

УДК 534.23

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА СУПЕРПОЗИЦИЕЙ КВАДРУПОЛЕЙ

© 2001 г. М. Ю. Зайцев, В. Ф. Копьев, А. Н. Котова

ГосНИЦ ЦАГИ, акустическое отделение  
107005 Москва, ул. Радио 17  
E-mail: kopiev@mx.iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 04.09.2000 г.

Представлены результаты экспериментального исследования направленности шума турбулентного вихревого кольца ( $Re \approx 10^5$ ). Акустические измерения проводились в заглушенной камере с помощью круговой решетки микрофонов с центром на оси симметрии кольца. Предложен метод синхронной обработки акустических сигналов, позволивший выделить различные квадрупольные составляющие в измеренном звуковом поле турбулентного вихря.

Микрофонные решетки и синхронный многоканальный анализ сигналов активно применяются в настоящее время для исследования различных акустических шумов, в том числе и шумов аэродинамического происхождения. Так в [1] для исследования шума струи использовались продольные решетки микрофонов, позволившие локализовать дипольные источники шума при натекании струи на тонкий цилиндр. В [2] использовалось сочетание полярной и азимутальной решеток микрофонов, расположенных в дальнем поле в верхней полусфере по отношению к соплу. Методические вопросы, связанные с точностью измерений такого типа, рассмотрены в [3]. Измерение шума с помощью круговой решетки с шестью микрофонами было предложено авторами в [4] и использовано применительно к шуму струи в [5]. Такой метод, позволяющий разлагать шум потока на азимутальные составляющие непосредственно до усреднения по ансамблю реализаций, позволил впервые выделить отдельные азимутальные составляющие в шуме струи. В настоящей работе подробно рассматривается такой подход применительно к исследованию шума простейшего трехмерного аэроакустического источника – вихревого кольца.

Вихревое кольцо является хорошо известным объектом в аэрогидродинамике [6, 7]. На протяжении ряда лет оно используется авторами в качестве “эталонного” объекта аэроакустики, так как сочетает в себе возможность теоретического описания в рамках основных уравнений механики сплошной среды, простоту создания в лабораторных условиях и отсутствие влияния внешних границ, что позволяет исследовать с его помощью многие проблемы динамики и акустики вихрей в чистом виде. В работе [8] было впервые проведено экспериментальное исследование по регистрации шума, создаваемого свободно летящим турбулент-

ным вихревым кольцом. Было установлено, что отдельное вихревое кольцо действительно излучает звук, а звуковое поле кольца сосредоточено в узкой полосе частот. Одновременно тщательный анализ звукового сигнала показал, что излучение даже такого, относительно простого вихревого образования представляет собой случайный процесс, локализованный в узкой полосе частот.

В работе [9] в рамках уравнений Эйлера была построена динамическая модель излучения звука тонким вихревым кольцом, объясняющая основные экспериментальные характеристики звукового излучения: наличие единственного пика в спектре излучения, значение частоты и ширины пика, природу случайной структуры сигнала. Оказалось, что основные особенности излучения удастся понять из рассмотрения собственных колебаний вихревого кольца. Эти колебания характеризуются тремя целыми числами  $(l, n, j)$ , называемыми соответственно частотным (все частоты

лежат вблизи точек сгущения  $\frac{\Omega_0 l}{2}$ ,  $\Omega_0$  – постоянная завихренность в ядре вихря), азимутальным (колебания с зависимостью от азимутального угла вида  $\exp(in\theta)$ ) и радиальным (ответственным за неоднородную пространственную структуру колебаний в сечении) числами. Теория предсказывает, что излучение звука вихревым кольцом порождается только тремя семействами его собственных колебаний вида  $\exp(in\theta)$ ,  $n = 0, 1$  и  $2$ . Более того, оказалось, что все собственные частоты эффективно излучающих мод лежат вблизи общей точки сгущения  $\omega = \Omega_0/2$  и, согласно терминологии, введенной в [9], называются бесселевыми ( $|j| \geq 1$ ) или изолированными ( $j = 0$ ) модами. Эти частоты определяются одинаковым частотным числом  $l = 1$ , соответствующим значению частоты точки сгущения излучающих мод. Несмотря на близость

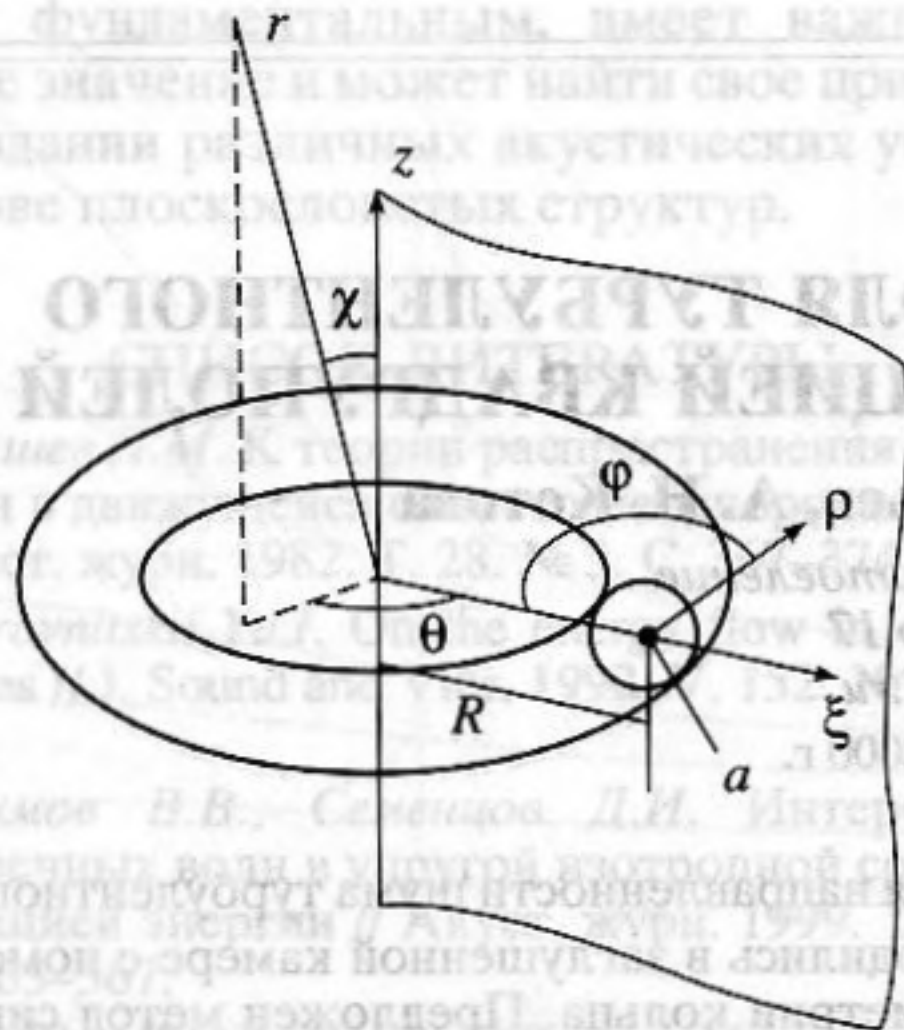


Рис. 1. Система координат.

частот всех излучающих мод, направленность излучения для каждого семейства колебаний различна как в азимутальном, так и в продольном направлении. В сферической системе координат  $r, \theta, \chi$ , связанной с вихревым кольцом (рис. 1), звуковое поле от семейства колебаний  $n = 0$  (осесимметричные моды) имеет вид

$$p = \frac{\pi M^2 e^{i\omega_0^{(0)}(t-r/c)}}{2^6 \mu r} (3 \cos^2 \chi - 1). \quad (1)$$

Звуковое поле от семейства колебаний  $n = 1$  имеет зависимость от азимутального угла  $\theta$  и от продольного угла  $\chi$  вида  $\cos \theta \sin 2\chi$  и дается следующими выражениями соответственно для изолированной  $j = 0$  и бесселевых ( $j \geq 1$ ) мод

$$p = \frac{\pi M^2 e^{i\omega_0^{(1)}(t-r/c)}}{2^6 \mu r} \cos \theta \sin 2\chi, \quad (2)$$

$$p = \frac{\pi M^2 e^{i\omega_j^{(1)}(t-r/c)}}{5 \times 2^6 a_j^{(1)} r} \cos \theta \sin 2\chi.$$

Звуковое поле от семейства колебаний  $n = 2$  имеет зависимость от азимутального угла  $\theta$  и от продольного угла  $\chi$  вида  $\cos 2\theta \sin^2 \chi$  и дается выражениями соответственно для изолированной  $j = 0$  и бесселевых ( $j \geq 1$ ) мод

$$p = \frac{\pi M^2 e^{i\omega_0^{(2)}(t-r/c)}}{2^7 \mu r} \cos 2\theta \sin^2 \chi, \quad (3)$$

$$p = \frac{11\pi M^2 e^{i\omega_j^{(2)}(t-r/c)}}{5 \times 2^6 a_j^{(2)} r} \cos 2\theta \sin^2 \chi.$$

В выражениях (1)–(3) амплитуда колебания границы вихря и плотность жидкости приняты

равными единице,  $\mu = a/R_0$  – параметр тонкости кольца, определяемый отношением радиуса сечения  $a$  к радиусу кольца  $R_0$ ,  $M$  – число Маха потока, вычисленное по значению скорости на границе вихревого ядра  $V = \Omega_0 a/2$  и скорости звука  $c$ ,  $a_j^{(1,2)}$  – нули первой и второй функции Бесселя  $J_{1,2}(x)$  соответственно,

$$\omega_0^{(0,1,2)} = \frac{\Omega_0}{2} (1 + O(\mu^2))$$

и

$$\omega_j^{(1,2)} = \frac{\Omega_0}{2} (1 + \mu/a_j^{(1,2)} + O(\mu^2))$$

– частоты собственных колебаний. Используется безразмерная запись [9], при которой давление отнесено к величине  $V^2/2$ . Формулы (1)–(3) дают общий вид зависимости излучения от времени  $t$  и азимутального угла  $\theta$ . Таким образом, если возбуждены собственные колебания вихревого ядра, то звуковое излучение каждой моды будет описываться выражениями (1)–(3). Каждая мода имеет при этом свою характерную направленность в двух направлениях  $\theta$  и  $\chi$ .

Рассмотрим теперь суммарное квадрупольное звуковое поле  $P_q$ , которое излучается вихревым кольцом, если все моды возбуждены. Оказывается, сложение большого числа близких колебаний приводит к полному исчезновению азимутальной неоднородности звукового поля (несмотря на очевидную зависимость каждой моды от  $\theta$ ) и существенному сглаживанию особенностей в продольном направлении  $\chi$ . Пусть для определенности все моды имеют одинаковую амплитуду, равную единице. При сложении различных гармоник необходимо иметь в виду, что каждая из них имеет случайную ориентацию относительно азимутального угла  $\theta$  и сдвинута друг относительно друга по времени на случайную фазу. Это означает, что в аргументы тригонометрических функций от азимутального угла  $\theta$  необходимо добавить случайную азимутальную фазу  $\theta_j^{(1,2)}$  (ввиду азимутальной симметрии вихревого кольца все моды, очевидно, случайно ориентированы в азимутальном направлении и их фазы должны быть равномерно распределены на отрезке  $[0, 2\pi]$ ), а во временной зависимости появится случайная начальная фаза  $\delta_j$ . Тогда суммарный квадрупольный шум вихревого кольца можно представить в виде

$$P_q = P_0 (\cos^2 \chi - 1/3) + P_1 \cos \theta \sin 2\chi + \quad (4)$$

$$+ Q_1 \sin \theta \sin 2\chi + P_2 \cos 2\theta \sin^2 \chi + Q_2 \sin 2\theta \sin^2 \chi,$$

где  $P_0, P_1, Q_1, P_2, Q_2$  – случайные функции времени, получающиеся суммированием временных экспонент в (1)–(3), умноженных на случайную

амплитудную функцию вида  $\sin\theta_i$  или  $\cos\theta_i$ . Так  $P_1 \sim \sum_j \cos(\omega_j^{(1)}t + \delta_j)\cos\theta_j^{(1)}$ ;  $P_2 \sim \sum \cos(\omega_j^{(2)}t + \delta_j)\cos 2\theta_j^{(2)}$ . При суммировании большого числа гармоник эти функции являются, очевидно, случайными функциями времени. Если амплитуды гармоник (1)–(3) не равны, то в написанных выше суммах появятся дополнительные множители, соответствующие амплитуде каждой гармоники.

Вычислим среднее значение  $\overline{P_q^2}$ , воспользовавшись случайным характером зависимости каждого коэффициента  $P_i, Q_i$  от времени. Ввиду узкополосности этого сигнала, осреднение будем проводить за время много большее  $1/\Delta\omega$  (где  $\Delta\omega \sim \Omega_0\mu$  – интервал вблизи точки сгущения  $\Omega_0/2$ , заполненный собственными частотами), и в то же время, много меньшее характерного времени смещения кольца  $\frac{2R}{V_0}$ , что всегда можно сделать поскольку  $\frac{2R}{V_0} \sim \frac{\Omega_0}{\mu^2 \ln(\mu)} \gg \Omega_0\mu$ . С учетом того, что случайные фазы  $\theta_j$ , задающие ориентацию каждой моды относительно оси симметрии, равномерно распределены на отрезке  $[0, 2\pi]$ , легко получить следующие соотношения

$$\overline{P_1^2} = \overline{Q_1^2} = q_1, \quad \overline{P_2^2} = \overline{Q_2^2} = q_2, \quad \overline{P_0^2} = q_0, \quad (5)$$

$$\overline{P_k Q_n} = 0; \quad \overline{P_k P_n} = \overline{Q_k Q_n} = 0, \quad k \neq n,$$

где коэффициенты  $q_i$  отражают вклад различных азимутальных составляющих в суммарный шум. Равенство средних значений между собой  $\overline{P_1^2} = \overline{Q_1^2}$ ,  $\overline{P_2^2} = \overline{Q_2^2}$  отражает уже упоминавшееся свойство симметрии вихревого кольца, связанное с отсутствием выделенного азимутального направления. Все перекрестные члены после усреднения исчезают, так как каждая мода излучает независимо. В результате получим

$$\overline{P_q^2} = q_0(\cos^2\chi - 1/3)^2 + q_1 \sin^2 2\chi + q_2 \sin^4 \chi. \quad (6)$$

Первый член в этом выражении дает вклад в суммарное звуковое поле от осесимметричных мод, второй член дает вклад от мод вида  $\exp i\theta$  и третий –  $\exp 2i\theta$ . Соотношение между величинами  $q_0, q_1, q_2$  в вихревом кольце заранее не известно и связано только с процессами развития неустойчивости колебаний в нелинейной стадии и установлением автоколебательного режима. Легко видеть, что независимо от их соотношения, после усреднения по  $t$  излучение перестает зависеть от азимутального угла  $\theta$ .

Зависимость от продольного угла  $\chi$  определяется (6). Вклад каждой азимутальной составляющей дается выражениями

$$p_{0q}^2 = \frac{q_0(\cos^2\chi - 1/3)^2}{P_q^2}, \quad n = 0,$$

$$p_{1q}^2 = \frac{q_1 \sin^2 2\chi}{P_q^2} \quad n = 1, \quad (7)$$

$$p_{2q}^2 = \frac{q_2 \sin^4 \chi}{P_q^2} \quad n = 2.$$

Выражение (6) может весьма слабо зависеть от  $\chi$ . Легко получить условие, при котором излучение вихревого кольца вообще будет полностью изотропно. Переходя в (6) к кратным углам и полагая коэффициенты при тригонометрических гармониках от  $\chi$  равными нулю, получим  $q_1 = q_2 = 1/3q_0$ . Таким образом, если квадрат амплитуды шума от первых и вторых азимутальных гармоник будет составлять 1/3 от вклада осесимметричных мод, то излучение будет полностью изотропным. При этом вклад каждой азимутальной составляющей, очевидно, не изотропен и дается выражениями (7).

Проведенный анализ наглядно демонстрирует, почему при обычных измерениях звуковое поле турбулентности (турбулентного вихря или турбулентной струи) является почти изотропным и азимутальные составляющие не проявляются. Это связано с усреднением случайно ориентированных квадрупольей в азимутальном направлении и сглаживанием особенностей поля отдельных квадрупольей в продольном направлении. Поэтому для идентификации излучения каждой моды в эксперименте разложение шума на отдельные азимутальные составляющие необходимо проводить до его усреднения. Именно эти соображения лежат в основе изложенного ниже экспериментального исследования.

Чтобы измерить направленность в азимутальном и продольном направлении, надо иметь информацию о звуковом поле на поверхности, окружающей кольцо. Учитывая то, что кольцо само движется вдоль оси  $x$ , удобно использовать поверхность цилиндра, окружающего траекторию движения вихревого кольца. При этом оказывается достаточно иметь одновременную информацию не на всей поверхности цилиндра, а лишь в одном сечении  $x = L_0$ . Тогда изменению угла  $\chi$  будет соответствовать изменение координаты  $x$  движущегося кольца, т.е. каждая азимутальная составляющая при увеличении  $x$  будет изменяться в соответствии с (7) с учетом равенства  $\text{tg}\chi = R/(x - L_0)$ , где  $R$  – радиус цилиндрической поверхности. Таким образом, если создать систему, способную измерять отдельные азимутальные составляющие, и располо-



Рис. 2. Схема эксперимента. а — решетка микрофонов, б — экран с шелковинками.



Рис. 3. Зависимость пройденного пути от времени для различных вихревых колец и средняя траектория (выделена).

жить ее в определенном сечении  $x = L_0$  по отношению к траектории движения кольца, то при движении вихря измерительная система должна фиксировать изменение относительных вкладов каждой составляющей типа (7). Оказалось, что такая система может быть легко реализована с помощью синхронного анализа сигналов всего лишь от 6 микрофонов, расположенных по кругу относительно траектории полета кольца (рис. 2). Однако следует иметь в виду, что свойства вихревого кольца могут меняться при его движении (так, например, меняются скорость, геометрические размеры, суммарная мощность излучения). Поэтому картина относительных вкладов в излучение вида (7) будет наблюдаться только в том случае, если соотношение амплитуд излучающих колебаний остается неизменным.

Еще одна проблема заключается в выборе интервала усреднения. С одной стороны он должен быть достаточно мал, чтобы кольцо не сместилось на значительное расстояние, с другой стороны он должен быть достаточно большим, чтобы усреднение имело место. В некоторой степени

это противоречие удалось преодолеть и получить искомую направленность излучения отдельных азимутальных составляющих.

Экспериментальное исследование направленности шума, создаваемого свободно летящим турбулентным вихревым кольцом, проводилось в акустической заглушенной камере ЦАГИ размеров  $10 \times 5.5 \times 4.2 \text{ м}^3$ . Акустические измерения в дальнем поле вихревого кольца проводились с помощью решетки из 6 конденсаторных микрофонов фирмы Брюль и Кьер, тип 4165 (рис. 2). Микрофоны располагались на окружности радиуса  $R = 0.4 \text{ м}$  с центром на оси  $Ox$  ( $L_0 = 2.08 \text{ м}$ ) в плоскости, перпендикулярной направлению движения вихря. Для визуализации траектории полета вихревого кольца использовался прямоугольный экран размером  $120 \text{ см} \times 60 \text{ см}$  из тонкой проволоки с наклеенными шелковинками, установленный на расстоянии 6 м от среза сопла генератора так, чтобы центр экрана находился на оси генератора. При пролете через экран вихревого кольца шелковинки отклонялись, делая видимым положение кольца, что позволило отобрать для исследования направленности шума только те реализации, в которых вихревое кольцо не отклонялось существенно от оси и, следовательно, проходило вблизи центра решетки микрофонов. В то же время, даже небольшое смещение кольца на экране, всегда имеющее место, показывает, ближе к какому из микрофонов решетки пролетает кольцо. Эта информация оказалась важной для идентификации момента пролета вихря через плоскость решетки микрофонов (см. ниже).

Регистрация сигнала проводилась с использованием предварительной записи акустических сигналов на многоканальный магнитофон SONY KS 616. Общее количество реализаций, записываемых на магнитофон в течение одной серии экспериментов, составляло 40–50. Одновременно с шестью акустическими сигналами на магнитофон записывался сигнал с микрофона, установленного в плоскости сопла генератора. Этот микрофон фиксирует момент образования вихревого кольца, и его показания использовались как начало отсчета времени в каждой реализации.

Образующиеся вихревые кольца имели естественный разброс значений скорости движения, что связано с несколько различающимися (неконтролируемыми) условиями сворачивания вихревой пелены в момент ее образования. Эти незначительные изменения приводят к накапливающемуся различию во времени пролета вихревого кольца от момента образования до пересечения экрана с шелковинками, которое составляло от 300 до 400 мс (рис. 3). Методика траекторных измерений для определения закона движения  $x(t)$  с использованием датчиков давления описана в [4].

Для выделения направленности звукового поля вихревого кольца использовалась следующая методика обработки данных эксперимента [4].

Рассмотрим сигналы  $s_p(t)$  от каждого из шести акустических микрофонов. Эти сигналы представляют собой измеренные значения поля давления  $P(\theta, \chi, t)$  для шести значений угла  $\theta_p = p\pi/3$ ,  $p = 1, 2, \dots, 6$ , т.е.  $P(\theta_p, \chi, t) = s_p(t)$ . Представим звуковое поле вихревого кольца в виде разложения по азимутальным гармоникам

$$P(\theta, \chi, t) = A_0 + A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta + A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta + \dots, \quad (8)$$

где коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  являются функциями  $\chi$  и  $t$ . Оставшиеся члены разложения, обозначенные через многоточие, имеют следующую после квадруполья мультипольность и, вообще говоря, должны быть малы. Рассматривая выражение (11) при  $\theta = \theta_p$  при каждом  $p$  как уравнение относительно неизвестных амплитуд  $A_i, B_i$  с известной правой частью  $s_p(t)$ , получим систему из шести уравнений. Ввиду симметрии положения микрофонов, эту систему легко разрешить в явном виде относительно неизвестных амплитуд. Действительно можно проверить, что из-за симметрии выбора  $\theta_p$  равны нулю все комбинации вида  $\sum_1^6 \cos l\theta_p$  и  $\sum_1^6 \sin l\theta_p$ , где  $l$  – целое число, не равное нулю, за исключением комбинации вида  $\sum_1^6 \cos 6n\theta_p = 6$ , где  $n$  – целое, включая нуль. Умножая выражение (8) при  $\theta = \theta_p$  последовательно на  $1, \cos \theta_p, \sin \theta_p, \cos 2\theta_p, \sin 2\theta_p, \cos 3\theta_p$  и суммируя результат по  $p$  от 0 до 6, с учетом указанных выше соотношений, получим вместо  $s_p$  шесть других величин вида

$$\begin{aligned} a_0(t) &= \frac{1}{6} \sum_{p=1}^6 s_p(t) = A_0 + O(A_6, A_{12}, \dots), \\ a_1(t) &= \frac{1}{3} \left( s_1 + \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_3 - s_4 - \frac{1}{2}s_5 + \frac{1}{2}s_6 \right) = \\ &= A_1 + O(A_5, A_{13}, \dots), \\ b_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_5 - \frac{1}{2}s_6 \right) = \\ &= B_1 + O(B_5, B_{13}, \dots), \\ a_2(t) &= \frac{1}{3} \left( s_1 - \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_3 + s_4 - \frac{1}{2}s_5 - \frac{1}{2}s_6 \right) = \\ &= A_2 + O(A_4, A_{10}, \dots), \\ b_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}s_5 - \frac{1}{2}s_6 \right) = \\ &= B_2 + O(B_4, B_{10}, \dots), \\ a_3(t) &= \frac{1}{6} (s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + s_5 - s_6) = \\ &= A_3 + O(A_9, A_{15}, \dots). \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку в дальнейшем поле вклад высших мультипольных составляющих должен быть мал, то должны быть малы гармоники  $A_3, B_3, \dots$ , относящиеся к излучению более высокой мультипольности, чем квадруполь. Поэтому сигналы  $a_i$  и  $b_i$ , полученные через линейные комбинации измеряемых сигналов  $s_p$ , близки к амплитудам истинных азимутальных гармоник  $A_i$  и  $B_i$ . При этом реальный вклад в измеряемый сигнал октупольной составляющей легко оценить исходя из относительной величины  $a_3$ . Легко проверить, что справедливо тождество  $S^2 = a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 = \sum_1^6 s_i^2$ , т.е. мощность шести преобразованных сигналов равна мощности исходных шести сигналов. Введем в рассмотрение относительный вклад каждой азимутальной гармоники в суммарную энергию звукового поля. Так, величина  $p_{0\text{exp}}^2 = a_0^2/S^2$  дает экспериментальную оценку осесимметричной части в излучении; величина  $p_{1\text{exp}}^2 = (a_1^2 + b_1^2)/S^2$  оценивает вклад первой гармоники; величина  $p_{2\text{exp}}^2 = (a_2^2 + b_2^2)/S^2$  оценивает вклад второй гармоники и, наконец, величина  $p_{3\text{exp}}^2 = a_3^2/S^2$  оценивает вклад третьей гармоники и, учитывая очевидное условие  $a_3^2 = b_3^2$ , представляет собой половину этого вклада. Оценки  $p_{0\text{exp}}^2, p_{1\text{exp}}^2$  и  $p_{2\text{exp}}^2$  отличаются от точных выражений (7) наличием высших мультиполей в (9).

Действительно, рассмотрим модельный пример. Пусть некоторый идеальный гармонический источник пролетает через решетку микрофонов. В качестве сигналов  $A_i(\chi, t)$   $i = 0, 1, 2$  возьмем квадрупольные составляющие вида (7), а сумму высших мультиполей  $O(A_i, B_i)$  в (9) заменим некоторой константой  $q$ , вообще говоря, одинаковой для всех  $q_i$  и  $b_i$ . Тогда аналогом выписанных выше экспериментальных оценок будут величины

$$\begin{aligned} p_{0r}^2 &= \frac{q_0 (\cos^2 \chi - 1/3)^2 + 2q^2}{s^2}, \\ p_{1r}^2 &= \frac{q_1 \sin^2(2\chi) + 2q^2}{s^2}, \\ p_{2r}^2 &= \frac{q_2 \sin^4 \chi + 2q^2}{s^2}, \quad p_{3r}^2 = \frac{q^2}{s^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$s^2 = q_0 (\cos^2 \chi - 1/3)^2 + q_1 \sin^2(2\chi) + q_2 \sin^4 \chi + 7q^2,$$

$$\text{tg} \chi = \frac{R}{x(t) - L_0},$$

где  $q_0, q_1, q_2$  – заданные амплитуды нулевой, первой и второй азимутальной моды;  $L_0$  – координата

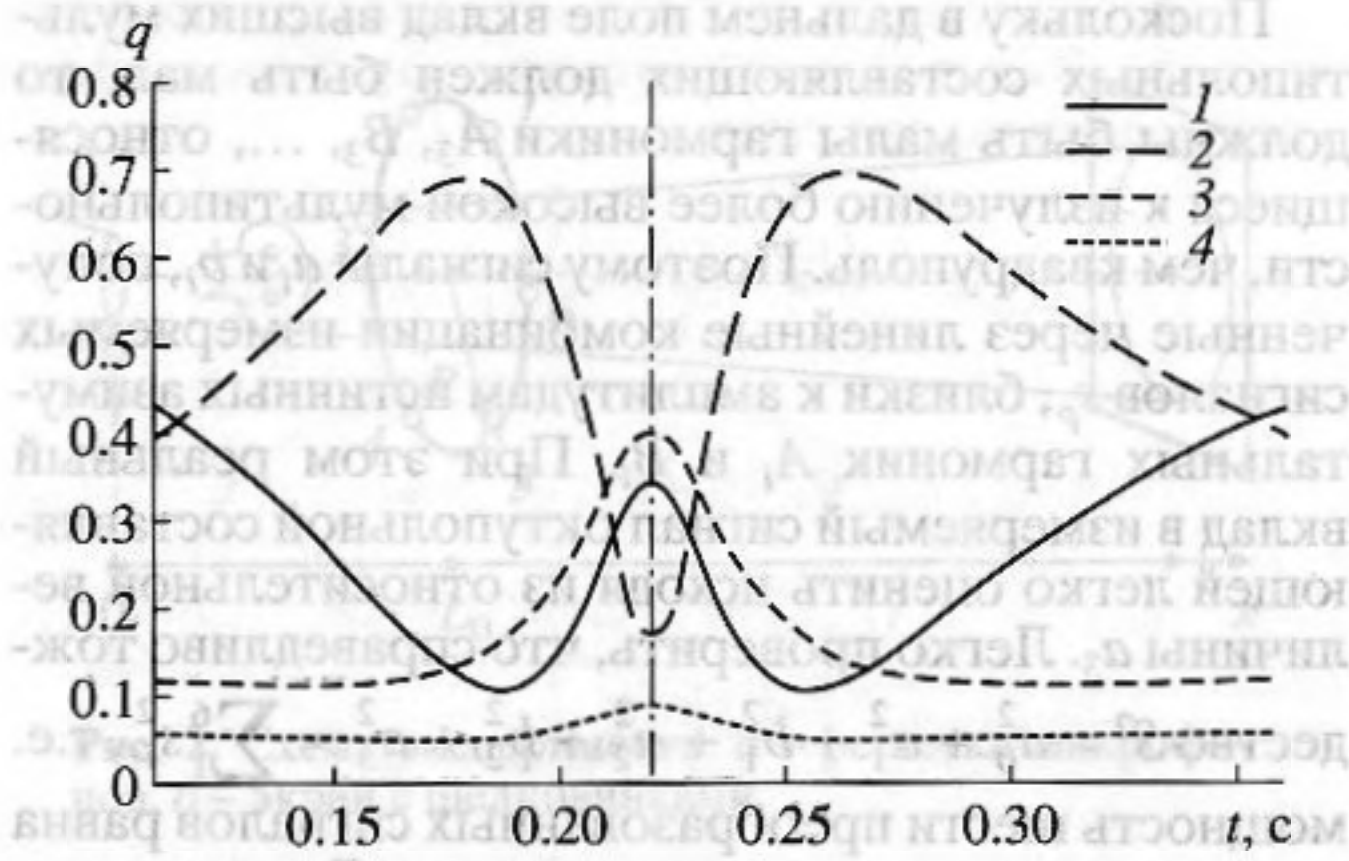


Рис. 4. Вклад различных азимутальных составляющих в суммарное квадрупольное излучение идеально-го вихревого кольца. Модельный гармонический источник: 1 —  $n = 0$ , 2 —  $n = 1$ , 3 —  $n = 2$ , 4 — 3.

центра решетки,  $x(t)$  — координата источника на траектории, соответствующей траектории кольца, осредненной по многим реализациям (рис. 3). Эволюция относительных вкладов мультиполей (10) в случае  $q_0 = 0.6$ ,  $q_1 = 0.4$ ,  $q_2 = 0.1$ ,  $q = 0.07$  представлена на рис. 4.

Рассмотрим теперь эволюцию относительных вкладов азимутальных гармоник в эксперименте  $p_{i\text{exp}}^2$ . По сравнению с рассмотренным выше модельным примером ( $p_{ir}^2$ ) ситуация осложняется тем, что коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$  в (9) помимо квадрупольной составляющей содержат и высшие мультиполя с той же азимутальной зависимостью. Кроме того, эти функции являются случайными функциями времени и измеряются с ошибками. Рассмотрим отдельную реализацию от момента вылета вихревого кольца до его столкновения об экран с шелковинками. Начальный кусок реализации (0–110 мс) оказывается непригодным для анализа шума вихря, поскольку низкочастотный шум в камере и структурный шум самой установки, связанные с условием запуска вихревых колец (см. [4, 8]), являются доминирующими и существенно превосходят слабый шум кольца. Поскольку шум установки резко падает (за счет применения вибродемпфирующих средств), то через 110 мс шум кольца начинает проявляться. Этот шум локализован в полосе частот от 800 до 1500 Гц с выраженным пиком вблизи частоты 1200 Гц. Так, характерная картина спектра, усредненного по нескольким реализациям через 220 мс после запуска, имеет вид [8], изображенный на рис. 5. Низкочастотный шум (0–500 Гц), многократно превосходящий шум кольца (более чем на 20 дБ), полностью задемпфировать не удается, и его воздействие на измерительную систему (он существ-

венно заполняет динамический диапазон) неизбежно приводит к увеличению неконтролируемых ошибок. Таким образом, для анализа шума вихря имеется кусок реализации длиной около 200 мс (от 110 мс до 300–400 мс). Если разбить его на участки длиной 30 мс и взять на каждом участке суммарную акустическую мощность процесса в полосе частот от 800 до 1500 Гц (именно в этом диапазоне сосредоточена основная мощность излучения вихревого кольца; рис. 5), то получится 6–8 точек, показывающих, как меняется суммарная мощность излучаемого шума  $S^2$  и вклады азимутальных гармоник  $p_{i\text{exp}}^2$  при движении вихревого кольца. Заметим, что при получении спектральной мощности каждый 30 мс отрезок временной реализации умножался на сглаживающую весовую функцию Хеннинга. Введение перекрытия между соседними интервалами позволяет увеличить число статистически независимых спектров, поскольку частично компенсирует свойство весового окна Хеннинга, существенно ослабляющего сигнал вблизи границ интервала анализа. Таким образом, для получения более подробной картины можно использовать данные анализа с 50% перекрытием интервалов, что позволяет получить до 15 точек на реализацию. Характерная картина изменения относительных вкладов в одной реализации представлена на рис. 6. Оценим среднеквадратичную ошибку при таких измерениях. Как уже отмечалось, для вычисления эволюции амплитуд азимутальных гармоник использовались временные отрезки длительностью 30 мс в полосе частот от 800 до 1500 Гц. За время анализа кольцо проходит около 25 см, а экспериментальной точке на графике рис. 6 сопоставляется середина этого отрезка. При длине реализации  $T \sim 30$  мс в полосе пропускания шириной  $\Delta\omega \approx 30$  Гц нормированная среднеквадратичная ошибка оценки спектральной мощности составляет 100% (это следует из известного условия  $\Delta\omega T \sim 1$ , [10, 11]). Поскольку нас интересует оценка спектра в более широкой частотной полосе  $\Delta\omega_0 \approx 600$  Гц, то ошибка в оценке спектральной мощности давления будет составлять  $\epsilon \approx 20\%$ .

Основной ресурс снижения ошибки связан с использованием усреднения по ансамблю реализаций. При накоплении  $N$  реализаций можно улучшить полученную выше оценку в  $\sqrt{N}$  раз. Однако на этом пути существовало следующее препятствие. Выше (рис. 6) были представлены кривые, аппроксимирующие закон движения вихревого кольца  $x(t)$ , для реализаций, отобранных в усредняемый ансамбль. При этом видно, что различие во времени пролета различными кольцами плоскости решетки микрофонов составляет до 90 мс. Это значит, что в момент пролета одним кольцом

плоскости решетки, кольцо другой реализации может находиться на расстоянии 0.5 м от этого места как вверх, так и вниз по потоку. Поскольку наиболее характерные особенности искомым кривых лежат именно вблизи плоскости решетки микрофонов ( $\chi \approx \pi/2$ ), то обычное усреднение приводит к полному смазыванию картины направленности. Для правильного усреднения необходимо уметь точно определять момент прохождения кольцом плоскости микрофонов и использовать этот момент в качестве опорной точки.

Оказалось, что такая информация может быть получена из анализа низкочастотных акустических данных. Экран с шелковинками (рис. 2) показывает, к какому из микрофонов решетки в данной реализации ближе всего пролетает кольцо. При вычитании показаний двух любых микрофонов решетки низкочастотный шум камеры сокращается. В то же время каждый микрофон фиксирует неоднородное ближнее поле давления, связанное с обтеканием летящего кольца. Это осесимметричное поле при вычитании показаний двух микрофонов оказывается не до конца скомпенсированным, поскольку кольцо летит ближе к одному из них (в данном случае это микрофон 1). Максимальное значение разности достигается для двух противоположных микрофонов (микрофон 1 и микрофон 4). На рис. 7 показаны сигналы двух микрофонов, расположенных симметрично относительно центра решетки. В момент пролета кольца через решетку разность сигналов имеет характерный пик, по форме соответствующий ближнему псевдозвуковому полю кольца. Минимуму  $\Delta s_{1-4}$  соответствует момент времени, когда вихревое кольцо пересекает плоскость решетки микрофонов. Таким образом, удалось с приемлемой точностью определить момент пролета вихревыми кольцами плоскости решетки микрофонов и провести усреднение по временным отрезкам, равноудаленным от этого момента. Осредненные кривые, характеризующие направленность различных азимутальных составляющих звукового поля турбулентного вихревого кольца по отобранным семи реализациям представлены на рис. 8.

Таким образом, излучение вихревого кольца действительно состоит из трех различных квадруполей, предсказываемых теорией. Интересно сравнить этот результат с работой [12], где было обнаружено, что вблизи  $t = 245$  мс доминирует первая азимутальная мода. Действительно, легко видеть, что в этой области излучение нулевой и второй моды мало (рис. 8), поэтому первую моду удалось выделить в [12] с помощью попарного корреляционного анализа, не используя описанный в настоящей работе подход.

Следует отметить, что в шуме вихревого кольца доминируют нулевая, первая и вторая азиму-

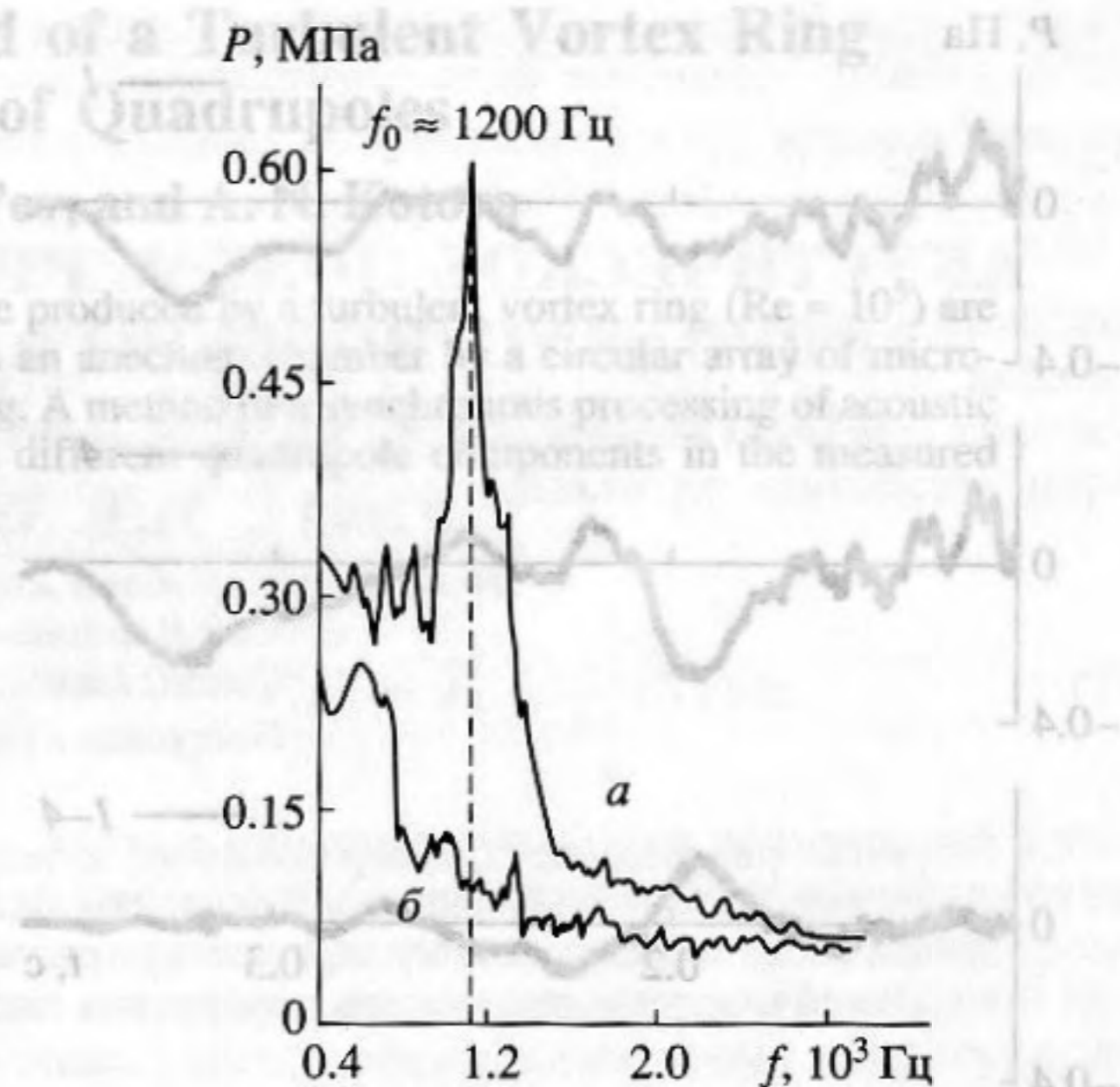


Рис. 5. Усредненный спектр звукового давления: *a* – вихревого кольца, *б* – фонового шума. Время задержки от момента запуска кольца –  $\tau = 220$  мс.

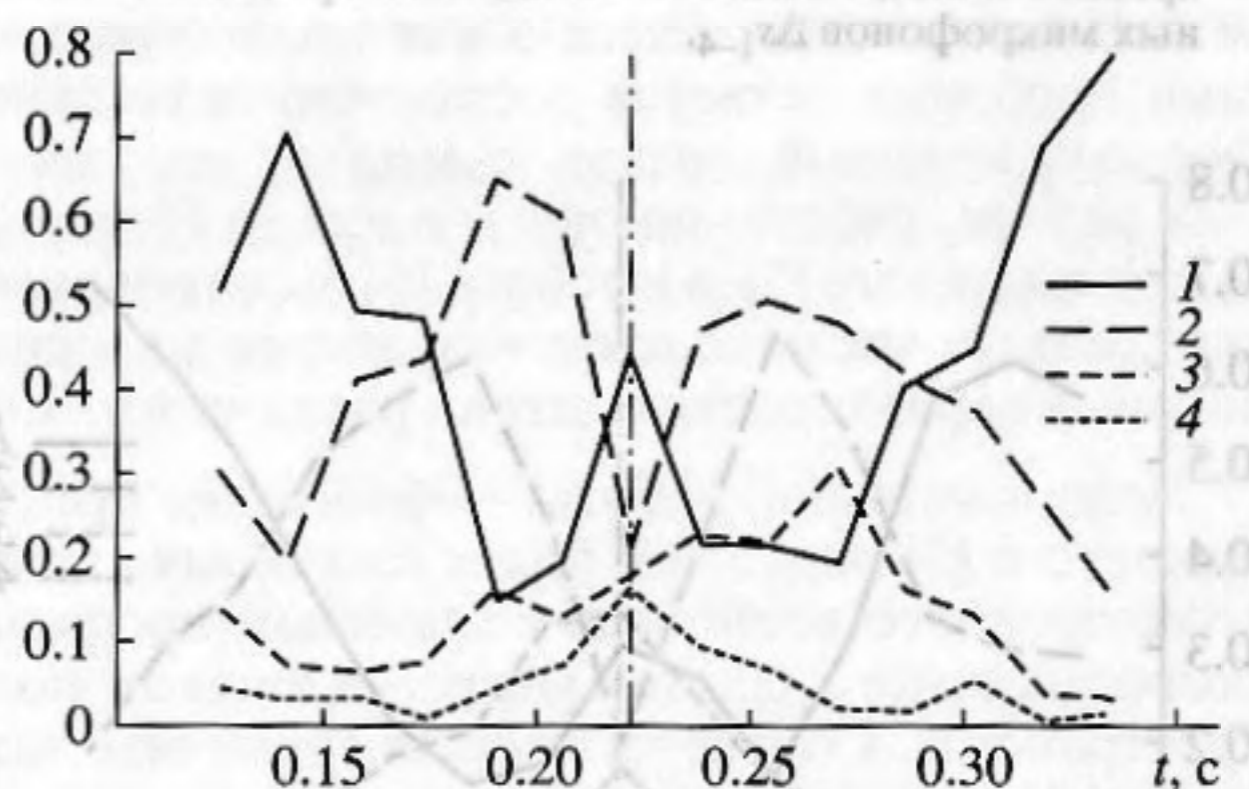


Рис. 6. Вклад различных азимутальных составляющих в шум вихревого кольца (однократная реализация): 1 –  $n = 0$ , 2 –  $n = 1$ , 3 –  $n = 2$ , 4 –  $n = 3$ .

тальные гармоники, в то время как высшие гармоники, соответствующие мультиполям высокого порядка, имеют существенно более низкий уровень. Об их суммарном уровне можно судить по величине  $p_{2\text{exp}}^2$  и  $p_{3\text{exp}}^2$  при удалении от координаты решетки  $x = L_0$ . Как и следовало ожидать, суммарный уровень шумов одинаковый (и довольно значительный), несмотря на то, что он состоит из различных азимутальных компонент  $O(A_i, B_i)$  (заметим, что  $p_3^2$  – только половина третьей гармоники). В то же время, вблизи  $x = L_0$  третья гармоника имеет заметный подъем, что говорит о реальном присутствии октупольной составляющей в шуме вихревого кольца, превышающей

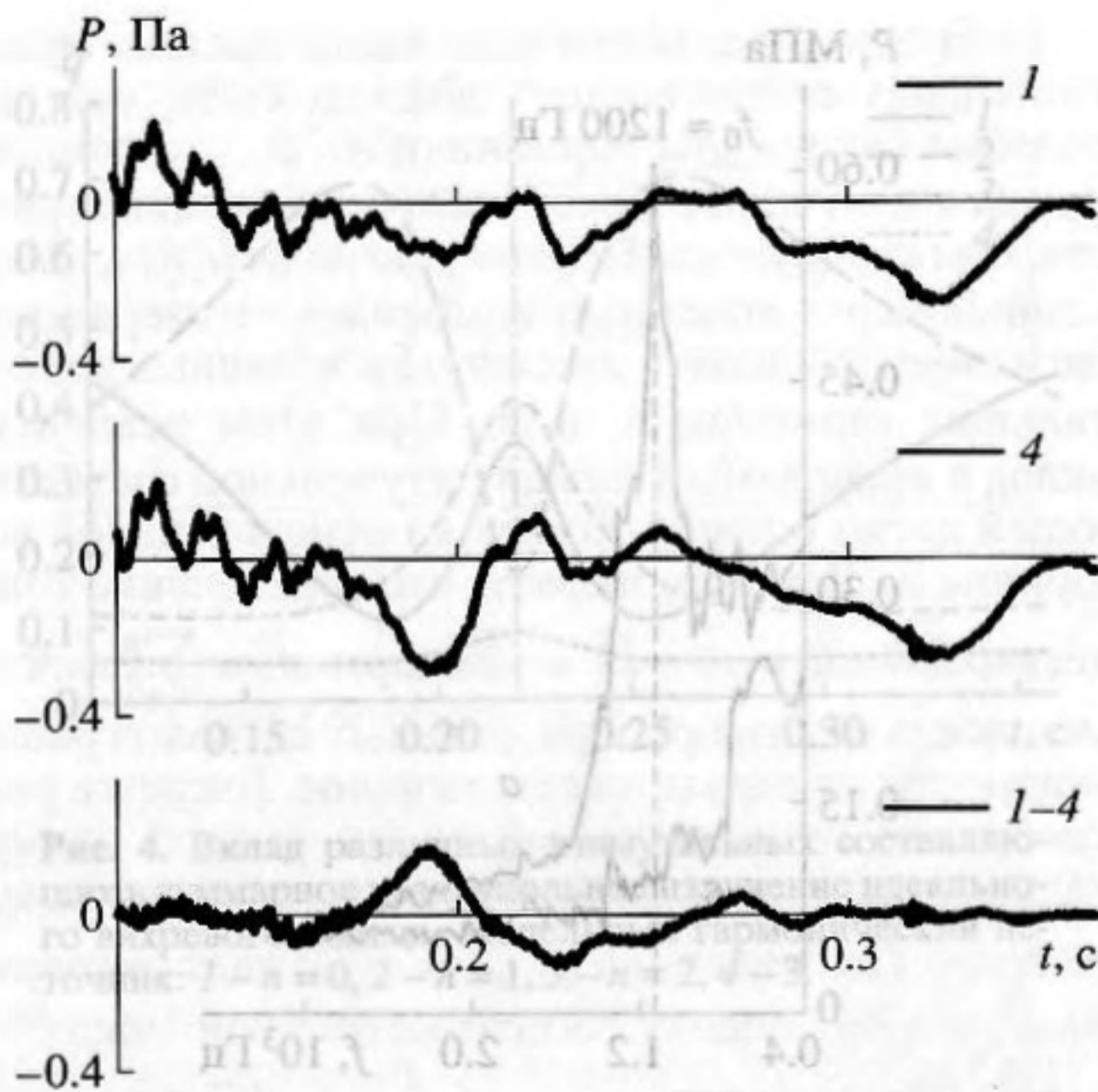


Рис. 7. Нефильтрованное звуковое поле, измеряемое микрофонами решетки ( $s_1, s_4$ ), содержащее структурный шум камеры и ближнее псевдозвуковое поле вихревого кольца. Разность показаний противоположных микрофонов  $\Delta s_{1-4}$ .

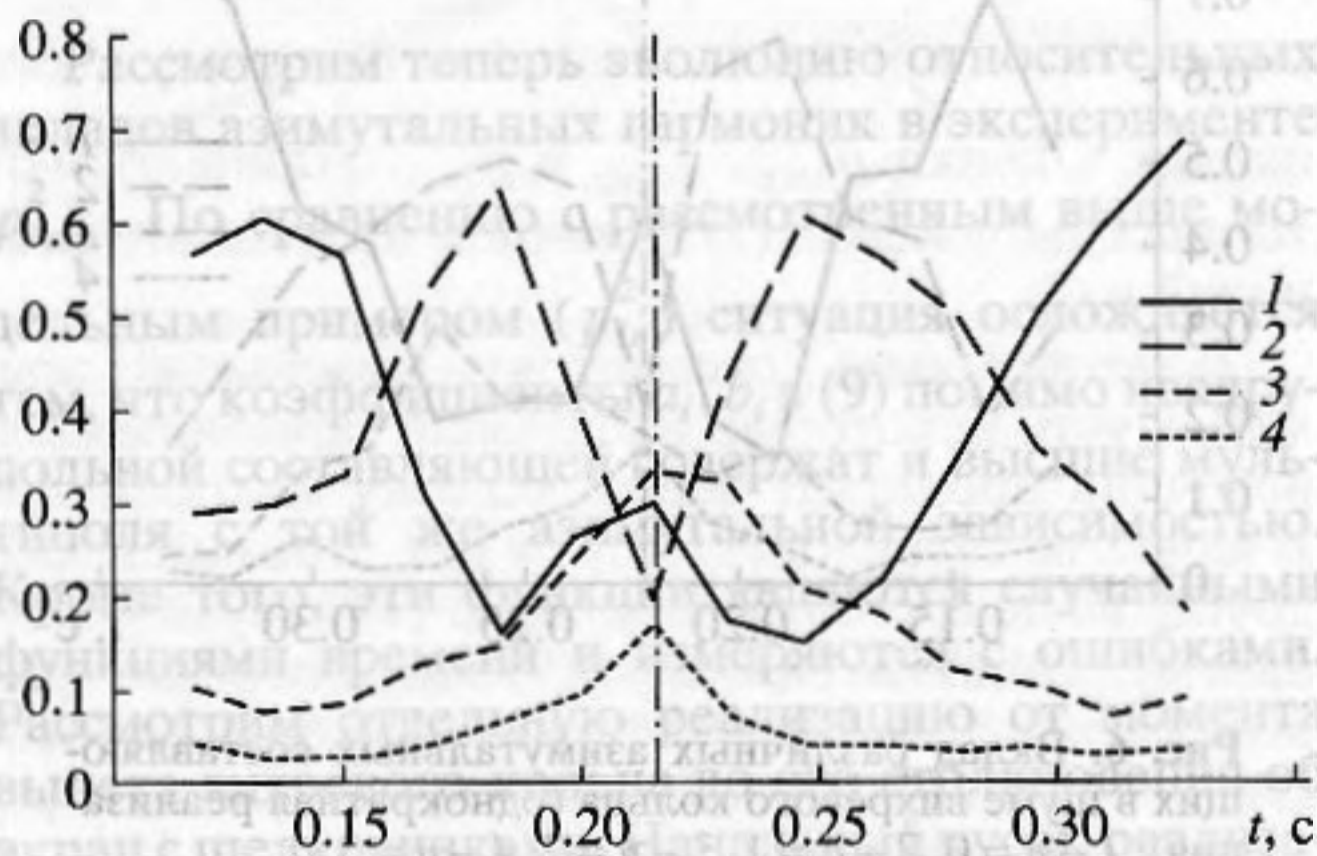


Рис. 8. Усредненный вклад различных азимутальных составляющих в шум вихревого кольца: 1 -  $n = 0$ , 2 -  $n = 1$ , 3 -  $n = 2$ , 4 -  $n = 3$ .

фон. Это связано, по-видимому, с неточным выполнением условия дальнего поля, наиболее сильно нарушаемого при прохождении кольца вблизи решетки (кстати, именно нарушение условия дальнего поля позволило провести усреднение вихревых колец, привязываясь к моменту пролета кольца через плоскость решетки).

Предложенная методика измерения позволяет выделить отдельные квадрупольные составляющие в суммарном шуме вихревого кольца. Как и предсказывается теорией [9], шум вихревого кольца состоит из трех различных квадруполей, имеющих близкую частоту, локализованную вблизи од-

ного значения. Предложенный метод анализа, состоящий в выделении азимутальных компонент перед усреднением случайного сигнала, представляется весьма перспективным способом исследования акустики турбулентных течений. Отметим также, что, несмотря на существенную нестационарность среднего течения (изменяются размеры и поступательная скорость кольца), зависимость азимутальных гармоник от угла  $\chi$  удается получить из анализа временной эволюции относительных вкладов этих гармоник. Это говорит о том, что физические процессы, приводящие к генерации звукообразующих пульсаций, остаются неизменными при эволюции вихревого кольца, т.е. соотношение излучающих мод имеет универсальный характер.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00199).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jordan P., Fitzpatrick J. Identification of an aeroacoustic dipole using a microphone array // AIAA paper 2000 - 1936, 2000, 8 p.
2. Ghosh A., Bridges J., Hussian F. Instantaneous directivity in jet noise multipole decomposition. Trans. ASME, J. Sound Vib. and Acoustic. 1995. V. 117. P. 172-179.
3. Dosso S.E., Sotitin B.J. Optimal array element localization // JASA. 1999. V. 106. № 6. P. 3445-3459.
4. Kopiev V.F., Zaitsev M.Yu., Chernyshev S.A. Sound radiation from a free vortex ring and a ring crossing an obstacle // AIAA Paper 98-2371. 1998. 14 p.
5. Kopiev V.F., Zaitsev M.Yu., Chernyshev S.A., Kotova A.N. The Role of Large-Scale Vortex in a Turbulent Jet Noise // AIAA paper 99-1839. 1999. 13 p.
6. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.
7. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
8. Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф., Мушин А.Г., Потюкин А.А. Излучение звука турбулентным вихревым кольцом // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 5. С. 1080-1083.
9. Kopiev V.F., Chernyshev S.A. Vortex ring eigen-oscillation as a source of sound // J. of Fluid Mech. 1997. V. 341. P. 19-57.
10. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.
11. Минами С., Утида Т., Кавата С. и др. Обработка экспериментальных данных с использованием компьютера. М.: Радио и связь, 1999. 256 с.
12. Kopiev V.F., Chernyshev S.A., Zaitsev M.Yu. Theoretical and experimental investigations of vortex ring noise directivity // CEAS/AIAA Paper 95-109, 1995.



# Representation of the Sound Field of a Turbulent Vortex Ring as a Superposition of Quadrupoles

M. Yu. Zaitsev, V. F. Kop'ev, and A. N. Kotova

Results of an experimental study of the directivity of noise produced by a turbulent vortex ring ( $Re \approx 10^5$ ) are presented. The acoustic measurements were performed in an anechoic chamber by a circular array of microphones with its center lying at the symmetry axis of the ring. A method of a synchronous processing of acoustic signals is proposed. This method allows one to separate different quadrupole components in the measured sound field of a turbulent vortex.

$$E_{2m} = \rho_{12} \frac{\sin x_m}{\alpha_m}, \quad \rho_{12} = \frac{1}{h} \int_0^h k_1^2(z) dz, \quad (7)$$

В разложении (4)  $M$  — число собственных нормальных волн с вещественной постоянной распространения  $k_m^2 = k_0^2 - \epsilon_m^2$ .  $M$  — число обобщенных нормальных волн с вещественной постоянной распространения  $k_m^2 = k_0^2 - \epsilon_m^2$ . Ввод волновой функции  $\phi_m(z)$  в уравнение (1) объясняется тем, что только в совокупности образуют полные ортогональные системы собственных функций в соответствующих областях, пересечением которых является канал  $z \in (0, h)$  [6].

$$\Delta \phi_m + k_m^2 \phi_m = 0, \quad \phi_m(0) = \phi_m(h) = 0, \quad (8)$$

Путь  $\phi_m(z)$  удовлетворяет условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ . В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ . В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ .

$$c_1(z) = \begin{cases} c_1(0) - g_1 z, & z \in (0, h_0), \\ 0, & z \in (h_0, h_1), \\ c_1(0) - (g_1 + g_2)z, & z \in (h_1, h), \end{cases} \quad (9)$$

где градиенты скорости звука  $g_1 > 0, g_2 > 0$  считаются заданными, а формулы перехода имеют вид

$$\frac{\omega}{c_1(z)} = \frac{\omega}{c_1(0)} - \frac{\omega}{c_1(0)} \frac{g_1 z}{c_1(0)} - \frac{\omega}{c_1(0)} \frac{(g_1 + g_2)z}{c_1(0)}, \quad (10)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\phi, \psi$  — потенциал скорости и давления в каждом слое  $z \in (0, h)$  с параметрами  $\rho, c_1(z)$  лежащим на каждом поперечном срезе с параметрами  $\rho, c_2(z)$  ( $\rho, c$  — плотность и скорость звука),  $\omega$  — круговая частота,  $\theta^2$  — угол преломления,  $\xi$  — постоянная распространения.

Если считать решение граничной задачи (1) в виде единичной волны  $\phi_m(z) = \phi_m(z) N_m(z)$  (11),

речень работ, посвященных этому вопросу, приведен, например, в работе [7]. Однако линейное уравнение для волновой функции  $\phi_m(z)$  в канале  $z \in (0, h)$  является уравнением Штурма, которое имеет вид  $\Delta \phi_m + k_m^2 \phi_m = 0$ . В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ . В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ .

Для нахождения  $\phi_m(z)$  в канале  $z \in (0, h)$  необходимо решить уравнение  $\Delta \phi_m + k_m^2 \phi_m = 0$ . В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ . В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ .

В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ . В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ .

В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ . В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ .

В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ . В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ .

В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ . В канале  $z \in (0, h)$  существуют собственные функции  $\phi_m(z)$ , удовлетворяющие условиям  $\phi_m(0) = \phi_m(h) = 0$  и  $\phi_m(z) \neq 0$  в области  $z \in (0, h)$ .