

УДК 534.535

ВЛИЯНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ПОЛЯ НА СТРУКТУРУ ХОЛЕСТЕРИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА

© 2001 г. Е. Н. Кожевников

Самарский государственный университет

443011 Самара, ул. Акад. Павлова, 1

E-mail: kozhev@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию 25.07.2000 г.

Теоретически исследована пространственно модулированная структура, возникающая в слое холестерического жидкого кристалла при воздействии ультразвуковой волны. Описание структуры проводится на основе уравнений гидродинамики холестерического кристалла, представленных в угловых переменных; в напряжениях вводится анизотропное слагаемое, обусловленное релаксацией ориентационного параметра порядка. Результаты расчета сравниваются с данными эксперимента.

Жидкие кристаллы демонстрируют разнообразие диссипативных структур, которые могут возникать в них при внешнем воздействии, в том числе при периодической деформации кристалла в осциллирующих потоках, вязких волнах, звуковом поле. Наиболее изучены экспериментально и теоретически нематические кристаллы, обладающие простой структурой [1–5]. Действие звука на структуру холестерического жидкого кристалла (ХЖК) менее изучено. Экспериментальные исследования [1, 6, 7] показывают, что при падении ультразвуковой волны на слой ХЖК с планарной ориентацией молекул в последнем возникают периодические искажения структуры, наблюдаемые как домены, эффект носит пороговый характер. Вид структуры зависит от исходной геометрии жидкокристаллического образца, а ее пространственный период уменьшается с продвижением за порог эффекта.

Попытка описать теоретически появление пространственно-модулированной структуры в слое холестерического жидкого кристалла при нормальном падении на него ультразвуковой волны предпринята в работе [8] на основе уравнений гидродинамики ХЖК. В этой работе холестерический кристалл рассматривается как закрученный нематик, а напряжения записываются в форме Лесли–Эриксона. В расчете использован метод возмущений, позволяющий выделить стационарные искажения структуры и определить порог их возникновения; в работе предлагается, что шаг холестерической спирали много меньше толщины ХЖК-слоя, анализируется роль предварительного растяжения слоя. Расчет предсказывает появление доменной структуры в ХЖК-слое при воздействии ультразвука. Вместе с этим значительные количественные расхождения с данными эксперимента, выявленные в детальном сопоставлении в работе [7], указывают на то, что в рамках классической гидродинамики ХЖК невозможно

адекватное описание доменной структуры при сжатии ХЖК-слоя на ультразвуковых частотах.

В настоящей работе воздействие ультразвука на ХЖК-слой рассматривается с других позиций. В работе учитываются релаксационные процессы, приводящие к анизотропии динамической упругости. Общая картина возникновения доменов аналогична описанной в работе [8]: случайные искажения ХЖК-структуры, периодические вдоль слоя, приводят в звуковом поле к осциллирующим вихревым потокам и искажениям структуры, имеющим тот же пространственный период, конвективное взаимодействие вихрей и осциллирующих углов поворота молекул со звуковым полем приводят к стационарным моментам и потокам, усиливающим искажение структуры. При достаточно интенсивном воздействии звука дестабилизирующие моменты начинают превышать упругие моменты Франка и в слое возникает доменная структура. В отличие от [8] в данной работе учитываются процессы релаксации параметра ориентационного порядка в звуковом поле, приводящие к анизотропии динамического упругого модуля среды и меняющие характер движения жидкости. В уравнениях вращения учитываются также конвекция азимутального поворота молекул в холестерических плоскостях и изменение шага холестерической спирали при растяжении слоя в звуковой волне.

Уравнения движения и уравнения вращения молекул, следуя [8], представим в виде

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p + \nabla \hat{\sigma} + \mathbf{F}$$

$$\gamma_1 \mathbf{N} + \gamma_2 [\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] - \nabla_i \frac{\partial g}{\partial \nabla_i \mathbf{n}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1)$$

где ρ – плотность, \mathbf{v} – скорость, \mathbf{n} – директор, $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n})$ – скорость вращения директора

относительно окружающей среды, \hat{v} – тензор скорости деформации, p – давление, g – плотность упругой энергии Франка, $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений.

В тензоре напряжений учтем анизотропное слагаемое $\delta\hat{\sigma}^{(a)}$, обусловленное релаксационными процессами в жидком кристалле в звуковой волне. Для вывода $\delta\hat{\sigma}^{(a)}$ воспользуемся результатами работы [9], где исследована анизотропия акустических свойств нематического кристалла. Согласно [9] анизотропная часть тензора напряжений $\delta\hat{\sigma}^{(a)}$ в звуковой волне с частотой ω может быть представлена в виде

$$\delta\sigma_{ij}^{(a)} = (\Delta E u_{\alpha\alpha} + \mu_3 v_{\alpha\alpha}) n_i n_j,$$

где $\Delta E = DE \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2}$, $\mu_3 = DE \frac{\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$, $2DE = (E_{\parallel} - E_{\perp})|_{\omega=0}^{\omega=\infty}$ – дисперсионный скачок анизотропии упругого модуля нематической среды при ее сжатии вдоль (E_{\parallel}) и перпендикулярно (E_{\perp}) оси кристалла, μ_3 – коэффициент объемной вязкости, τ – время релаксации параметра ориентационного порядка.

Учитывая анизотропию упругости кристалла, представим напряжения $\hat{\sigma}$ в виде

$$\sigma_{ij} = n_i n_j (\Delta E u_{\alpha\alpha} + \mu_3 v_{\alpha\alpha}) + \alpha_1 v_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} n_i n_j + \alpha_2 N_i n_j + \alpha_3 N_j n_i + \alpha_4 v_{ij} + \alpha_5 v_{ik} n_k n_j + \alpha_6 v_{jk} n_k n_i,$$

где α_i – коэффициенты вязкости Лесли. По аналогии с нематическими кристаллами коэффициент вязкости α_3 считаем малым и полагаем равным нулю; это дает $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$.

Деформированная ХЖК-структура характеризуется дополнительной свободной энергией – упругой энергией Франка G . В двухконстантном приближении энергия G имеет вид [10]

$$G = \int_V g dV = \frac{1}{2} K \int_V \{ (\text{div } \mathbf{n})^2 + \lambda (\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{n} + q_0)^2 + (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n})^2 \} dV,$$

где $K = K_{11} = K_{33}$ – упругие постоянные Франка, $\lambda = K_{22}/K$, $q_0 = 2\pi/P_0$, P_0 – шаг холестерической спирали.

Сила \mathbf{F} , фигурирующая в уравнении движения, возникает в деформированной холестерической структуре и определяется варьированием плотности упругой энергии Франка g по перемещениям \mathbf{u} :

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} + \nabla_i \frac{\partial g}{\partial \nabla_i \mathbf{u}} - \Delta \frac{\partial g}{\partial \Delta \mathbf{u}}. \quad (2)$$

В невозмущенном состоянии директор лежит в холестерических плоскостях, вращаясь равно-

мерно при переходе от одной плоскости к другой с периодом P_0 . Зададим искажения структуры углами θ и ϕ , определяющими отклонение молекул соответственно от невозмущенной холестерической плоскости и (в плоскости) от первоначальной ориентации. Однородный поворот на угол ϕ перемещает холестерические слои вдоль оси кристалла на расстояние ϕ/q_0 , неоднородный вдоль слоя поворот молекул приводит к его искажению.

В квадратичном приближении по θ и ϕ упругая энергия Франка имеет вид

$$G = \frac{1}{2} K \int_V \{ (\nabla_{\perp} \phi)^2 + \lambda (\nabla_{\parallel} \phi)^2 + (\nabla \theta)^2 + q_0^2 \theta^2 + 4q_0 \theta (\mathbf{n} \nabla) \phi + (\lambda - 1) (n_1 \nabla_2 \theta - n_2 \nabla_1 \theta)^2 \} dV,$$

где \mathbf{n} – директор в невозмущенной ХЖК-структуре с компонентами в холестерической плоскости n_1 и n_2 ; ∇_{\parallel} и ∇_{\perp} (∇_1, ∇_2) – градиенты соответственно вдоль и перпендикулярно оси холестерической спирали.

Учтем в выражении для энергии возможное растяжение слоя вдоль оси холестерика. Растяжение слоя имеет место, в частности, при непараллельных границах вблизи линий Гранжана и в слое с парными дисклинациями, на которых меняется число холестерических слоев. Растяжение ХЖК-структуры не затрагивает вида гидродинамических уравнений (1), но меняет упругую энергию Франка, новое выражение для которой получим, сохраняя в разложении энергии по углам третьи степени переменных – это приводит к появлению слагаемого $K \tilde{\phi}_z (\nabla_{\perp} \phi)^2 / 2q_0$, где $\tilde{\phi} = -q_0 z \delta'_z + \phi$ – полный угол поворота молекул, обусловленный как вращением молекул на угол ϕ , так и перемещением молекул при растяжении слоя, δ'_z – деформация растяжения. Отбрасывая далее третьи степени углов ϕ и θ , получим следующее выражение для G :

$$G = \frac{1}{2} K \int_V \{ (\nabla_{\perp} \phi)^2 (1 - \delta'_z) + \lambda (\nabla_{\parallel} \phi)^2 + (\nabla \theta)^2 + q_0^2 \theta^2 + 4q_0 \theta (\mathbf{n} \nabla) \phi + (\lambda - 1) [n_1 \nabla_2 \theta - n_2 \nabla_1 \theta]^2 \} dV. \quad (3)$$

Минимум упругой энергии для периодических вдоль слоя возмущений углов θ и ϕ приводит к возможности образования доменов типа квадратная сетка при критической деформации растяжения δ_0 . Деформация δ_0 , волновое число структуры k_0 и размер доменов d_0 на пороге эффекта определяются следующими выражениями

$$k_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{P_0 h}} \left(\frac{2\lambda}{3 + \lambda} \right)^{1/4}, \quad \delta_0 = \frac{P_0}{4h} \sqrt{2\lambda(3 + \lambda)}, \quad (4)$$

$$d_0 = \frac{\pi \sqrt{2}}{k_0} = \sqrt{h P_0} \left(\frac{3 + \lambda}{8\lambda} \right)^{1/4}.$$

Рассмотрим падение по нормали на ХЖК-слой толщины h ультразвуковой волны частоты ω с амплитудой колебательной скорости v_0 . Ограничимся частотами ω , при которых длина вязкой волны меньше, а длина звуковой волны больше толщины ХЖК-слоя. Последнее неравенство позволяет при определении порога эффекта заменить действие звука на среднее по слою.

Выберем при описании эффекта следующую геометрию. Ось z направим по нормали к слою, выбрав за координату $z = 0$ нижнюю границу слоя; оси x, y лежат в плоскости нижней границы слоя; невозмущенные холестерические слои параллельны плоскости (xy) . Считаем далее, что

$$n_1 = n_x, \quad n_2 = n_y, \quad \nabla_1 = \partial_x, \quad \nabla_2 = \partial_y.$$

На ультразвуковых частотах выполняется неравенство $\eta\omega/\rho c^2 \ll 1$, которое позволяет исключить из уравнения движения (1) акустические моды применением двойной операции rot. Сохраним в уравнениях квадратичные слагаемые, пропорциональные произведению углов поворота молекул θ и φ на скорости и учтем изменение волнового числа q_0 вследствие растяжения среды в звуковом поле. Проводя необходимые преобразования, приходим к следующим уравнениям.

Уравнения вращения:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \left[\varphi_{,t} + q_0 v_z - q_0 u_{zz} v_z - \frac{1}{2} (\text{rot } v)_z + \right. \\ \left. + n_x n_y (v_{xx} - v_{yy}) + (n_x^2 - n_y^2) v_{xy} \right] - \Gamma_\varphi = 0, \quad (5) \\ \gamma_1 (\dot{\theta} - n_\alpha v_{z,\alpha} - \theta v_{zz}) - \Gamma_\theta = 0. \end{aligned}$$

Здесь Γ_θ и Γ_φ – упругие моменты, сопряженные углам θ и φ и определяемые через свободную энергию (3) уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \Gamma_\varphi &= \nabla \frac{\partial g}{\partial \nabla \varphi} - \frac{\partial g}{\partial \varphi} = \\ &= K[(1 - \delta'_z) \Delta_\perp \varphi + \lambda \varphi_{,zz} + 2q_0 n_\alpha \theta_{,\alpha}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\theta &= \nabla \frac{\partial g}{\partial \nabla \theta} - \frac{\partial g}{\partial \theta} = K[\Delta \theta - q_0^2 \theta - 2q_0 n_\alpha \varphi_{,\alpha} + \\ &+ (\lambda - 1)(n_x^2 \theta_{,yy} + n_y^2 \theta_{,xx} - 2n_x n_y \theta_{,xy})], \end{aligned}$$

индекс α здесь и далее пробегает значения $\alpha = x, y$; $\Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Для получения выражения поля силы F согласно формуле (2) необходимо в выражении для упругой энергии Франка перейти к материальным угловым переменным θ_m, φ_m и исключить повороты молекул, связанные с вращением среды как

целого. Этот переход осуществляется подстановкой в формулу (3) углов θ и φ в виде:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_m - n_\alpha u_{z,\alpha}, \\ \varphi &= \varphi_m - q_0 u_z - \frac{1}{2} (u_{x,y} - u_{y,x}). \end{aligned}$$

Фиксируя θ_m и φ_m в упругой энергии и подставляя ее в (2), находим:

$$\begin{aligned} F_z &= -q_0 \Gamma_\varphi + n_\alpha \Gamma_{\theta,\alpha}, \\ F_{x,y} - F_{y,x} &= \frac{1}{2} \Delta_\perp \Gamma_\varphi, \quad F_{\alpha,\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Выражая Γ_θ и Γ_φ из уравнений (5) через вязкие моменты приходим к следующей системе уравнений движения:

$$\begin{aligned} (\rho \partial_t \Delta - \eta \hat{D}_1) v_z &= -\gamma \Delta_\perp n_\alpha \dot{\theta}_{,\alpha} + \\ &+ [\Delta E u_{zz} \Delta_\perp + (\mu_3 + \alpha_5) v_{zz} \Delta_\perp] n_\alpha \theta_\alpha + [\text{rot rot } \mathbf{g}]_z - \\ &- \alpha_6 \partial_z^2 (v_{zz} n_\alpha \theta_{,\alpha}) - \gamma \Delta_\perp \{ q_0 [\varphi_{,t} + q_0 v_z - \Omega_z + \\ &+ n_x n_y (v_{xx} - v_{yy}) + (n_x^2 - n_y^2) v_{xy} - \\ &- n_\beta \partial_\beta (\dot{\theta} - n_\alpha v_{z,\alpha} - \theta v_{zz}) \}, \quad \beta = x, y; \\ &[\rho \partial_t - (\eta + \frac{1}{4} \alpha_5) \Delta_\perp - \eta \partial_z^2] \Omega_z - \\ &- \frac{1}{4} (n_x^2 - n_y^2) \{ \alpha_5 (\partial_x^2 - \partial_y^2) \Omega_z - \alpha_6 (v_{xy,z} + v_{zz,xy}) + \\ &+ \frac{\alpha_6}{2} ((3\partial_x^2 + \partial_y^2) v_{x,y} + (3\partial_y^2 + \partial_x^2) v_{y,x}) \} + \\ &+ \alpha_5 n_x n_y \partial_x \partial_y \Omega_z = \\ &= -\frac{1}{2} \gamma \left\{ \Delta_\perp \dot{\varphi}_m + n_x n_y [\partial_x \partial_y \dot{\varphi}_m + \frac{1}{2} \Delta_\perp (v_{xx} - v_{yy})] + \right. \\ &+ \frac{1}{2} (n_x^2 - n_y^2) \Delta_\perp v_{xy} \left. \right\} - \frac{1}{2} \alpha_6 \partial_z [v_{zz} (n_y \theta_{,x} - n_x \theta_{,y})] + \\ &+ \partial_z (\text{rot } \mathbf{g})_z, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{g} = \rho[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla\mathbf{v})]$ – конвективная сила, $\dot{\varphi}_m = \varphi_{,t} + q_0 v_z - \Omega_z$ – материальная скорость вращения молекул φ_m вокруг оси z , $\Omega_z = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{v})_z = \frac{1}{2} (v_{y,x} - v_{x,y})$ – z -компонента угловой скорости

вращения среды. \hat{D}_1 – дифференцирующий оператор вида

$$\hat{D}_1 = \frac{2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\gamma}{4\eta} \Delta_{\perp}^2 + \frac{\alpha_4 + \alpha_5/2 + 3/8\alpha_1}{\eta} \Delta_{\perp} \partial_z^2 + \partial_z^4, \\ \eta = \frac{1}{2}(\alpha_4 + \alpha_6/2).$$

Линеаризуем далее систему уравнений (5)–(6) по угловым переменным и возмущениям скорости δv , рассматривая скорость движения среды и ее сжатие в падающей звуковой волне как зависящие от времени и координат коэффициенты. Представим θ , φ , δv в виде суммы стационарного и осциллируемого с частотой звука слагаемых:

$$\theta = \theta_2 + \theta', \quad \varphi = \varphi_2 + \varphi', \quad \delta v = v_2 + v',$$

где индекс “2” обозначает стационарную часть, а штрих – осциллирующую, и выделим из системы (5)–(6) уравнения для стационарных и нестационарных переменных. Рассмотрим искажения структуры с минимальной свободной энергией, когда угол θ представлен в виде $\theta = n_{\alpha} \tau_{\alpha}$, где τ_{α} , φ медленно меняются вдоль оси кристалла; медленно меняющимися по функциям будем считать также и возмущения скорости. Усредним все слагаемые в уравнениях для φ , v по шагу спирали P_0 и отбросим в уравнении для осциллирующих переменных упругие моменты, малые по сравнению с вязкими.

В анализе эффекта ограничимся полным отражением звука от границы $z = h$, считая границу твердой; звуковое поле в слое при этом определяется стоячей волной

$$v_z = 2v_0 \sin \omega t \sin[\omega(z-h)/c],$$

где c – скорость звука.

При формулировке уравнений движения учтем соотношение

$$\frac{|\langle (v \nabla) \theta' \rangle|}{|\langle \theta' v_{zz} \rangle|} \sim \frac{\langle \sin^2 k_{3B} h \rangle}{\langle \cos^2 k_{3B} h \rangle} \sim (k_{3B} h)^2 \ll 1,$$

что позволяет отбросить в уравнениях гидродинамики слагаемые, содержащие конвекцию θ (здесь угловые скобки означают усреднение по толщине слоя, черта сверху – усреднение по периоду звуковых колебаний).

Проведя необходимые преобразования, получим следующую самосогласованную систему уравнений для θ' , φ , v'_z , Ω'_z , θ_2 , φ_2 , $v_{2,z}$, Ω_{2z} :

$$\theta'_t - n_{\alpha} v'_{z,\alpha} - \theta_2 v_{zz} = 0, \\ \varphi_t + q_0(v'_z + v_z) - \Omega'_z = 0,$$

$$(\rho \partial_t \Delta - \eta \hat{D}_1) v'_z = [(\Delta E u_{zz} + (\mu_3 + \alpha_6) v_{zz})] \Delta_{\perp} \times \\ \times \langle n_{\alpha} \theta_{2,\alpha} \rangle - \alpha_6 \partial_z^2 (v_{zz} \langle n_{\alpha} \theta_{2,\alpha} \rangle), \\ \left[\rho \partial_t - \left(\eta + \frac{1}{4} \alpha_5 \right) \Delta_{\perp} - \eta \partial_z^2 \right] \Omega'_z = \\ = -\frac{1}{2} \alpha_6 \partial_z^2 (v_{zz} \langle n_x \theta_{2,y} - n_y \theta_{2,x} \rangle), \\ \gamma [\overline{\varphi'_z (v'_z + v_z)} - q_0 \overline{u_{zz} v'_z} + q_0 v_{2z} - \Omega_{2z}] - \\ - K[(1 - \delta'_z) \Delta_{\perp} \varphi_2 + \lambda \varphi_{2,zz} + 2q_0 \langle n_{\alpha} \theta_{2,\alpha} \rangle] = 0, \\ \gamma (n_{\alpha} v_{2z,\alpha} + \overline{\theta' v_{zz}}) + K \{ \Delta \theta_2 - q_0^2 \theta_2 - 2q_0 n_{\alpha} \varphi_{2,\alpha} + \\ + (\lambda - 1)(n_x^2 \theta_{2,yy} + n_y^2 \theta_{2,xx} - 2n_x n_y \theta_{2,xy}) \} = 0, \\ \hat{D}_0 v_{2z} = -\Delta_{\perp} (\Delta E u_{zz} + (\mu_3 + \alpha_6) v_{zz}) \langle n_{\alpha} \theta'_{,\alpha} \rangle - \\ - \langle (\text{rot rot } g)_z \rangle + \alpha_6 \partial_z^2 (v_{zz} \langle n_{\alpha} \theta'_{,\alpha} \rangle) + \\ + \gamma \Delta_{\perp} q_0 (q_0 v_{2z} - \Omega_{2z}), \\ \left[\left(\eta + \frac{1}{4} \alpha_5 \right) \Delta_{\perp} + \eta \partial_z^2 \right] \Omega_{2z} = \overline{\partial_z (\text{rot } g)_z} + \\ + \frac{1}{2} \gamma \Delta_{\perp} (q_0 v_{2z} - \Omega_{2z}) + \frac{1}{2} \alpha_6 \partial_z^2 (v_{zz} \langle n_x \theta'_{,y} - n_y \theta'_{,x} \rangle), \\ \text{div } v_2 = 0.$$

Здесь \hat{D}_0 – дифференцирующий оператор вида

$$\hat{D}_0 = \frac{\alpha_4 + \alpha_5/2}{\eta} \Delta_{\perp}^2 + \frac{\alpha_4 + \alpha_5/2}{\eta} \Delta_{\perp} \partial_z^2 + \partial_z^4.$$

В уравнениях (7) и далее скорость v_z и ее производные по z относятся к звуковой волне в слое, угловые скобки означают усреднение по шагу холлестерической спирали.

Считаем стационарные возмущения нулевыми на границах:

$$\varphi_2|_{z=0,h} = \theta_2|_{z=0,h} = 0; \quad v_{2z}|_{z=0,h} = 0,$$

а осциллирующие переменные v'_z и θ' определяем как частное решение соответствующих неоднородных уравнений, пренебрегая при этом эффектами в пограничных слоях, толщина которых меньше длины вязкой волны. Условие существования ненулевого решения системы (7) соответствует порогу образования доменов.

Для оценочных расчетов порога эффекта представим стационарные возмущения зависящими от координат x, y по периодическому закону и удовлетворяющими нулевым граничным условиям

$$\varphi_2, \theta_2, v_{2z} \sim \exp(ik_x x + ik_y y) \sin(k_z z),$$

где k_x, k_y – волновые числа, определяющие вид доменной структуры, $k_z = 2\pi/h$, при этом $\partial_\alpha = ik_\alpha$, $\Delta_\perp = -k_x^2 - k_y^2 = -k^2$.

Предполагаем выполняющимися следующие неравенства

$$k_z < k < q_0, \quad (8)$$

и рассмотрим возникновение структуры типа “квадратная сетка”. Для такой структуры обращаются в ноль усредненные по шагу спирали слагаемые

$$\langle n_x \theta'_{,y} - n_y \theta'_{,x} \rangle, \quad \langle n_x \theta_{2,y} - n_y \theta_{2,x} \rangle, \quad (\text{rot } g)_z$$

и, как следствие, скорость вращения среды: $\Omega'_z = 0$.

Из предпоследнего уравнения (7) получим соотношение для скорости стационарного вращения молекул относительно холестерической жидкости

$$\Omega_{2z} - q_0 v_{2z} = -A q_0 v_{2z}, \quad (9)$$

где $A = (4\eta + \alpha_5)/(2\gamma + 4\eta + \alpha_5)$.

При выполнении условий (8) звуковое поле в ХЖК-слое приводит к следующим осцилляциям скорости v'_z и углов θ' и φ' :

$$v'_z = \frac{k^2}{2B} \tau_{2\alpha, \alpha} \{ [\eta |D_1| \Delta E + |\Delta| \rho (\mu_3 + \alpha_6) \omega^2] u_{zz} + [\eta (\mu_3 + \alpha_6) |D_1| - |\Delta| \rho \Delta E] v_{zz} \},$$

$$\theta' = \frac{k^2}{2B} n_\beta \tau_{2\alpha, \alpha\beta} \{ [\eta (\mu_3 + \alpha_6) |D_1| - |\Delta| \rho \Delta E] u_{zz} - [\eta |D_1| \Delta E + |\Delta| \rho (\mu_3 + \alpha_6) \omega^2] \omega^{-2} v_{zz} \},$$

$$\varphi' = -q_0 (u'_z + u_z).$$

Здесь введены обозначения

$$B = \eta^2 [|D_1|^2 + 4\sigma^4 |\Delta|^2], \quad \sigma = \sqrt{\rho \omega / 2\eta},$$

$$|D_1| = \frac{2\alpha_4 + \alpha_5 + \gamma}{4\eta} k^4 + \frac{\alpha_4 + \alpha_5/2 + 3/8\alpha_1}{\eta} k^2 k_z^2 + k_z^4,$$

$$|\Delta| = k^2 + k_z^2.$$

Параметр σ имеет смысл волнового числа в вязкой волне, распространяющейся вдоль оси z .

Усредненные слагаемые в стационарных уравнениях системы (7) равны

$$\overline{\gamma \varphi'_{,z} (v'_z + v_z)} = -q_0 \overline{v'_z u_{zz}} = -L m_0^2 q_0 \tau_{\alpha, \alpha},$$

$$\overline{\gamma \theta' v_{zz}} = -L m_0^2 n_\beta \tau_{\alpha, \alpha\beta}, \quad (10)$$

$$\overline{[\Delta E u_{zz} + (\mu_3 + \alpha_6) v_{zz}] \langle n_\alpha \theta'_{,\alpha} \rangle} = M q_0^2 m_0^2 \tau_{\alpha\alpha},$$

$$\overline{\langle (\text{rot rot } g)_z \rangle} = -\rho \Delta_\perp \overline{(v'_z v_{zz})} = N q_0^2 k^2 m_0^2 \tau_{\alpha, \alpha},$$

где

$$L = \frac{4\gamma k^2}{B} (\eta |D_1| \Delta E + |\Delta| \rho (\mu_3 + \alpha_6) \omega^2),$$

$$M = \frac{k^6}{2q_0^2 B} \Delta E \Delta E \left\{ 1 + 2 \left(\frac{\alpha_6}{\mu_{3,0}} \right) + \left(\frac{\alpha_6}{\mu_{3,0}} \right)^2 (1 + \omega^2 \tau^2) \right\},$$

$$N = \frac{2\rho k^2 \omega^2}{B q_0^2} [\rho k^2 \Delta E - \eta (\mu_3 + \alpha_6) |D_1|],$$

$m_0 = v_0/c$ число Маха в падающей на ХЖК-слой звуковой волне, $\mu_{3,0} = DE\tau$ – коэффициент вязкости μ_3 на низких частотах ($\omega\tau \ll 1$).

Подставляя усредненные произведения (10) в стационарные уравнения (7) и используя формулу (9), приходим к следующей самосогласованной системе уравнений для $\varphi_2, \theta_2, v_{2,z}$ с коэффициентами, содержащими внешнее воздействие m_0^2

$$\begin{cases} \gamma A q_0 v_{2z} - L m_0^2 q_0 \tau_{\alpha, \alpha} + \\ + K \{ [k^2 (1 - \delta'_z) + \lambda k_z^2] \varphi - q_0 \tau_{\alpha, \alpha} \} = 0, \\ \gamma A k^2 v_{2z} - L m_0^2 k^2 \tau_{\alpha, \alpha} + \\ + K \left[\left(2q_0^2 + \frac{3 + \lambda}{4} k^2 \right) \tau_{\alpha, \alpha} - 2q_0 k^2 \varphi \right] = 0, \\ \gamma A v_{2z} - (M + N) m_0^2 \tau_{\alpha, \alpha} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Значение m_0 , при котором начинают нарастать возмущения с волновым числом k , определим приравниванием нулю определителя системы (11):

$$m_0(\omega, k) = \left\{ \frac{K_{33}}{4k^2} [(3 + \lambda)(1 - \delta'_z) k^4 + 8\lambda k_z^2 q^2 - 8k^2 q^2 \delta'_z + \lambda(3 + \lambda)(1 - \delta'_z) k_z^2 k^2] \times \right. \\ \left. \times [(L - M - N)(2q^2 + k^2 + \lambda k_z^2)]^{-1} \right\}^{1/2}.$$

Волновое число k на пороге эффекта и пороговое значение $m_{0,th}$ находятся минимизацией $m_0(\omega, k)$ по k .

Конечное выражение для m_0 как функции параметров кристалла и геометрии ячейки громоздко. Приведем упрощенное выражение для m_0 , полученное с учетом неравенства

$$\frac{|N + M|}{L} \ll 1, \quad (12)$$

и неравенств (8); их справедливость для типичных параметров кристалла, шага спирали, толщины

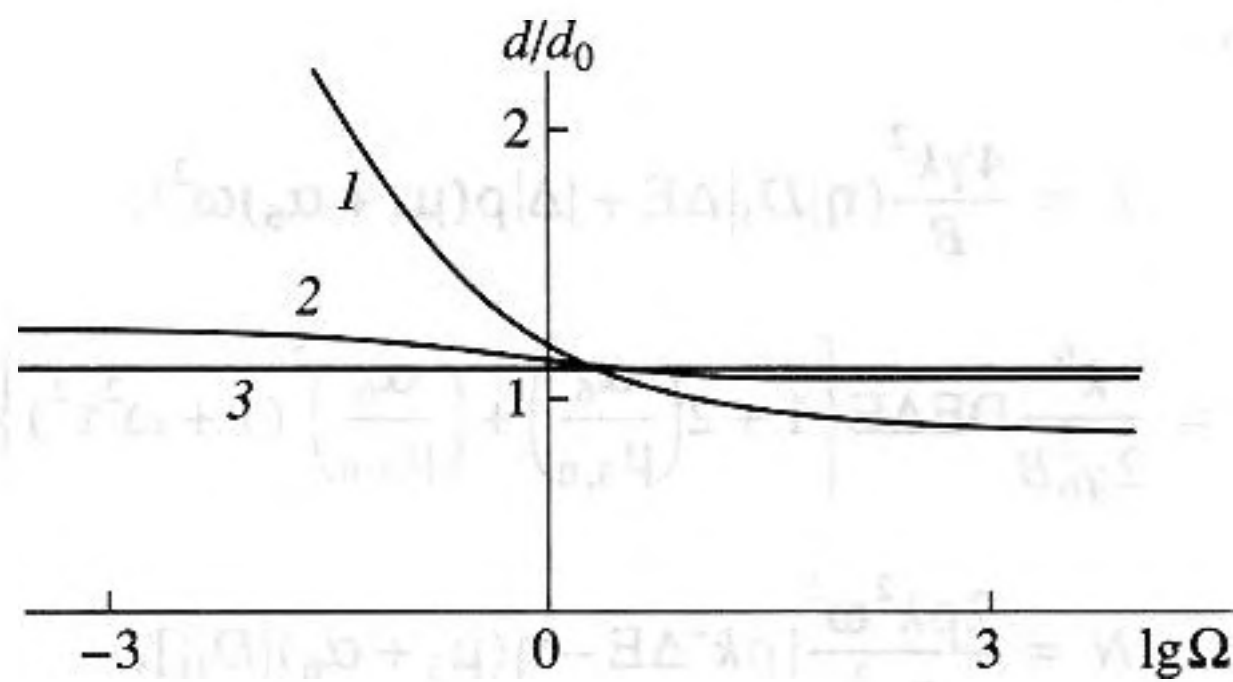


Рис. 1. Зависимость приведенного размера домена d/d_0 от параметра $\Omega = 4\sigma^4/k_0^4$ при различных растяжениях слоя: 1 – $\delta = 0.2$; 2 – $\delta = 0.5$; 3 – $\delta = 0.9$.

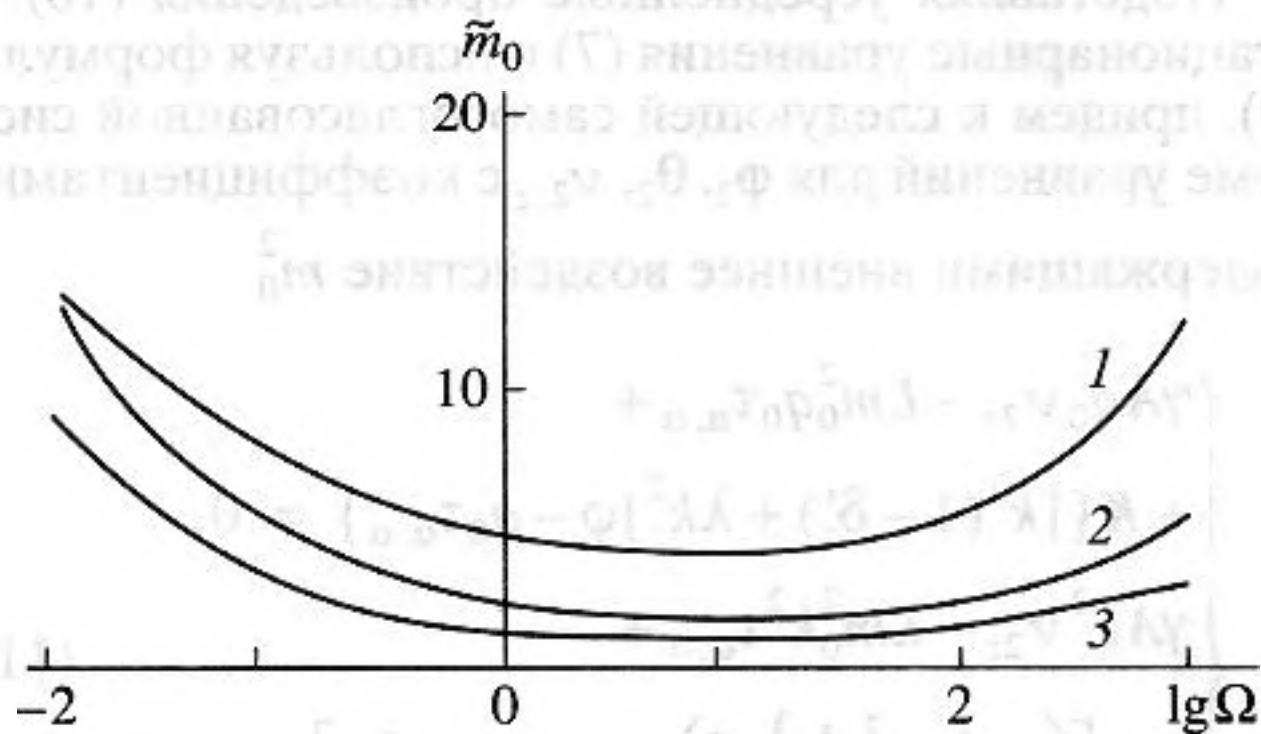


Рис. 2. Зависимость приведенного порога $\tilde{m}_{0,th}$ от параметра $\Omega = 4\sigma^4/k_0^4$ при различных растяжениях слоя: 1 – $\delta = 0.2$; 2 – $\delta = 0.5$; 3 – $\delta = 0.9$.

слоя и частот, рассмотренных ниже, подтверждается непосредственной проверкой.

При выполнении неравенств (8, 12) выражение для $m_0(\omega, k)$ приводится к виду

$$m_0(\omega, k) = \sqrt{\frac{\eta K_{33} k_0^4 (3 + \lambda)}{32 \gamma D E q^2}} F(\omega, k). \quad (13)$$

Функция $F(\omega, \xi)$ определяет зависимость m_0 от частоты через безразмерный параметр $\Omega = 4\sigma^4/k_0^4$ и от волнового числа k через отношение $\xi = k/k_0$

$$F(\omega, k) = \left\{ \frac{(\xi^4 + 1 - 2\xi^2 \delta)(\xi^4 + \Omega)a^2 + \Omega}{\xi^4 + a\xi^2} \Omega \right\}^{1/2}.$$

Здесь $a = \rho/(\eta \tau k_0^2)$, параметр δ определяет отношение растяжения слоя к критическому δ_0 , при котором структура ХЖК становится неустойчивой в отсутствие внешнего воздействия: $\delta = \delta'_z/\delta_0$.

Анализ уравнений (7) показывает, что конвекция возмущений угла φ' и растяжения слоя в зву-

ковой волне, а также стационарные моменты $\gamma \theta' v_{zz}$ дестабилизируют структуру ХЖК, в то время как потоки v_{zz} – стабилизируют. Основное воздействие оказывается связанным с конвекцией φ' и растяжения, угловые моменты, создаваемые этими механизмами, в $q_0/k_z \gg 1$ раз превосходят моменты, обусловленные градиентами скорости стационарных потоков, и только они учитываются при выводе формулы (13).

Волновое число доменной структуры на пороге эффекта k_{th} и период $d = \pi \sqrt{2}/k_{th}$ определяются минимизацией функции $F(\omega, k)$ по волновому числу k . Уравнение для k_{th} , полученное при дифференцировании $F(\omega, k)$, не допускает решения в конечном виде, поэтому ограничимся аналитическим представлением результатов для больших и малых частот.

В случае больших частот, когда $\Omega \gg 1$, размер доменов оценивается по формуле

$$d \approx d_0 \sqrt{\frac{a + 2\delta}{1 + \sqrt{1 + a^2 + 2a\delta}}}, \quad (14)$$

где d_0 – размер доменов при статическом растяжении слоя (4); при реальных значениях параметра $a \gg 1$ (для рассмотренных ниже параметров кристалла и толщины слоя получим $a \approx 6$) размер доменов приближается к величине d_0 . Функция $F(\omega, k_{th})$ на высоких частотах аппроксимируется формулой

$$F(\omega, k_{th}) \approx \left\{ 2 \frac{\sqrt{1 + a^2 + 2a\delta}(1 - a\delta - 2\delta^2) + 1 + a^2 + 2a\delta}{(1 + \sqrt{1 + a^2 + 2a\delta})(1 + a^2 + 2a\delta + \delta)} \times (a^2 + \Omega) \right\}^{1/2} \sim \omega^{1/2}.$$

На низких частотах, когда $\Omega \ll 1$, размер доменов и функция $F(\omega, k)$ аппроксимируются простыми соотношениями

$$\frac{d}{d_0} \approx \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \sim \omega^{-1/2},$$

$$F(\omega, k_{th}) \approx \sqrt{\frac{2a}{\sqrt{\Omega}}} \sim \omega^{-1/2}.$$

Зависимости приведенного размера домена d/d_0 и приведенного числа Маха $\tilde{m}_0 = m_0/\sqrt{\eta K_{33} k_0^4 (3 + \lambda)/32 \gamma D E q_0^2}$ от Ω для $a = 1$ и различных значений растяжения слоя δ , вычисленные с помощью формулы (13), представлены на рис. 1, 2. Из рис. 1 видно, что при больших значениях Ω размер доменов перестает зависеть от частоты для любых δ , в этом случае он определяет

ся по формуле (14). На кривой $\tilde{m}_0(\Omega)$ (рис. 2) можно выделить диапазон частот, в котором порог эффекта слабо зависит от частоты.

Сравним теоретические результаты с данными эксперимента, приведенными в работах [1, 7]. В этих работах исследовалось воздействие ультразвука на структуру ХЖК в диапазоне частот 0.3–3.6 МГц, в них отмечается появление доменной структуры типа квадратная сетка со сторонами, параллельными и перпендикулярными линиями натирания граничной поверхности; сетка появляется лишь на отдельных участках ХЖК-слоя. Размеры доменов пропорциональны $(P_0 h)^{1/2}$; пороговая амплитуда скорости $v_{0,th}$ и размер доменов практически не зависят от частоты, значение $v_{0,th}$ слабо зависит от толщины слоя h . Пороговая интенсивность звуковой волны, падающей на ХЖК-слой, по порядку величины равна $I_{th} \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ Вт/м². Экспериментальная картина воздействия ультразвука на ХЖК-слой качественно соответствует теории, построенной для растянутой структуры; растянутые области в эксперименте, по-видимому, ограничены дисклинациями.

Численный анализ решения проведем для параметров холестерического кристалла равным типичным значениям для нематических кристаллов: $K_{33} \approx 0.5 \times 10^{-11}$ Н, $\alpha_4 \approx \gamma_1 \approx 0.1$ Па, $\alpha_6 \approx 0$, $\rho \approx 10^3$ кг м⁻³, скорость звука $c = 1.5 \times 10^3$ м/с [10], $DE = 10^7$ Н/м², $\tau = 3 \times 10^{-8}$ с [11, 12]. Значение λ определим, сопоставляя теоретическое выражение для размера доменов с данными эксперимента. В работе [7] приведен экспериментальный размер доменной структуры, возникающей при статическом растяжении ХЖК-слоя толщины $h = 22$ мкм с шагом спирали $P_0 = 4.3$ мкм: $d_0 \approx 18.5$ мкм [7]. Приравняв теоретический размер d_0 , данный последней из формул (6), экспериментальному, найдем отношение упругих модулей: $\lambda = K_{22}/K_{33} \approx 2.8 \times 10^{-2}$. Это значение λ использовано в работе при численном расчете. Критическое растяжение при тех же значениях h , P_0 , λ , равно $\delta_0 \approx 0.02$.

Численное сравнение теоретических результатов с данными эксперимента без использования свободных параметров провести не удастся, поскольку растяжение δ в эксперименте приходится считать неопределенным. Действительно, размер доменов d_0 при растяжении слоя ХЖК-слоя и критическое растяжение δ_0 определяются из вида энергии Франка и связаны с параметрами кристалла формулами (4). Значение d_0 , приведенное в работе [7], позволило определить одновременно параметр λ и критическое растяжение $\delta_0 \approx 0.02$. В то же время приведенное в работе [7] статическое растяжение $\delta'_z = 0.046$ превосходит значение δ_0 более чем вдвое и находится в противоречии с величиной d_0 . Поэтому численный расчет m_0 и d

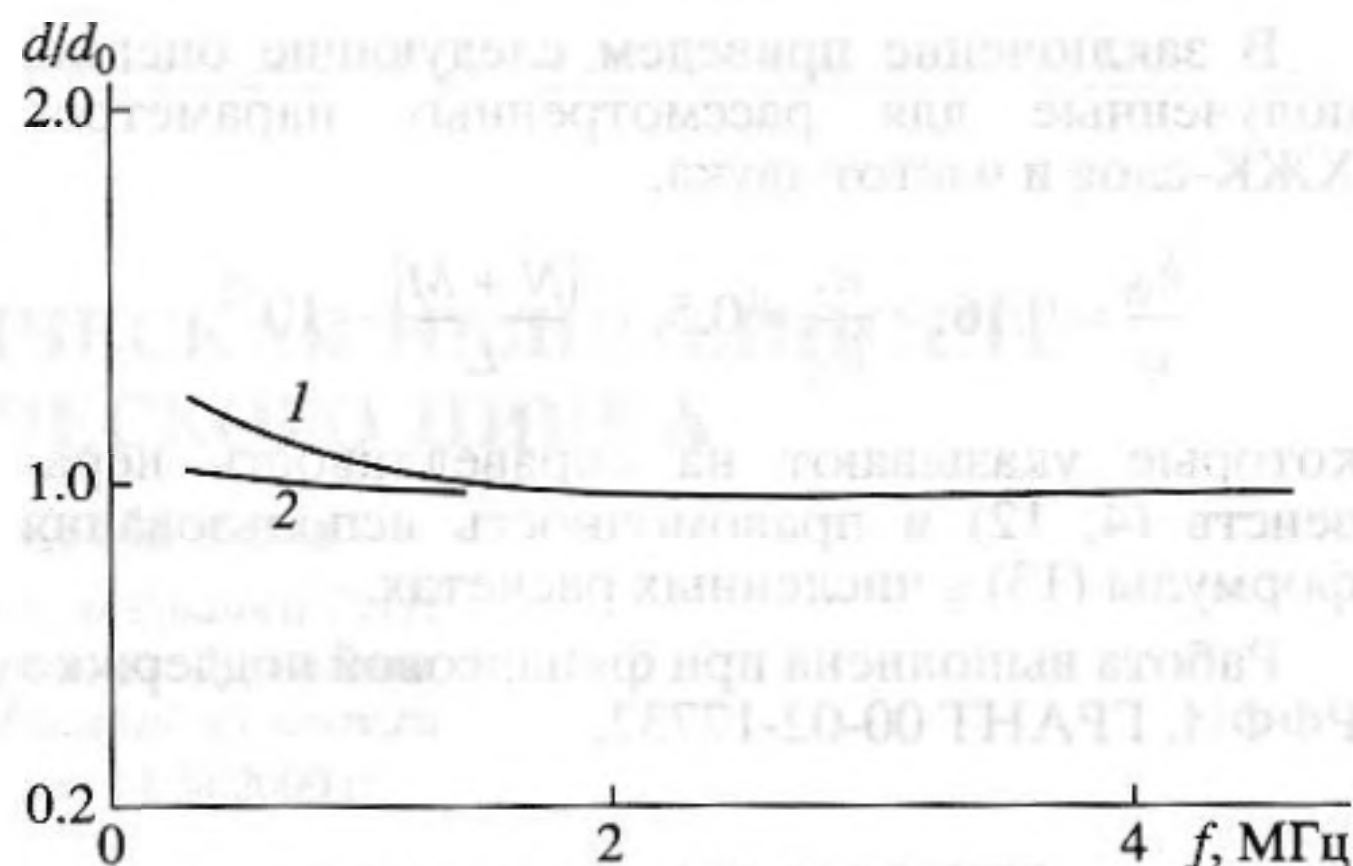


Рис. 3. Зависимость приведенного размера домена d/d_0 от частоты f при различных растяжениях слоя: 1 – $\delta = 0.5$; 2 – $\delta = 0.9$. Толщина слоя и шаг спирали: $h = 22$ мкм, $P_0 = 4.3$ мкм.

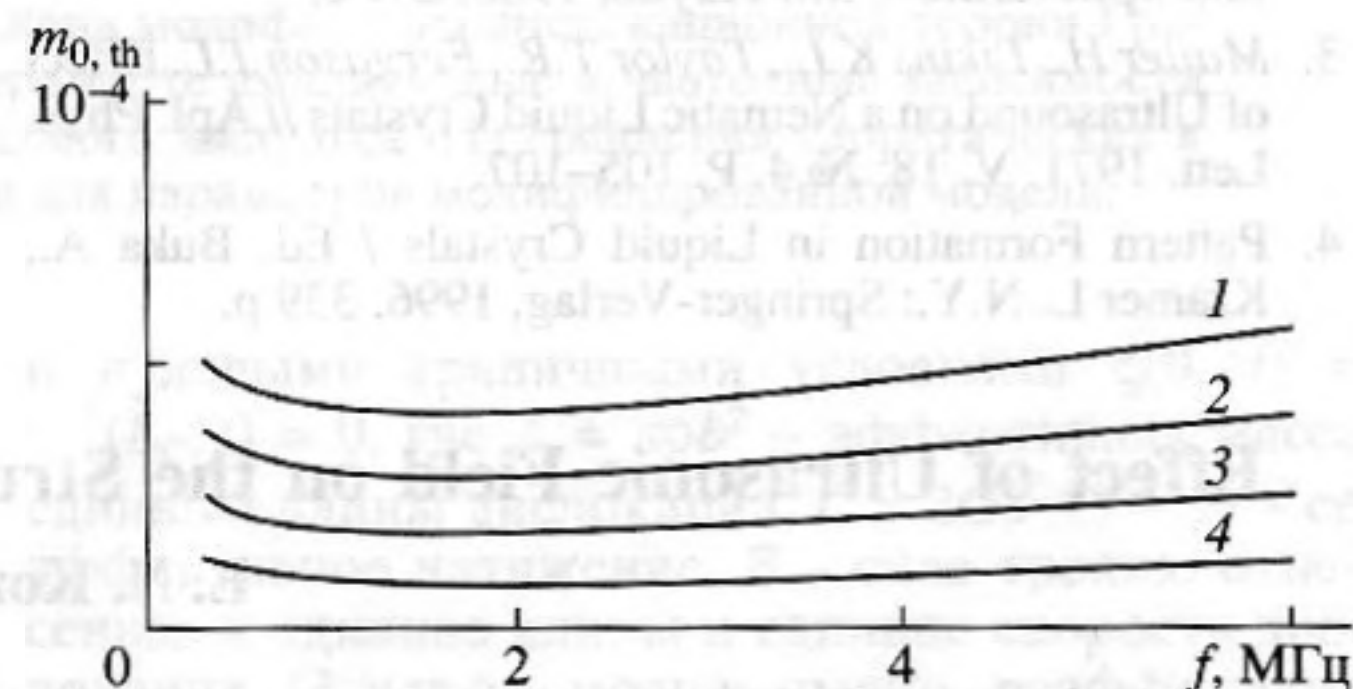


Рис. 4. Зависимость пороговой амплитуды $m_{0,th}$ от частоты f при различных растяжениях слоя: 1 – $\delta = 0$; 2 – $\delta = 0.5$; 3 – $\delta = 0.7$; 4 – $\delta = 0.9$. Толщина слоя и шаг спирали: $h = 22$ мкм, $P_0 = 4.3$ мкм.

проведем для различных растяжений слоя и укажем те значения δ , при которых теоретические результаты согласуются с результатами эксперимента.

Теоретический размер доменов и порог эффекта для толщины слоя $h = 22$ мкм и шага спирали $P_0 = 4$ мкм в диапазоне частот от 0.3 МГц до 6 МГц приведены на рис. 3, 4, где построены кривые d/d_0 и $m_{0,th}$ как функции частоты для различных значений параметра растяжения. В указанном диапазоне частот для всех значений δ расчет показывает слабую зависимость от частоты как размера доменной структуры, так и порога эффекта, что соответствует данным эксперимента. Размер доменов $d = d_0$ совпадает с размером доменов, приведенным в [1, 7] для развитой структуры. Для теоретической интенсивности звука на пороге эффекта $I_{th} = \rho c^3 m_{0,th}^2$ получим указанный в работе [7] порядок величины $I_{th} \sim 10^{-5}$ Вт/м² при относительных растяжениях слоя $\delta \approx 0.7 - 0.8$.

В заключение приведем следующие оценки, полученные для рассмотренных параметров ХЖК-слоя и частот звука,

$$\frac{k_{th}}{q} \approx 0.16, \quad \frac{k_z}{k_{th}} \approx 0.5, \quad \frac{|N+M|}{L} \sim 10^{-2},$$

которые указывают на справедливость неравенств (4, 12) и правомочность использования формулы (13) в численных расчетах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, ГРАНТ 00-02-17732.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kapustina O.A.* Acoustooptical Phenomena in Liquid Crystals // *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 1984. V. 112. № 1–2. P. 1–164.
2. *Капустин А.П., Капустина О.А.* Акустика жидких кристаллов. М.: Наука, 1986. 247 с.
3. *Mailer H., Likins K.L., Taylor T.R., Ferguson J.L.* Effect of Ultrasound on a Nematic Liquid Crystals // *Apl. Phys. Lett.* 1971. V. 18. № 4. P. 105–107.
4. *Pattern Formation in Liquid Crystals* / Ed. Buka A., Kramer L. N.Y.: Springer-Verlag, 1996. 339 p.
5. *Krekhov A.P., Kramer L.* Orientational instability of nematic under oscillatory flow // *J. Phys. France.* 1994. V. 4. P. 677–688.
6. *Гурова И.Н., Капустина О.А., Лупанов В.Н., Чулая Г.С.* // IV Межд. Конф. соц. стран по жидким кристаллам. Тбилиси. 1981. Тезисы докладов. Т. 2. С. 74.
7. *Гурова И.Н., Капустина О.А.* Неустойчивость текстуры Гранжана холестерического жидкого кристалла в ультразвуковом поле // *Акуст. журн.* 1997. Т. 43. № 3. С. 338–343.
8. *Кожевников Е.Н.* Доменная структура в холестерическом жидком кристалле при воздействии ультразвука // *ЖЭТФ.* 1987. Т. 92. № 4. С. 1306–1315.
9. *Кожевников Е.Н.* Критическая анизотропия скорости и поглощение звука в нематическом жидком кристалле // *Акуст. журн.* 1990. Т. 36. № 3. С. 458–462.
10. *Stephen M.J., Straley J.P.* Physics of liquid crystals // *Rev. of Modern Physics.* 1974. V. 46. № 4. P. 617–704.
11. *Castro C.A., Hikata A., Elbaum C.* Ultrasonic attenuation anisotropy in nematic liquid crystal // *Phys. Rev. A.* 1978. V. 17. № 1. P. 353–362.
12. *Bacri G.C.* Magnetic field effect on the attenuation of ultrasound waves in a nematic liquid crystal // *J. Phys.* 1974. V. 35. № 7–8. P. 601–607.

Effect of Ultrasonic Field on the Structure of a Cholesteric Liquid Crystal

E. N. Kozhevnikov

A spatially modulated structure arising in a layer of a cholesteric liquid crystal under the effect of an ultrasonic wave is studied theoretically. The structure is described on the basis of the equations of fluid dynamics for cholesteric liquid crystals. The equations are represented in terms of the angular variables. An anisotropic term caused by the relaxation of the orientational order parameter is introduced into the expressions for the stress. The results of calculations are compared with experimental data.