

УДК 532.516:532.526

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА ДОРОЖКОЙ КАРМАНА, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ВИХРЕЙ

© 2000 г. А. Б. Езерский, П. Л. Соустов, В. В. Чернов

Институт прикладной физики РАН
603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: ezer@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 30.12.99 г.

Теоретически и экспериментально изучается рассеяние акустических волн вихревой дорожкой, возникающей за обтекаемым воздушным потоком цилиндром, в случае когда длина волны много меньше размеров вихрей. Теоретический расчет показал, что при скоростях потока существенно меньших, чем скорость звука, вихревую дорожку можно представить как движущийся фазовый экран. Показано, что спектр рассеянного звука в дальней зоне состоит из гармоник, разность частот которых кратна частоте следования вихрей. Результаты расчета хорошо коррелируют с экспериментальными данными, полученными при дифракции ультразвука с длиной волны $\lambda = 3$ мм на дорожке Кармана, возникающей за круглым цилиндром диаметром 8 мм при скорости потока 7 м/с.

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени теоретическое и экспериментальное изучение рассеяния звука вихревым следом, возникающим за цилиндром, проведено для случая, когда размер ядер вихрей существенно меньше, чем длина волны [1, 2]. При этом возможна аппроксимация следа за цилиндром последовательностью точечных вихрей [1, 2]. Такая аппроксимация позволила получить аналитические выражения, связывающие параметры течения (частоту следования вихрей, пространственный период, циркуляцию вихрей) и спектр рассеянного звука, и обосновать возможность дистанционной акустической диагностики [3]. На практике приближение точечных вихрей достаточно часто нарушается. Если даже оно справедливо на небольших расстояниях от обтекаемого цилиндра, то может нарушиться при удалении – размер вихрей увеличивается из-за диффузии вниз по течению. Достаточно типичной является ситуация, когда характерный размер вихревых ядер сравним или существенно больше, чем длина волны звука. Именно такой случай изучается в данной работе. Вначале будут изложены результаты численного расчета рассеяния звуковых волн крупномасштабными вихрями. Затем, используя эти результаты, мы покажем, что для анализа процесса рассеяния можно в ряде случаев использовать простую модель, которая позволяет свести воздействие вихрей на акустические волны к фазовым искажениям. В рамках этой модели будет подсчитан спектр рассеянного звука в дальней зоне. В заключительной части работы будут приведены результаты эксперимента, выполненного в аэродинамической трубе, и представлено сравнение с теоретическим расчетом.

1. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЛУЧЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим рассеяние плоской звуковой волны двумерной дорожкой Кармана, поле скорости которой $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = (U, V)$ индуцируется вихрями с конечным размером ядра. Эффектами вязкости и теплопроводности будем пренебрегать, а скорость течения будем считать малой по сравнению со скоростью звука с $M = |\mathbf{U}|/c \ll 1$. Из линеаризованных уравнений движения идеального баротропного газа плотностью ρ_0 для возмущений плотности $\tilde{\rho}$ и горизонтальной и вертикальной компонент скорости \tilde{u} , \tilde{v} получаем

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + V \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{u} \frac{\partial U}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + V \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{u} \frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + V \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} + \rho_0 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

Будем считать, что характерный масштаб L изменения вихревого поля в дорожке Кармана существенно больше длины волны звука: $\lambda_a \ll L$.

Представим решение уравнений (1)–(3) в виде [4]

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(x, y, t) \\ \tilde{v}(x, y, t) \\ \tilde{\rho}(x, y, t) \end{pmatrix} = e^{-i\omega t} e^{i\omega\theta(x, y)} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ \rho(x, y) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\theta(x, y)$ – эйконал.

Предполагая, что частота ω является большим параметром, и сохраняя в уравнениях (1)–(3) лишь члены наиболее высокого порядка по ω , получаем

$$\left(U \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} - 1 \right) u + \frac{c^2}{\rho_0} \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\left(U \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} - 1 \right) v + \frac{c^2}{\rho_0} \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\left(U \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} - 1 \right) \rho + \rho_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} u + \rho_0 \frac{\partial \theta}{\partial y} v = 0. \quad (7)$$

Для того чтобы система (5)–(7) имела ненулевое решение, ее детерминант должен быть равен нулю. Из этого условия получаем

$$(Uf + Vg - 1)((Uf + Vg - 1)^2 - c^2(f^2 + g^2)) = 0. \quad (8)$$

Здесь введены обозначения $f = \partial \theta / \partial x$, $g = \partial \theta / \partial y$. Нетрудно заметить, что решение $Uf + Vg - 1 = 0$ соответствует не акустической волне, а возмущениям, которые переносятся потоком. Мы будем искать ненулевое решение (8).

Решение искалось методом характеристик (см., например, [5]). Для этого вводился лучевой параметр z , а траектории лучей $(x(z), y(z))$ и фаза $\theta(z)$ с точностью до величин первого порядка по M определялись из решения системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. При численных расчетах траекторий звуковых лучей использовалась модель дорожки Кармана, состоящей из неточечных вихрей, завихренность которых Ω сосредоточена в конечной области радиуса R_0 . Предполагалось, что для отдельного вихря с циркуляцией Γ_0

$$\Omega = \begin{cases} \frac{\cos\left(\pi \frac{R}{R_0}\right) + 1}{2} \Gamma_0, & R < R_0, \\ \Omega = 0, & R > R_0. \end{cases} \quad (9)$$

Траектории были рассчитаны для 50 лучей, перпендикулярных при $y = 10$ центральной линии дорожки и расположенных эквидистантно на пространственном периоде (см. рис. 1). При малых скоростях потока (см. рис. 1а) траектории лучей практически не искривляются (ср. с рис. 1б, где представлены траектории лучей при более высоких скоростях) и амплитуда волн остается постоянной. Воздействие вихревого поля на акустические волны сводится в этом случае к дополнительному набегу фазы. Если исключить из эйконала $\theta(x, y)$ линейно нарастающую по y компоненту, одинаковую для всех 50 лучей, то $\Psi(x) = \omega \theta(x, y) - ky$ будет гармонически зависеть от продольной координаты (x) (см. рис. 2, сплошная линия). Период пространственной модуляции дополнительного набегу фазы Ψ совпадает с перио-

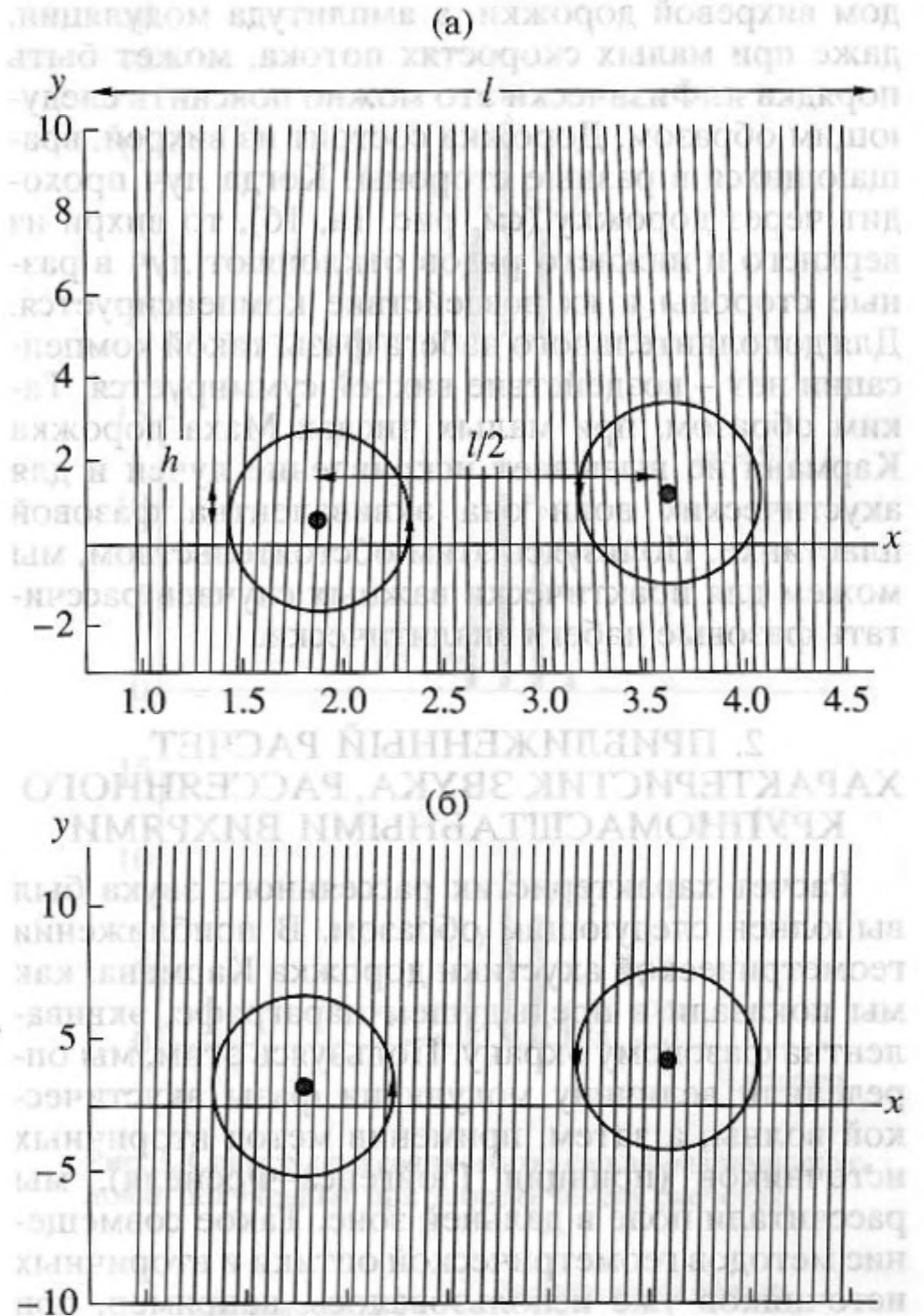


Рис. 1. Траектории 50 лучей, равномерно распределенные на пространственном периоде вихревой дорожки, рассчитанные для $M = 0.02$ (а) и $M = 0.1$ (б). Все расстояния обезразмерены на ширину вихревой дорожки h .

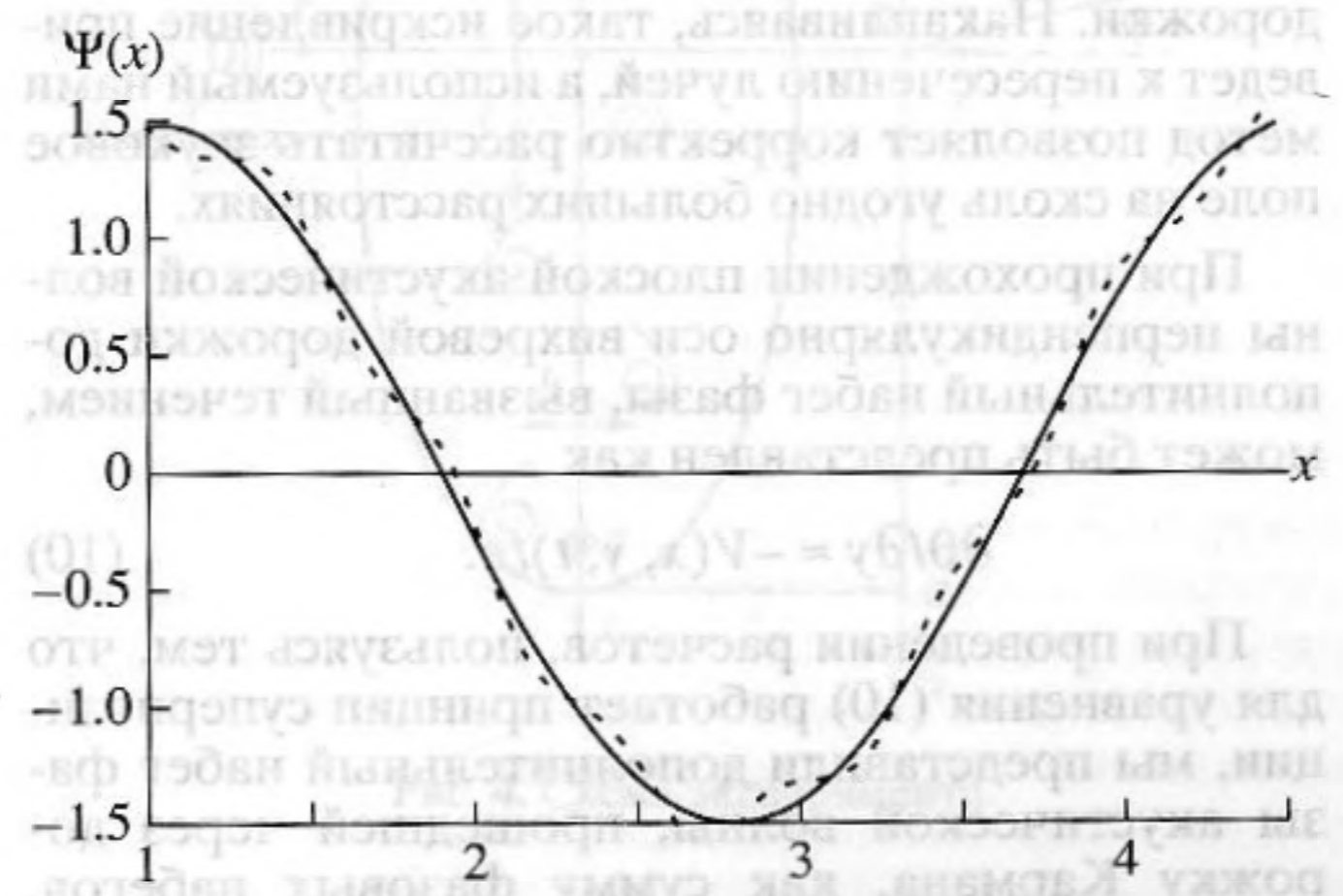


Рис. 2. Фаза акустической волны, прошедшей через вихревую дорожку. Сплошная линия соответствует численному расчету по лучевой теории, пунктирная линия – аналитический расчет по приближенным формулам.

дом вихревой дорожки, а амплитуда модуляции, даже при малых скоростях потока, может быть порядка π . Физически это можно пояснить следующим образом. Дорожка состоит из вихрей, вращающихся в разные стороны. Когда луч проходит через дорожку (см. рис. 1а, 1б), то вихри из верхнего и нижнего рядов отклоняют луч в разные стороны и их воздействие компенсируется. Для дополнительного набега фазы такой компенсации нет – воздействие вихрей суммируется. Таким образом, при малых числах Маха дорожка Кармана не вызывает искривления лучей и для акустических волн она эквивалентна фазовой пластинке. Пользуясь этим обстоятельством, мы можем для практически важных случаев рассчитать фазовые набеги аналитически.

2. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ЗВУКА, РАССЕЯННОГО КРУПНОМАСШТАБНЫМИ ВИХРЯМИ

Расчет характеристик рассеянного звука был выполнен следующим образом. В приближении геометрической акустики дорожка Кармана, как мы показали в предыдущем параграфе, эквивалентна фазовому экрану. Пользуясь этим, мы определили величину модуляции фазы акустической волны, а затем, применив метод вторичных источников (принцип Гюйгенса–Френеля), мы рассчитали поле в дальней зоне. Такое совмещение методов геометрической оптики и вторичных источников уже использовалось, например, при исследовании рассеяния света на больших частицах (см. [6]). Необходимость применения метода Гюйгенса–Френеля объясняется тем, что нас интересует поле на больших расстояниях от вихревой дорожки. Как установлено в предыдущем разделе, искривлением лучей можно пренебречь лишь в непосредственной близости от вихревой дорожки. Накапливаясь, такое искривление приведет к пересечению лучей, а используемый нами метод позволяет корректно рассчитать звуковое поле на сколь угодно больших расстояниях.

При прохождении плоской акустической волны перпендикулярно оси вихревой дорожки дополнительный набег фазы, вызванный течением, может быть представлен как

$$\partial\theta/\partial y \approx -V(x, y, t)/c. \quad (10)$$

При проведении расчетов, пользуясь тем, что для уравнения (10) работает принцип суперпозиции, мы представили дополнительный набег фазы акустической волны, прошедшей через дорожку Кармана, как сумму фазовых набегов, обусловленных парами вихрей, имеющих противоположные по знаку величины циркуляции. Был подсчитан фазовый набег, обусловленный одной парой вихрей, а затем проведено суммирование по бесконечному числу пар. Если считать,

что вихри точечные и искривления лучей не происходит, то дополнительный набег фазы, вызванный вихрями, располагающимися в точках с координатами $x_+ = -l/4, y_+ = 2h$ и $x_- = +l/4, y_- = h$, имеет вид

$$\Psi(x, y) = \frac{\Gamma_0}{2\pi c} \left(\operatorname{arctg} \frac{x + \frac{l}{4}}{y - 2h} - \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{l}{4}}{y - h} \right), \quad (11)$$

где Γ_0 – циркуляция вихрей.

Для бесконечной периодической дорожки, состоящей из вихрей, движущейся со скоростью U_0 , дополнительный набег фазы представляется как сумма

$$\Psi(x, y, t) = \sum_n \frac{\Gamma_0}{2\pi c} \Phi_n(x, y, t),$$

$$\Phi_n(x, y, t) = \operatorname{arctg} \frac{x - U_0 t + nl + \frac{l}{4}}{y - 2} - \operatorname{arctg} \frac{x - U_0 t + nl - \frac{l}{4}}{y - 1}, \quad (12)$$

где l – период вихревой дорожки, $h = 1$ – расстояние между рядами вихрей (см. рис. 1).

Для того чтобы воспользоваться принципом Гюйгенса–Френеля, расположим плоскость вторичных источников на расстоянии $y = y_\infty = 10$ от оси вихревой дорожки. На больших расстояниях происходит экспоненциальное уменьшение пульсаций скорости в вихревой дорожке и вклад вихревого поля скорости при $y > 10$ в дополнительный набег фазы мал. Чтобы провести сравнение с экспериментальными данными, мы использовали следующий прием. Считаем, что интенсивность вихрей зависит от продольной координаты x так, что вихревая дорожка имеет конечную длину. Эта зависимость может быть представлена эмпирической функцией $f(x)$.

$$f(x) = \frac{\operatorname{th}(L - x) + \operatorname{th}(L + x)}{2}. \quad (13)$$

Будем считать, что для вихревой дорожки $L = 3l$, где l – пространственный период вихревой дорожки. Такая аппроксимация достаточно хорошо совпадает с прямыми измерениями пульсаций скорости за цилиндром. С учетом изменения циркуляции вихрей фаза записывается в виде

$$\Psi(x, y, t) = f(x) \sum_n \frac{\Gamma_0}{2\pi c} \Phi_n(x, y, t). \quad (14)$$

Это выражение дает дополнительный набег фазы волны, который при $M = \frac{U_0}{c} = 0.02$ хорошо совпадает с точным расчетом по лучевой теории. На рис. 2 приведено сравнение дополнительного набега фазы по лучевой теории (сплошная линия) и рассчитанное по приближенной формуле (12) (пунктирная линия). В случае когда на дорожку падает плоская волна с амплитудой ρ_0 , поле рассеянного звука ρ_{scat} на расстоянии r от вихревой дорожки может быть представлено как интеграл по области вторичных источников:

$$\rho_{scat} = \frac{i\rho_0}{\lambda} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \omega t\right)} e^{-ik_0 r} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{rk_0}} (1 - e^{\sum f(\zeta)\Phi_n(\zeta, y_0, t)}) e^{-ik_0 r} d\zeta. \quad (15)$$

Здесь $r = \sqrt{\zeta^2 + r_0^2 - 2\zeta r_0 \sin\phi}$.

Как показали вычисления, при рассеянии на вихревой дорожке, представляющей движущуюся дифракционную решетку, в спектре звука возникают гармоники с частотами $F = F_0 + n f_s$, где F_0 – частота падающего звука, f_s – частота срыва вихрей (частота Струхала), а $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Спектры рассеянного звука при частоте падающей волны $F = 120$ кГц, длине области рассеяния $L = 12$ см, расстоянии $r = 120$ см (параметр Френеля $L/\sqrt{\lambda r} \approx 2$) для различных углов ϕ показаны на рис. 3. Выбор параметров, для которых производился расчет, обусловлен условиями проведения эксперимента, который будет подробно описан в следующем разделе. Отметим, что с увеличением расстояния в области дифракции Фраунгофера, спектры рассеянного звука были подобны тем, что показаны на рис. 3, но различие амплитуд ближайших комбинационных гармоник составляло 1–2 дБ (ср. со спектрами, представленными на рис. 3).

3. ЭКСПЕРИМЕНТ

Эксперименты по рассеянию звука крупномасштабными вихрями были проведены в малотурбулентной аэродинамической трубе Института прикладной физики РАН. Схема эксперимента представлена на рис. 4. Изучалось рассеяние ультразвука с частотой $F_0 = 120$ кГц на вихревой дорожке за круглым цилиндром. В качестве источника ультразвука использовался пьезокерамический излучатель, помещенный за экраном с отверстием $r_{em} = 1$ см. Экран был помещен на расстоянии $L_{em} = 65$ см. Параметр Френеля, рассчитанный для излучателя, $F_r = r_{em}/\sqrt{L_{em}\lambda} = 0.2$. Периодическая вихревая дорожка возникала за цилиндром

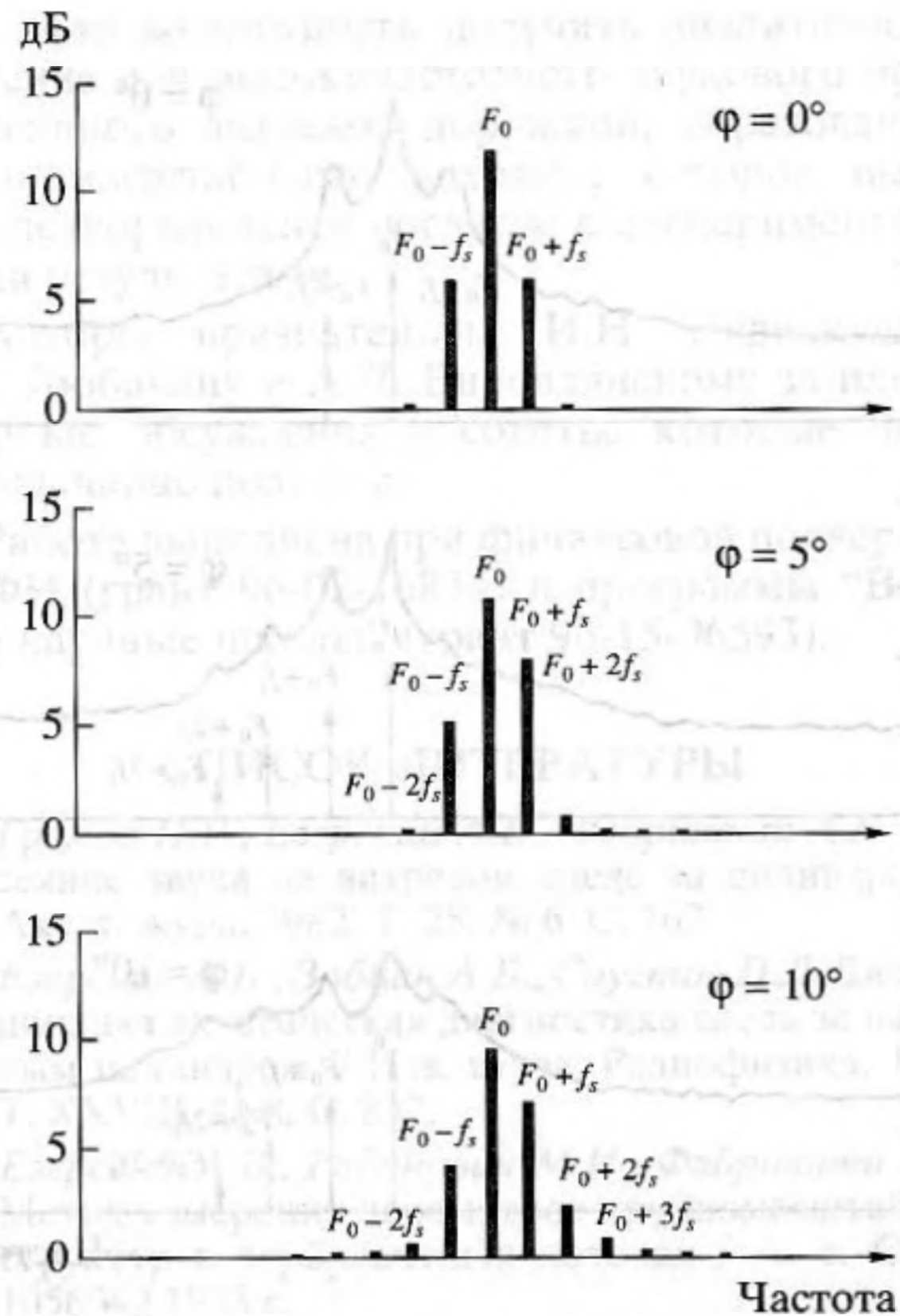


Рис. 3. Спектры рассеянного звука для различных углов ϕ , полученные при теоретических расчетах.

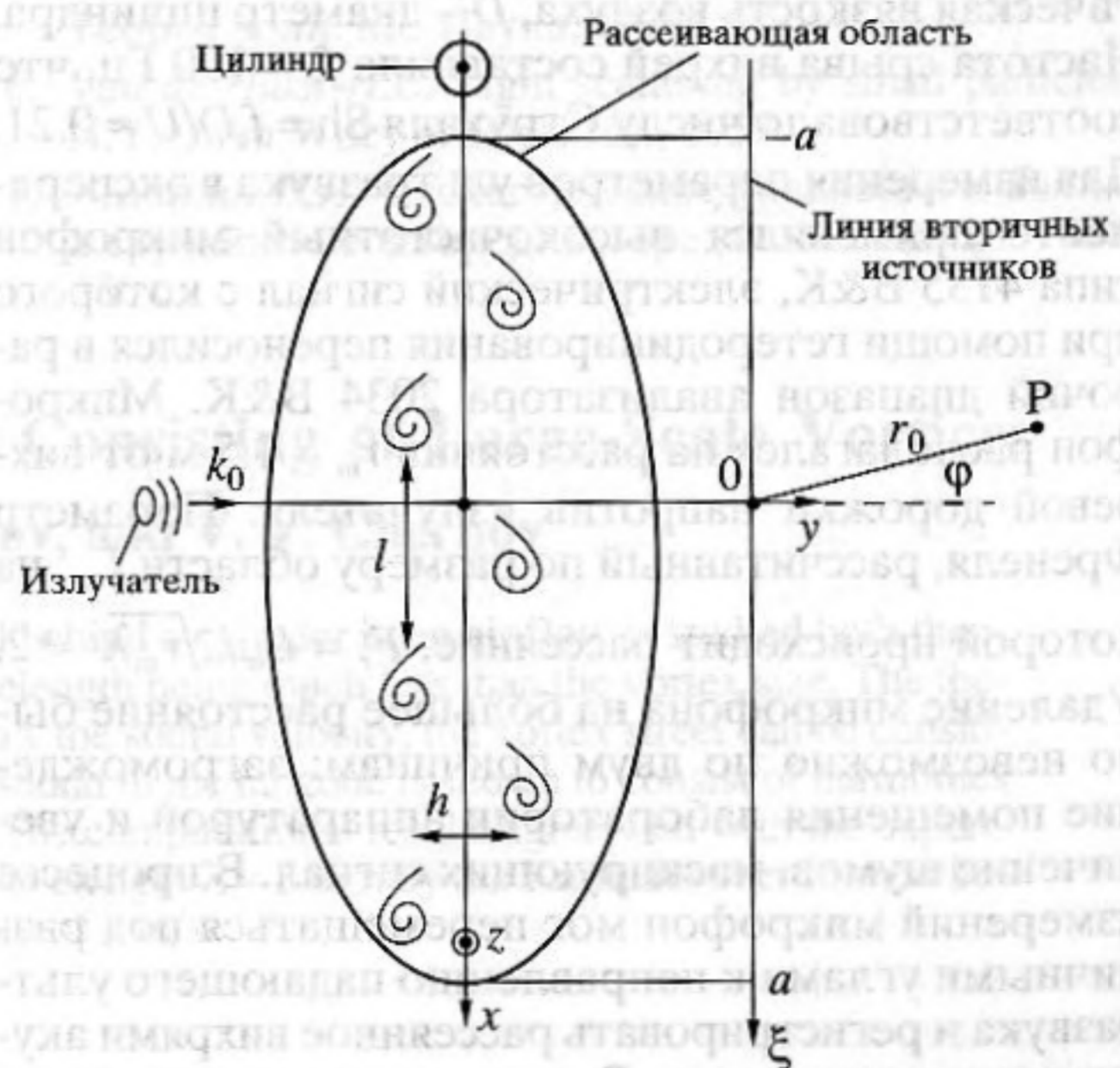


Рис. 4. Схема эксперимента.

диаметром $D = 8$ мм, помещенным в рабочую часть трубы сечением 30×30 см², скорость потока составляла $U = 7$ м/с. При такой скорости потока число Рейнольдса $Re = UD/\nu \approx 3.7 \times 10^3$, где ν – кинема-

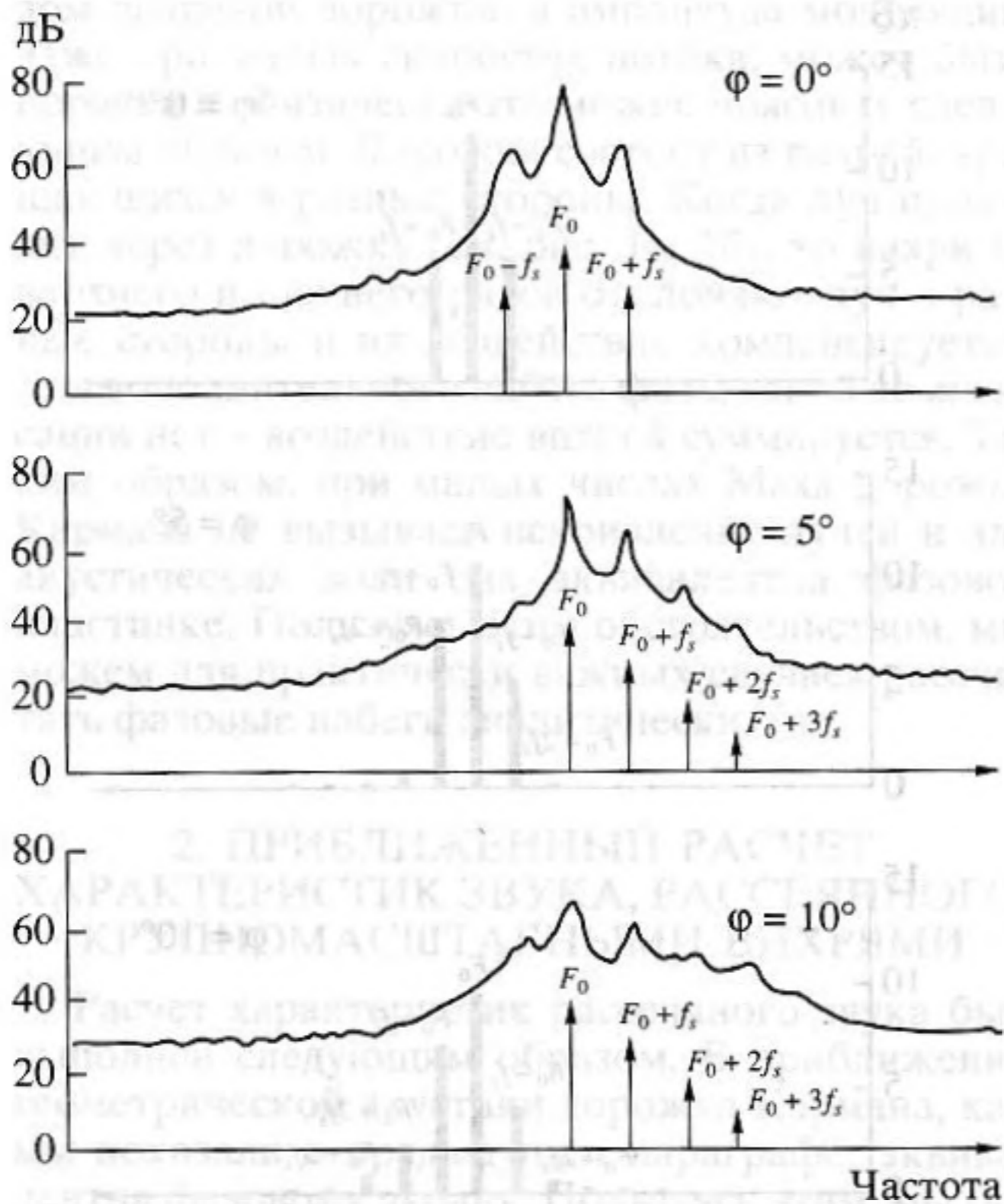


Рис. 5. Спектры рассеянного звука, полученные в эксперименте.

тическая вязкость воздуха, D – диаметр цилиндра. Частота срыва вихрей составляла $f_s = 190$ Гц, что соответствовало числу Струхаля $Sh = f_s D / U \approx 0.21$. Для измерения параметров ультразвука в эксперименте применялся высокочастотный микрофон типа 4135 V&K, электрический сигнал с которого при помощи гетеродинирования переносился в рабочий диапазон анализатора 2034 V&K. Микрофон располагался на расстоянии $r_m \approx 1.5$ м от вихревой дорожки напротив излучателя. Параметр Френеля, рассчитанный по размеру области L_{sc} , на которой происходит рассеяние, $F_r = L_{sc} / \sqrt{r_m \lambda} \approx 2$. Удаление микрофона на большее расстояние было невозможно по двум причинам: загромождение помещения лабораторией аппаратурой и увеличение шумов, маскирующих сигнал. В процессе измерений микрофон мог перемещаться под различными углами к направлению падающего ультразвука и регистрировать рассеянное вихрями акустическое излучение. В связи с тем что не было выполнено условие дифракции Фраунгофера, в эксперименте не определялись диаграммы рассеянного звука, как это делалось в [1, 2], а фиксировались лишь спектры. Такие спектры рассеянного акустического излучения, полученные усреднением по 10 независимым реализациям, приведены на рис. 5 для различных углов рассеяния. В спектре кроме основной несущей частоты F_0 присутству-

ют гармоники с частотами $F_0 \pm n190$ Гц. Как видно из рис. 5, соотношение амплитуд гармоник зависит от угла ϕ . При увеличении угла рассеяния амплитуды высших комбинационных гармоник возрастают, а амплитуда комбинационной гармоники с $n = 1$ уменьшается.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Теоретически полученные (рис. 3) и измеренные в эксперименте спектры акустических волн (рис. 5) имеют качественное сходство, если сравнивать соотношение между амплитудами гармоник в зависимости от угла рассеяния ϕ . Отметим, что спектры рассеянного звука, представленные на рис. 5, существенно отличаются от полученных ранее в работе [1]. Основное отличие заключается в том, что в [1] было зарегистрировано рассеяние только в первую комбинационную гармонику ($n = 1$). Амплитуды остальных гармоник были существенно меньше и практически не были различимы на фоне шумов. В описанном выше эксперименте спектр рассеянного звука содержит большое число гармоник (см. рис. 5в). На первый взгляд это противоречит тому, что большая часть энергии пульсаций в дорожке Кармана, как это неоднократно указывалось в работах [1, 2], сосредоточена в первой гармонике. Тем не менее этот результат хорошо коррелирует с расчетом и может быть интерпретирован следующим образом. Вихревая дорожка для звуковых волн представляет фазовую пластинку. При распространении коротковолнового звука индекс фазовой модуляции может быть достаточно большим даже при малых скоростях потока (см. п. 2). Благодаря тому что при большом индексе синусоидальной модуляции фазы сигнал содержит большое число гармоник, в эксперименте зарегистрированы спектры, показанные на рис. 5в.

Несмотря на качественное совпадение экспериментальных и теоретических данных, количественное соотношение между амплитудами высших гармоник и вид спектра рассеяния различаются. Эти различия, на наш взгляд, связаны с тем, что наряду с рассеянием регулярными полями, для которых развита соответствующая теоретическая модель, существенны эффекты, вызванные шумами. Во-первых, в спектре рассеяния (см. рис. 5) есть пьедестал, который вызван, по-видимому, турбулентной составляющей воздушного потока. Во-вторых, соотношения между амплитудами комбинационных составляющих спектра, рассчитанными в рамках предложенной модели и измеренными в эксперименте существенно различаются. Так, уменьшение амплитуд гармоник с увеличением номера n в расчетах составляет 2–5 дБ, а в эксперименте – 5–7 дБ. По-видимому, различие обусловлено тем, что при числах $Re = 3.7 \times 10^3$

срыв вихрей происходит квазирегулярно. Влияние квазирегулярности можно пояснить на модельном примере. Представим, что мы рассчитываем спектр периодического сигнала

$$S(\omega) = \int \sum_n g(t - \tau_n) e^{i\omega t} dt,$$

$$\tau_n = T_0 n.$$

Спектр такого сигнала состоит из гармоник $m\Omega = m2\pi/T_0$. Предположим, что последовательность квазипериодическая, т.е. $\tau_n = T_0 n + \xi_n$, где ξ_n — независимые случайные гауссовские величины с дисперсией σ . Тогда, если подсчитать усредненный по ансамблю спектр $\langle S(\omega) \rangle$, получим (см., например, [7])

$$\langle S(\omega) \rangle = \langle \int \sum_n g(t - \tau_n) e^{i\omega t} dt \rangle =$$

$$= \sum_n \int g(t) \langle e^{i\omega(t + T_0 + \xi_n)} \rangle dt = e^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega^2} S(\omega).$$

Таким образом, случайный разброс времени срыва вихрей наиболее существенно влияет на амплитуды высокочастотных спектральных составляющих. Именно это и наблюдается в эксперименте. Амплитуды комбинационных гармоник с большими номерами существенно меньше, чем это получается из модели, предполагающей чисто регулярный срыв вихрей.

В заключение следует отметить, что предложенная теоретическая модель позволяет эффективно совмещать метод геометрической акустики и метод вторичных источников Гюйгенса—Френеля.

Это дало возможность получить аналитическое решение для высокочастотного звукового поля, рассеянного вихревой дорожкой, образованной крупномасштабными вихрями, которое имеет удовлетворительное согласие с экспериментальными результатами.

Авторы признательны И.Н. Диденкулову, Л.Я. Любавину и А.Л. Вировлянскому за плодотворные обсуждения и советы, которые были чрезвычайно полезны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-02-16834) и программы “Ведущие научные школы” (грант 96-15-96593).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громов П.Р., Езерский А.Б., Фабрикант А.Л. Рассеяние звука на вихревом следе за цилиндром // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 6. С. 763.
2. Езерский А.Б., Зобнин А.Б., Соустов П.Л. Дистанционная акустическая диагностика следа за нагретым цилиндром // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXVIII. № 8. С. 832.
3. Езерский А.Б., Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. Метод измерения параметров крупномасштабных структур в турбулентных потоках / А. с. СССР 1056042 1983 г.
4. Georges T.M. Acoustic ray paths through a model vortex with a viscous core // J. Acoust. Soc. Amer. 1972. V. 51. P. 206.
5. Виноградова М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
6. Van de Hulst H.C. Light scattering by small particles. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1957.
7. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.

Sound Scattering by a Karman Street Consisting of Large-Scale Vortices

A. B. Ezerskiĭ, P. L. Soustov, and V. V. Chernov

The scattering of acoustic waves by a vortex street formed behind a cylinder in an air flow is studied both theoretically and experimentally for the case of the sound wavelength being much less than the vortex size. The theoretical calculations show that, at flow velocities well below the sound velocity, the vortex street can be considered as a moving phase screen. The spectrum of scattered sound in the far zone is shown to consist of harmonics whose frequencies differ by a multiple of the vortex rate. The computational results agree well with the experimental data obtained for the diffraction of ultrasound of wavelength $\lambda = 3$ mm by the Karman street formed behind a circular cylinder of diameter 8 mm at a flow velocity of 7 m/s.