АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2001, том 47, № 5, с. 717–719

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.21

СВЯЗЬ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЖЕСТКОЙ СТЕНКЕ С ПУЛЬСАЦИЯМИ ДАВЛЕНИЯ, ГЕНЕРИРУЕМЫМИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

© 2001 г. С. А. Рыбак

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4
E-mail: bvp@akin.ru

Поступила в редакцию 24.08.2000 г.

Пульсации давления в турбулентном пограничном слое (ТПС), возникающие вследствие нелинейных взаимодействий вихревых компонент поля, исследуются во множестве теоретических и экспериментальных работ. Упомянем обзор [1], а также работы [2] и [3]. В то же время механизм линейной трансформации вихревых волн в продольные на жесткой либо упругой стенке изучен в гораздо меньшей степени. Настоящая работа продолжает исследование [4] и посвящена связи пульсаций давления со сдвиговыми (вязкими) напряжениями на стенке.

Для описания поля давления в ТПС воспользуемся уравнением Лайтхилла:

$$\frac{1}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} T_{ik}. \qquad (1)$$

На самой стенке вследствие условия прилипания нелинейные члены в правой части будем считать пренебрежимо малыми сравнительно с линейными вязкими членами. Сперва учтем в правой части лишь линейный член, описывающий сдвиговую вязкость:

$$T_{ik} = -\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_s}{\partial x_s}\right) = -\sigma_{ik}, \qquad (2)$$

здесь μ – коэффициент вязкости. Легко видеть, что правая часть уравнения (1) тождественно равна нулю для сдвиговой (вихревой) компоненты поля скоростей, в которой вдали от стенки и сосредоточена в основном энергия турбулентного потока, поскольку выполняется условие

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \qquad (3)$$

Следовательно, в турбулентном потоке правая часть уравнения (1) отсутствует и по этой причине отсутствует генерация пульсаций давления вязкими напряжениями. Следует оговориться, что речь идет об однородной жидкости. Если вязкий параметр $\mu(\mathbf{r})$ неоднороден вдоль жидкости, то сделанное утверждение не выполняется. Ситуация меняется, однако, в пристеночной области, поскольку на стенке происходит генерация продольной компоненты поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{x}_i, \mathbf{t})$ вследствие отражения сдвиговой компоненты [4].

С помощью функции Грина для свободного пространства для компоненты Фурье $\mathbf{p}(\omega, \mathbf{x}_i)$ найдем:

$$p(\omega, \mathbf{x}_i) = \int \mathbf{G}(\omega, |x_i - y_i|)\frac{\partial^2 T_{kl}}{\partial y_k \partial y_l}\mathbf{d}^3\mathbf{y} =$$

$$= \oint_s \mathbf{G}\frac{\partial T_{kn}}{\partial y_k}\mathbf{ds} - \int \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y_k}\frac{\partial T_{kl}}{\partial y_l}\mathbf{d}^3\mathbf{y} = 0. \qquad (4)$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r})}{\mathbf{r}}; \quad \mathbf{r} = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cdot k_0 = \frac{\omega}{c}. \qquad (5)$$

Равенство нулю правой части выражения (4) обеспечивается вкладом обоих интегралов – поверхностного и объемного.

Учтем теперь в поверхностном интеграле в (4) вклад компоненты T^l_{ik}, соответствующей продольной компоненте поля [5]:

$$T^l_{ik} = -2\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_k} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial y_l}\right) - \zeta\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial y_l} = -\sigma^l_{ik} \qquad (6)$$

(ζ – вторая вязкость).

Генерируемые компонентами вязкого тензора T^l_{ik} пульсации давления описываются выражением:

$$p(\omega, x_i) = \int_s \mathbf{G}(\omega, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\frac{\partial T^l_{kn}}{\partial k_k}(\mathbf{ds}). \qquad (7)$$

Интегрирование ведется по плоскости стенки. Компоненты вектора скорости можно выразить через скалярный потенциал:

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \qquad (8)$$

Соответственно [5]:

$$T_{ik}^{l} = -\sigma_{ik}^{l} = -2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\Delta\varphi\right) - \zeta\delta_{ik}\Delta\varphi = \tag{9}$$

$$= -\left(\lambda\delta_{ik}\Delta\varphi + 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}\right),$$

$$\lambda = \zeta - \frac{2}{3}\mu.$$

Связь пульсаций давления с потенциалом φ найдем из уравнения Навье–Стокса:

$$\rho_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial\sigma_{ik}^{l}}{\partial x_k} =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta\varphi, \tag{10}$$

$$p = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\lambda + 2\mu)\Delta\varphi.$$

Из соотношения (10) и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2\Delta\varphi, \tag{11}$$

следует волновое уравнение для продольных волн в вязкой среде:

$$c_1^2\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{12}$$

Здесь оператор

$$c_1^2 = c^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \left(\lambda + 2\mu = \zeta + \frac{4}{3}\mu\right). \tag{13}$$

Связь Фурье-образа потенциала с соответствующими величинами на стенке дается формулой Кирхгофа [6]:

$$\varphi(\omega, x_i) = -\int\limits_s\left(\varphi\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} - \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathbf{G}(\omega, |x_i - y_i|\,\mathbf{ds}, \tag{14}$$

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{4\pi\mathbf{r}}\exp(iq\mathbf{r}), \quad q = \frac{\omega}{c_1(\omega)}.$$

Производные в (14) берутся по нормали к потоку. Существенно отметить, что в приближении, когда плоская бесконечная стенка является единственной границей потока, вместо (14) имеет место более простое выражение:

$$\varphi(\omega, x_i) = \int\limits_s\varphi_n 2\mathbf{G}(\mathbf{ds}). \tag{15}$$

На границе $z = 0$ суммарная компонента вектора скорости, состоящая из сдвиговых падающей v_i и отраженной w_i и продольной u_i:

$$v_i + w_i + u_i = 0$$

$$v_i = v_{0i}\exp i(k_x x + k_z z), \tag{16}$$

$$w_i = w_{0i}\exp i(k_x x - k_z z), \quad u_i = u_{0i}\exp i(k_x x - q_z z).$$

Выполняются соотношения [5]:

для сдвиговых (вязких) волн:

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{i\omega\rho}{\mu}, \tag{17}$$

для продольных волн:

$$k_x^2 + q_z^2 = q^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2(\omega)}. \tag{18}$$

Выразим все компоненты скоростей на границе через горизонтальную компоненту падающей сдвиговой волны с помощью соотношений (16)–(18):

$$v_z = -\frac{k_x}{k_z}v, \quad w_x = \frac{-k_z q_z + k_x^2}{\Delta}\frac{v}{u},$$

$$w_z = \frac{k_x}{k_z}w_x, \quad u_x = ik_x\varphi = \frac{-2k_x^2}{\Delta}v, \tag{19}$$

$$u_z = -iq_z\varphi = \frac{2k_x q_z}{\Delta}v, \quad v = v_x, \quad \Delta = k_z q_z + k_x^2.$$

Теперь нетрудно связать пульсации сдвиговых напряжений на стенке с потенциалом φ:

$$\sigma_{iz} = \sigma_{iz}^{t}(v) + \sigma_{iz}^{t}(w) + \sigma_{iz}^{l}(u). \tag{20}$$

С помощью соотношений (2), (6), (9), (10), (18) и (19) получим:

$$\sigma_{xz}^{t}(v) = i\frac{\mu}{k_z}(k_z^2 - k_x^2)v, \quad \sigma_{xz}^{t}(w) = \frac{k_z q_z - k_x^2}{\Delta}\sigma_{xz}^{t}(v), \tag{21}$$

$$\sigma_{xz}^{l}(u) = 2\mu k_x q_z\varphi, \quad \varphi = i\frac{2k_x}{\Delta}v, \quad p = i\rho_0\omega\frac{c^2}{c_1^2}\varphi.$$

Просуммировав все три компоненты σ_{xz}, согласно (20), найдем:

$$\sigma_{xz} = -\frac{2\rho_0\omega q_z}{\Delta}v = \frac{i\omega\rho_0 q_z}{k_x}\varphi = \frac{q_z}{k_x}\frac{c_1^2}{c^2}p. \tag{22}$$

С помощью (22) можно теперь найти пульсации давления, генерируемые сдвиговыми напряжениями в турбулентном пограничном слое на стенке:

$$p(\omega, k_x q_z) = \frac{k_x c^2}{q_z c_1^2}\sigma_{xz}(\omega, k_x, k_z, q_z). \tag{23}$$

Соотношение (23) выражает пульсации давления непосредственно и только через касательные напряжения на стенке, корреляционная структура которых поддается измерению (см. работу [7]). Таким образом, связь пульсаций давления в ТПС с пульсациями касательных напряжений становится более прозрачной, чем это формулировалось ранее (например в [8]).

Полученные выше выражения легко обобщить на случай падения плоской волны под произвольным углом ϕ к системе декартовых координат на плоскости XY:

Для этого следует произвести замену:

$$k_x \longrightarrow k_x\cos\phi + k_y\sin\phi = k_l,$$
$$k_x = k_l\cos\phi, \quad k_y = k_l\sin\phi \tag{24}$$
$$k_x v \longrightarrow k_l v_l, \quad \sigma_{xz}k_x \longrightarrow \sigma_{xz}k_x + \sigma_{yz}k_y.$$

Связь спектральной интенсивности пульсаций давления на стенке со спектральной интенсивностью компонент тензора вязких напряжений следует из (23):

$$\langle p(\omega, k_x, k_y, q_z)p^*(\omega, k_x, k_y, q_z)\rangle = $$
$$= \left|\frac{1}{q_z}\frac{c^2}{c_1^2}\right|^2 \langle|k_x\sigma_{xz} + k_y\sigma_{yz}|^2\rangle. \tag{25}$$

Величины σ_{iz} в (25) определяются согласно выражениям (20)–(23). Отметим, что вязкие напряжения возникают также на податливой границе, например, если граница является упругой пластинкой. В этом случае изгибные и продольные колебания пластинки определяются совокупностью компонент тензора вязких напряжений σ_{iz} в согласии с правыми частями уравнений (14) работы [9]:

$$Z_W W = \sigma_{zz} - p - \frac{ik_x h}{2}\sigma_{xz},$$
$$Z_W = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}k_x^4 - \rho h\omega^2,$$
$$Z_U U = \sigma_{xz} - \frac{\nu}{1-\nu}ik_x h(\sigma_{zz} - p), \tag{26}$$
$$Z_U = \frac{Eh}{1-\nu^2}k_x^2 - \rho h\omega^2.$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона. Соотношения (26) приведены для Фурье-компонент продольных смещений пластинки U и поперечных – W.

В правых частях уравнений (16) должны в этом случае стоять величины – $i\omega U$ для горизонтальных компонент поля скоростей и – $i\omega W$ – для вертикальных. Все найденные выше величины могут и в этом случае быть определены, если добавить соотношения (26). В частности, амплитуда пульсаций давления на стенке теперь равна:

$$p = -\rho\omega\frac{2k_x v - i\omega(-k_x U + k_z W)}{\Delta}\frac{c^2}{c_1^2}. \tag{27}$$

Если теперь к упругой стенке приложить сторонние добавочные напряжения σ_{zz}^1 и σ_{xz}^1 такие, чтобы числитель в (27) обратился в нуль, то обратится в нуль и соответствующая Фурье-компонента пульсаций давления $p(\omega, \mathbf{k})$. Если же

$$\sigma_{zz}^1 = -\sigma_{zz} + p,$$
$$\sigma_{xz}^1 = -\sigma_{xz},$$

то обращаются в нуль продольные и поперечные колебания упругой стенки U и W для той же компоненты $(\omega, \mathbf{k})$. Разумеется, возможность такой компенсации в полосе частот требует отдельного анализа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-16161а) и ИНТАС (грант № 99–0088).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Powell A.* Some Aspects of Aeroacoustics: From Rayleigh Until Today. Journal of Vibr. and Acoustics. 1990. Apr. V. 112. P. 145–159.
2. *Hove M.A., Shah P.L.* Influence of mean flow on boundary layer generated interior noise // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99(6). P. 3401–3410.
3. *Glegg S.* Method for calulating the response of structures to inhomogeneous turbulent flows. 139th Meeting ASA, May 2000, abstracts // J. Acoust. Soc. Am. 2000. May. V. 107. № 5. P. 2823.
4. *Наугольных К.А., Рыбак С.А.* Об излучении звука турбулентным пограничным слоем // Тр. Акуст. ин-та. 1971. Вып. 16. С. 129–135. Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 6. С. 890–894.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Гидродинамика. Гл. 2. М.: Наука, 1986.
6. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. Гл. 1.
7. *Ефимцов Б.М., Сысоев В.А.* О поперечной корреляции турбулентных пульсаций касательного напряжения на стенке // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 3. С. 358–361.
8. *Шустиков А.Г.* К вопросу о динамических связях пульсаций давления с полем скорости внутри турбулентного потока при малых числах Маха // Акуст. журн. 1983. Т. 29. Вып. 5. С. 693–699.
9. *Рыбак С.А., Тартаковский Б.Д.* О колебаниях тонких пластин // Акуст. журн. 1963. Т. 9. Вып. 1. С. 66–71.