\xi)\beta} + \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{14}\xi}{(-\gamma+\xi)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{11}\mu_\infty\xi\gamma_\infty}{(-\gamma+\xi)\mu} + \frac{1}{2}\frac{i\Delta_{18}\mu_\infty\beta_\infty}{\mu\beta(-\gamma+\xi)} \right)\Delta_{17} \Big) / \alpha_0 + \\ + \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\Delta_{11}\mu\xi\gamma\beta_\infty}{(-\gamma+\xi)} - \frac{\xi^2\mu\Delta_{16}}{(-\gamma+\xi)\alpha} + \frac{\xi\mu_\infty\gamma_\infty\Delta_{15}}{(-\gamma+\xi)\alpha} - \right.\right. \\ - \frac{\xi\mu_\infty\beta_\infty\Delta_{14}}{(-\gamma+\xi)} \Big)\Delta_{17} - \left(\frac{\xi^2\mu\gamma\Delta_{11}}{(-\gamma+\xi)} - \frac{\xi\mu\alpha_\infty\Delta_{16}}{(-\gamma+\xi)\alpha} + \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\xi\mu_\infty\alpha_\infty\Delta_{15}}{(-\gamma+\xi)\alpha} + \frac{\xi\mu_\infty\gamma_\infty\Delta_{14}}{(-\gamma+\xi)} \right)\Delta_{13} \right) / (\omega^2\rho_\infty) \right] ; \quad (22)$$

$$\Delta_1 = i\exp(-i\eta_n)(\eta' - \eta_n),$$

$$\Delta_2 = i\exp(-i\eta_n) - \Delta_1,$$

$$\Delta_3 = i\exp(i\eta_n)(\eta' - \eta_n),$$

$$\Delta_4 = i\exp(i\eta_n) + \Delta_3,$$

$$\Delta_5 = \exp(-i\delta_n),$$

$$\Delta_6 = i\Delta_5(\delta' - \delta_n),$$

$$\Delta_7 = i\exp(i\delta_n)(\delta' - \delta_n),$$

$$\Delta_8 = \exp(i\delta_n) + \Delta_7,$$

$$\Delta_9 = \alpha\Delta_8\beta - \alpha(\Delta_5 - \Delta_6)\beta + \xi\Delta_4\gamma - \xi\Delta_2\gamma,$$

$$\Delta_{10} = \xi\Delta_8 + \xi(\Delta_5 - \Delta_6) - \Delta_4\gamma - \Delta_2\gamma,$$

$$\Delta_{11} = \exp(i\delta_n) + \Delta_7 + \Delta_5 - \Delta_6 - \exp(i\eta_n) - \\ - \Delta_3 - \exp(-i\eta_n) + \Delta_1,$$

$$\Delta_{12} = \alpha\Delta_8\beta - \alpha(\Delta_5 - \Delta_6)\beta + \gamma^2\Delta_4 - \gamma^2\Delta_2,$$

$$\Delta_{13} = \frac{\mu\xi\beta_\infty\Delta_{12}}{(-\gamma+\xi)\beta} + \frac{\mu\gamma\xi^2\Delta_{11}}{(-\gamma+\xi)} - \frac{\mu_\infty\xi\gamma_\infty\Delta_{10}}{(-\gamma+\xi)} - \frac{\mu_\infty\xi\beta_\infty\Delta_9}{(-\gamma+\xi)\beta},$$

$$\Delta_{14} = -\Delta_8\gamma - (\Delta_5 - \Delta_6)\gamma + \xi\Delta_4 + \xi\Delta_2,$$

$$\Delta_{15} = \xi\Delta_8\gamma - \xi(\Delta_5 - \Delta_6)\gamma + \beta\alpha\Delta_4 - \beta\alpha\Delta_2,$$

$$\Delta_{16} = \gamma^2\Delta_8 - \gamma^2(\Delta_5 - \Delta_6) + \beta\alpha\Delta_4 - \beta\alpha\Delta_2,$$

$$\Delta_{17} = \frac{\mu\xi^2\Delta_{12}}{(-\gamma+\xi)\beta} + \frac{\mu\xi\gamma\alpha_\infty\Delta_{11}}{(-\gamma+\xi)} - \\ - \frac{\xi\mu_\infty\alpha_\infty\Delta_{10}}{(-\gamma+\xi)} + \frac{\xi\mu_\infty\gamma_\infty\Delta_9}{(-\gamma+\xi)\beta},$$

$$\Delta_{18} = \alpha\beta\Delta_8 - \alpha\beta(\Delta_5 - \Delta_6) + \xi^2\Delta_4 - \xi^2\Delta_2.$$

Сумма резонансов берется символически, так как разложение справедливо только вблизи положе-

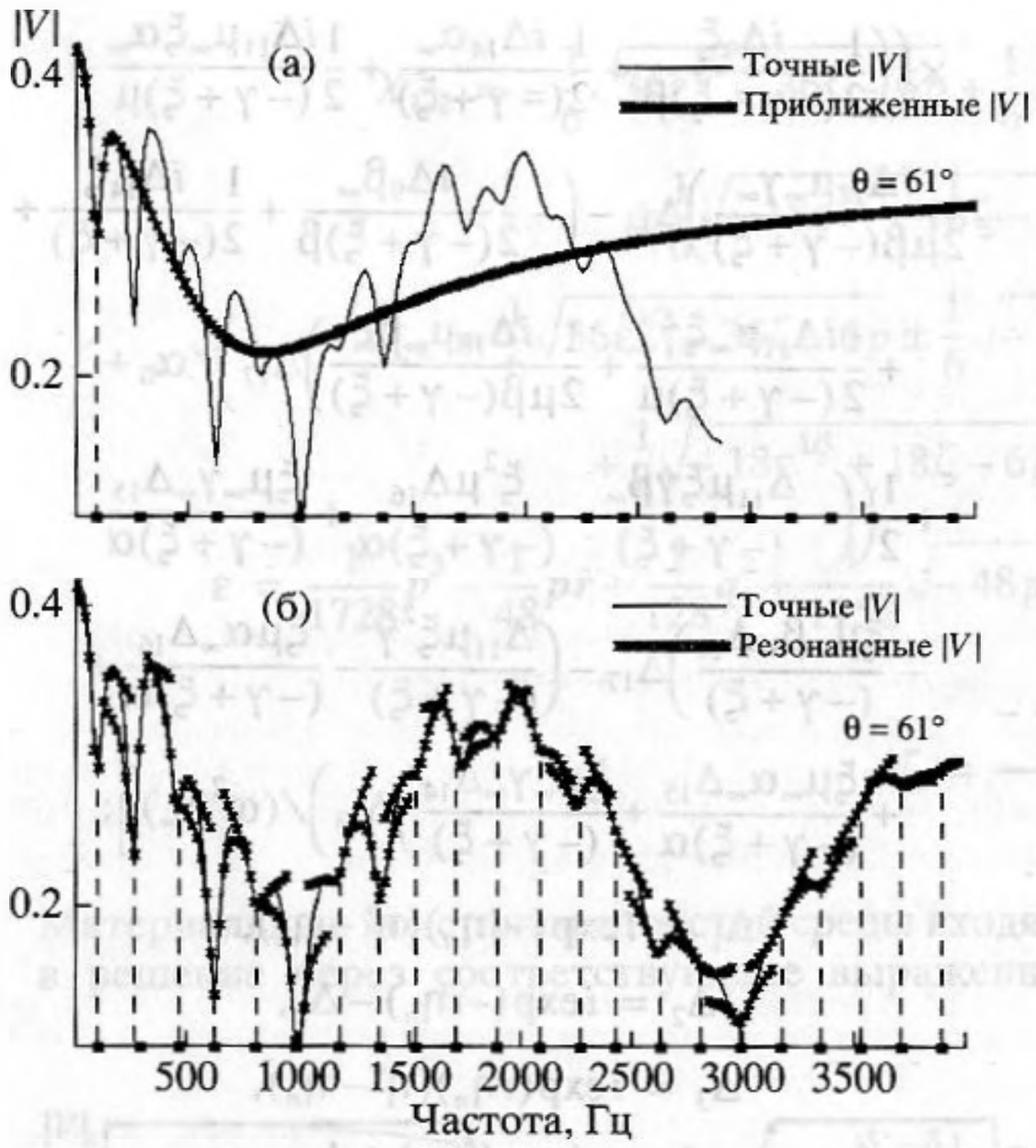

Рис. 5. Сопоставление точных расчетов частотных резонансов коэффициентов отражения с расчетами по приближенной формуле (22) (точные расчеты – сплошная линия, резонансный подход – выделено маркерами): а – с учетом одного слагаемого в формуле (22); б – аппроксимация коэффициента отражения с учетом 22 резонансных слагаемых в формуле (22).

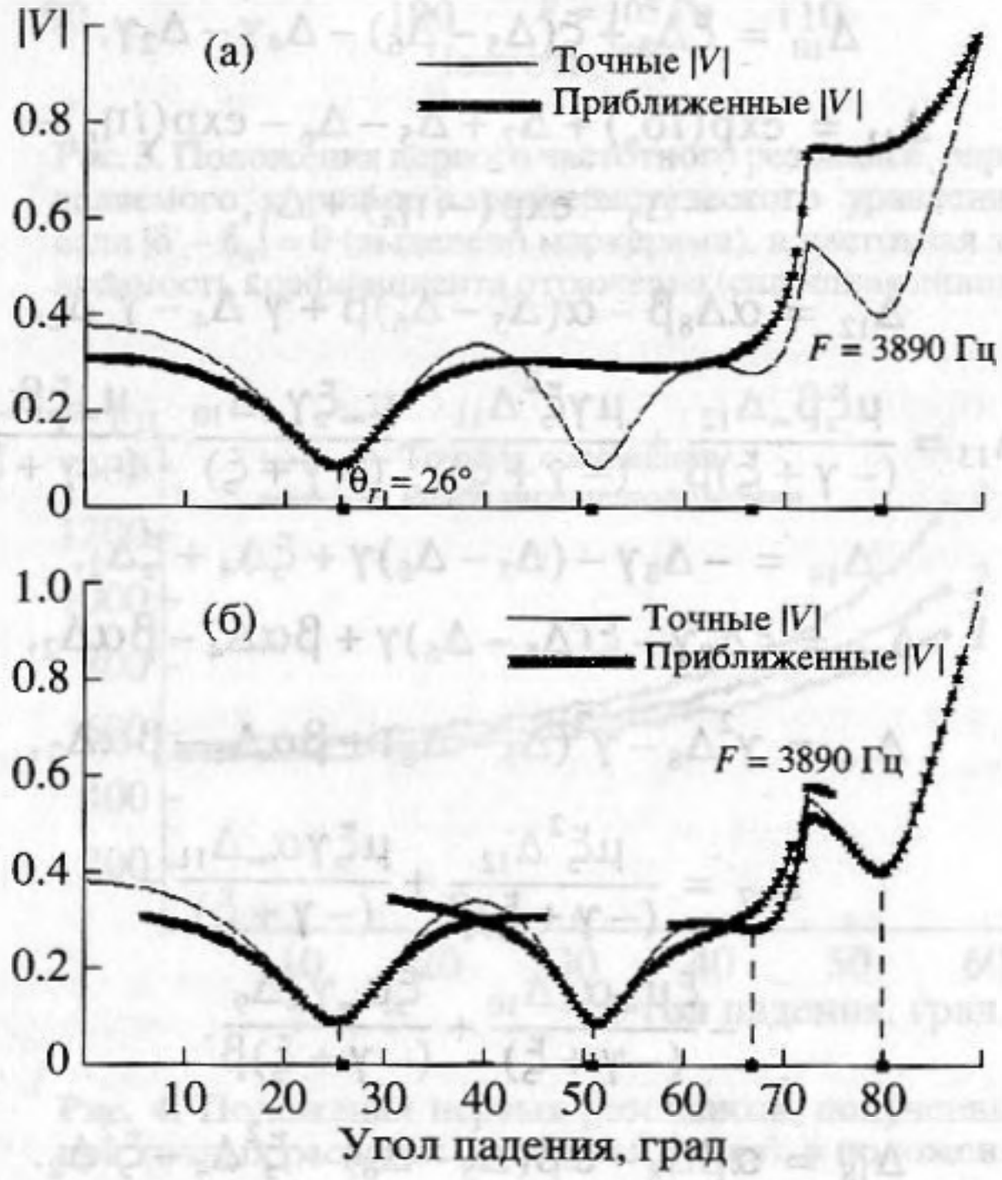

Рис. 6. То же, что и на рис. 5, но для угловых резонансов.

ния резонансных минимумов и неудовлетворительно описывает процесс при удалении от них.

В данной секции иллюстрируется эффективность использования резонансного подхода для модели дна в виде упругого слоя, лежащего на упругом полупространстве (таблица), на примере частотно-угловых резонансов. На рис. 5а приведено сопоставление расчетов частотных зависимостей коэффициентов отражения, выполненных по точной формуле (9), использующей матричную технику Томсона–Хаскелла, и по приближенным формулам (22), полученным при разложении формулы (9) в ряд. Вблизи первого частотного резонанса наблюдается отличное совпадение, и, как и ожидалось, аппроксимация неверна между резонансными пиками (точные расчеты выделены непрерывной линией; кривые, соответствующие приближенному выражению, выделены маркерами). Аналогичные расчеты приведены на рис. 5б, когда разложение коэффициента отражения представлено в виде суммы 22 резонансных членов. Если же частота фиксирована (F = 3890 Гц), то можно получить угловые зависимости коэффициентов отражения вблизи первого углового резонанса (рис. 6а) и вблизи 4 угловых резонансов (рис. 6б). В этом случае также наблюдается хорошее совпадение результатов вблизи резонансов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием матричной техники Томсона–Хаскелла получено точное аналитическое выражение комплексного коэффициента отражения для модели морского дна в виде упругого слоя, покрывающего упругое полупространство. В резонансных условиях получены характеристические уравнения и найдены их корни, определяющие положения частотных и угловых резонансов. Получено приближенное выражение коэффициента отражения, описывающее процесс отражения плоских волн в условиях резонанса для выбранной модели дна. Проведено сопоставление точной теории с приближенными выражениями коэффициентов отражения и получено хорошее совпадение результатов вблизи двух типов резонансов. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 97-05-64712, № 00-05-64956).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vidmar P.J., Foreman T.L.* A plane-wave reflection loss model including sediment rigidity // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. V. 66. № 6. P. 1830.
2. *Лямшев Л.М.* Незеркальное отражение, резонансное рассеяние и излучение звука упругими телами в воде // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 280.
3. *Bao X.L., Raju P.K., Überall H.* Circumferential waves on an immersed, fluid-filled elastic cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. № 5. P. 2704.

4. *Ogi H., Ledbetter H., Kim S., Hirao M.* Contactless mode-selective resonance ultrasound spectroscopy: Electromagnetic acoustic resonance // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 106. № 2. P. 660.
5. *Keltie R.F.* Signal response of elastically coated plates // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 103. № 4. P. 1855.
6. *Frisk G.* Technique for measuring bottom acoustic impedance in shallow water // Proc. of the 4-th ECUA. Italy. 1998. V. 1. P. 511.
7. *Cox B.T., Joseph P.* Bottom reflection phase inversion using modal dispersion curves // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. № 2. P. 1042.
8. *Godin O.A., Chapman D.M.F.* A theory of seimo-acoustic noise resonances // Bol. G.T.A. 1999. V. 40. № 1. P. 36.
9. *Fiorito R., Madigosky W., Überall H.* Resonance theory of acoustic waves interacting with an elastic plate // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. V. 66. № 6. P. 1857.
10. *Nagl A., Überall H., Hoover W.R.* Resonances in acoustic bottom reflection and their relation to the ocean bottom properties // IEEE Transactions on geoscience and remote sensing, 1982. V. GE-20. № 3. P. 332.
11. *Hagl A., Überall H., Yoo Kwang-Bock.* Acoustic exploration of ocean floor properties based on the ringing of sediment layer resonances // Inverse Problems. 1985. V. 1. P. 99.
12. *Fiorito R., Madigosky W., Überall H.* Acoustic resonances and the determination of the material parameters of a viscous fluid layer // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 69. № 4. P. 897.
13. *Keltie R.F.* Signal response of elastically coated plates // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 103. № 4. P. 1855.
14. *Воловов В.И.* Отражение звука от дна океана. М.: Наука, 1993. 267 с.
15. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 214 с.
16. *Агеева Н.С., Крупин В.Д., Перелыгин В.П., Студеничник Н.В.* Построение геоакустической модели дна в мелком море // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 181.
17. *Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г., Петников В.Г.* Частотная зависимость эффективного коэффициента поглощения звука в дне Баренцева моря // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 5. С. 712.
18. *Куртепов В.М.* Об определении частотно-угловой зависимости коэффициента отражения звука от дна в мелком море // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 1. С. 106.
19. *Thomson W.* Transmission of elastic waves through a stratified solid material // J. Appl. Phys. 1950. V. 21. № 1. P. 89–96.
20. *Haskell N.* The dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seism. Soc. Am. 1953. V. 43. № 1. P. 17.
21. *Молотков Л.А.* Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.

Reflection of Plane Waves from an Elastic Layered Medium: Resonance Approach and Numerical Modeling

M. S. Fokina and V. N. Fokin

The resonance formalism developed earlier by H. Überall for a model of a liquid layer overlying a liquid halfspace is extended to a model of an elastic layer overlying an elastic halfspace. Using the Thomson–Haskell matrix technique, an exact analytical expression is obtained for the complex reflection coefficient. Characteristic equations are derived, and their roots, which determine the positions of the resonances of the reflection coefficient for longitudinal and transverse waves, are obtained analytically. In the resonance approach, the exact expression for the reflection coefficient is replaced by an approximate one that describes the behavior of the reflection coefficient near the resonances. The comparison of the exact and approximate values of the reflection coefficient shows a good agreement between the results near the frequency and angular resonances.