АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 1, с. 39–43

УДК 534.1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ УПРУГИХ ВОЛН В ЭНЕРГИЮ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ

© 2002 г. А. И. Весницкий, Е. Е. Лисенкова

Нижегородский филиал института машиноведения РАН
603024 Н. Новгород, ул. Белинского 85
E-mail: wvs@dynamo.nnov.ru

Поступила в редакцию 07.08.2000 г.

Рассматривается задача о движении тела вдоль упругой направляющей под действием падающей на него волны. Для произвольной направляющей выводится уравнение продольного движения тела, исходя из законов изменения энергии и импульса в случае, когда падающая волна порождает одну отраженную. В качестве примера приводятся уравнения движения тела вдоль струны и балки модели Бернулли–Эйлера. Исследуется процесс его разгона вдоль последней. Для докритических скоростей находятся закон движения тела и отношение изменения кинетической энергии к подводимой энергии.

Утверждение о том, что волны оказывают давление на тела, препятствующие их свободному распространению, впервые встречается у Л. Эйлера. Будучи противником корпускулярной теории света, он в 1746 году опубликовал статью [1], где удлинение "хвостов" комет по мере их приближения к Солнцу объяснил давлением световых волн, в то время как его оппоненты объясняли этот эффект бомбардировкой атмосферы кометы частицами света. В 1873 году Д. Максвелл дал теоретическое обоснование эффекту давления волн и вывел формулу для расчета величины давления, оказываемого электромагнитными волнами на неподвижное препятствие [2]:

$$F = \Phi/c, \tag{1}$$

где Φ – поток волновой энергии, а c – скорость распространения электромагнитных волн. Экспериментально же давление волн впервые наблюдал В. Дворжак в 1876 году [3]. Он облучал звуком вывешенные на нитях акустические резонаторы, измеряя величину давления звуковых волн по углу отклонения нитей. Результаты его наблюдений в том же году были объяснены Д. Рэлеем [3], построившим в адиабатическом приближении теорию давления звуковых волн. После знаменитых экспериментов П.Н. Лебедева [4] по обнаружению давления света, Д. Рэлей и И. Лармор в 1902 году независимо друг от друга высказали предположение, что всякое волновое движение, какова бы ни была его природа, оказывает давление на тела, препятствующие его свободному распространению [5, 6]. Начатые ими исследования эффекта давления механических волн нашли более полное развитие в работах Е.Л. Николаи, рассмотревшего в 1912–1925 годах ряд задач о взаимодействии поперечных волн струны с подвижными закреплениями [7, 8].

Интерес к более подробному изучению эффекта давления волн возник сравнительно недавно в связи с попытками объяснить параметрическую неустойчивость 2-го рода в системах с подвижными закреплениями [9, 10] и эффекты волнообразования при движении нагрузок вдоль упругих направляющих [11]. Оказалось, что энергия на возбуждение импульсов в первом случае и на волнообразование – во втором черпается соответственно из энергии поступательного движения закреплений и нагрузок, а посредником такого преобразования является сила, обусловленная давлением волн [12]. Проблема учета давления волн сегодня наиболее актуальна для специалистов по проектированию и эксплуатации скоростных наземных магистралей [13]. Причина этого заключается в том, что при движении поездов со скоростями 200 км/ч и более в жезезнодорожном полотне и прилегающем грунте могут возбуждаться упругие волны [14, 15], давление которых дает основной вклад в сопротивление движению.

Оценим величину давления, оказываемого волнами различной физической природы на неподвижное препятствие. Если препятствие волну поглощает, то давление будет определяться формулой (1), где $c = \omega/k$ – фазовая скорость, ω – частота, k – волновое число, а Φ – мощность источника волн в предположении, что весь генерируемый поток волновой энергии попадает на препятствие. Соответствующие оценки приведены в таблице, где для удобства сравнения мощности источников волн взяты одинаковыми и равными 10^4 Вт.

Очевидно, что давление низкочастотных гравитационных волн, а также поперечных волн в балках, цепях, гусеницах, пластинах сравнимо с силами, которые приводят в движение машины. Отсюда понятен интерес исследователей к созданию

Таблица

Волны	Скорость c, м/с	Давление F, Н
Электромагнитные в вакууме	3×10^8	3.3×10^{-5}
Звуковые в металле	5×10^3	2
Звуковые в воздухе	3×10^2	3.3×10^1
Низкочастотные гравитационные	10^{-1}–1	10^4–10^5
Низкочастотные поперечные в балках, целях, гусеницах, пластинах	1–10	10^3–10^4

машин и механизмов волнового принципа действия, в том числе и преобразователей энергии волн в энергию поступательного движения тел.

Рассмотрим движение вдоль упругой направляющей тела массы m (рис. 1) под действием давления падающей на него волны. Если тело в поперечном направлении не движется, то волна за него не проникает и отражение можно считать идеальным. При условии идеального отражения, рассматриваемой задаче можно поставить в соответствие задачу соударения двух тел. Роль одного из них будет играть движущееся по направляющей тело, а другого – волна, которой будем приписывать волновой импульс [12]. Предполагается, что падающая волна порождает только одну отраженную волну, которая распространяется в противоположном по отношению к падающей волне направлении. Соответствующие такому взаимодействию законы изменения энергии и импульса запишем в дифференциальной форме:

$$d\varepsilon_0 - d\varepsilon = mvdv + Fdl,$$
$$dp_0 - dp = mdv + Fdt. \tag{2}$$

Здесь $v = \dot{l}(t)$ – скорость движения массы m, $dl = vdt$, ε_0 и p_0 – энергия и импульс падающей волны, ε и p – энергия и импульс отраженной волны, F – сила трения, причем предполагается, что последняя имеет вид

$$F = F_0 \operatorname{sign} v + \delta v, \tag{3}$$

где F_0 и δ – постоянные, характеризующие сухое и вязкое трение соответственно.

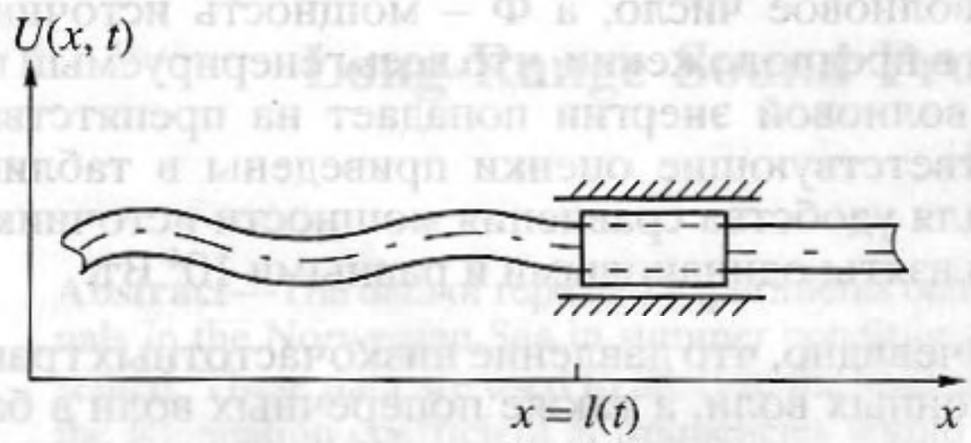

Рис. 1. Движение массы вдоль упругой направляющей.

Будем считать, что падающая на тело волна имеет частоту ω_0, а частота отраженной ω меняется медленно так, что

$$|d\omega/dt| \ll \omega^2. \tag{4}$$

В этом случае усредненные за период энергия и волновой импульс будут связаны соотношением [16]:

$$\varepsilon_0 = c_0 p_0, \quad \varepsilon = cp, \tag{5}$$

где $c_0 = \omega_0/k_0$, $c = \omega/k$ – фазовые скорости падающей и отраженной волны соответственно.

Допуская, что связь (5) справедлива и в малом, из (2) получим уравнение движения тела вдоль направляющей

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{(c + c_0)}{c_0(c + v)}\frac{d\varepsilon_0}{dt} - F. \tag{6}$$

Заметим, что при выводе уравнения (6) вместо закона изменения импульса можно воспользоваться так называемым законом сохранения числа квантов волновой энергии, который, в случае идеального отражения и одной отраженной волны, запишется в виде [16]: $\varepsilon/\omega = \varepsilon_0/\omega_0 = \text{const}$, и законом двойного эффекта Доплера, связывающим частоты падающей и отраженной волн.

При расчете возможных режимов движения тел под действием сил, обусловленных давлением упругих волн, удобнее задаваться либо мощностью источника волны Φ_0, если волна запитывается источником силы, либо плотностью волновой энергии h_0, если волна запитывается источником смещения. Учитывая, что подводимый к движущемуся телу поток волновой энергии равен $(\Phi_0 - vh_0)|_{x = l(t)}$, а волновой поток через неподвижное сечение (он же мощность источника Φ_0) и плотность волновой энергии h_0 связаны соотношением $\Phi_0 = v_{gr}h_0$, где $v_{gr} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\omega = \omega_0}$ – скорость переноса волновой энергии (групповая скорость падающей волны), находим, что

$$d\varepsilon_0 = (1 - v/v_{gr})\Phi_0|_{x = l(t)}dt = (v_{gr} - v)h_0|_{x = l(t)}dt$$

и, следовательно, (6) можно записать в виде

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{(c + c_0)}{c_0(c + v)}(1 - v/v_{gr})\Phi_0|_{x = l(t)} - F =$$
$$= \frac{(c + c_0)}{c_0(c + v)}(v_{gr} - v)h_0|_{x = l(t)} - F. \tag{7}$$

Уравнение (7) получено в естественном предположении, что падающая волна догоняет движущееся тело, то есть $v_{gr} > v$. В противном случае взаимодействия между телом и волной не будет.

Чтобы определить входящие в (7) групповую и фазовую скорости, необходимо знать зависимость частоты от волнового числа, которая нахо-

дится либо из уравнения динамики упругой направляющей в виде дисперсионного уравнения

$$f(\omega, k) = 0, \tag{8}$$

либо экспериментально. При этом надо иметь в виду, что частота и волновое число падающей волны связаны с частотами и волновыми числами вторичных (отраженных и проходящих) волн соотношением

$$\omega - vk = \omega_0 - vk_0, \tag{9}$$

которое выражает собой условие равенства в движущейся системе отсчета ($x' = x - vt$, $t' = t$) частот всех вторичных волн частоте падающей волны. Из всех же решений системы уравнений (8)–(9) отраженным волнам будут соответствовать только те, которые отводят энергию от движущегося тела, т.е. для которых групповая скорость $d\omega/dk < v$.

Первое слагаемое в правой части уравнения (7) представляет собой силу, обусловленную давлением волн (F_{pr}), на наличие которой и было указано впервые в работах [5–7]. Нетрудно показать, что в случае полного отражения (для которого выведена формула (7)) эта сила пропорциональна коэффициенту отражения (Φ_1/Φ_0) [17] от границы:

$$F_{pr} = \frac{v_{gr}h_0(c + c_0)}{c(c_0 - v)}(1 + v/v_{gr1})\frac{\Phi_1}{\Phi_0}. \tag{10}$$

Здесь Φ_1 – поток энергии отраженной волны и v_{gr1} – ее групповая скорость.

Если в качестве направляющей выбрать струну, для которой $c = c_0 = d\omega/dk = \omega_0/k_0 = \sqrt{N/\rho}$, ($N$ – натяжение, ρ – погонная плотность струны), то (7) преобразуется в уравнение, полученное в [12] из соответствующей нелинейной краевой задачи,

$$m\frac{dv}{dt} = 2\frac{c_0 - v}{c_0 + v}h_0 - F,$$

решение которого достаточно подробно исследовано в работах [18–20].

Рассмотрим задачу о преобразовании энергии изгибных волн в энергию движения тел. С этой целью в качестве направляющей выберем балку модели Бернулли–Эйлера[1], поперечные колебания которой описываются уравнением

$$\gamma u_{xxxx} + \rho u_{tt} = 0,$$

где γ – изгибная жесткость балки, а ρ – ее погонная плотность. Представляя его решение в виде $u(x, t) = u_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ (u_0 и φ_0 – постоянные величины), получим дисперсионное уравнение (8) для изгибных волн [23]:

$$\gamma k^4 - \rho\omega^2 = 0, \tag{11}$$

из которого следует, что

$$v_{gr} = 2c_0, \quad c_0 = (\gamma/\rho)^{1/4}\omega_0^{1/2},$$

где ω_0 – по-прежнему частота падающей волны. Решая совместно (9) и (11), находим, что в диапазоне скоростей $v_1 < v < v_2$ (где $v_1 = -2(\sqrt{2} + 1)c_0$, $v_2 = 2(\sqrt{2} - 1)c_0$) возникают приграничная осцилляция и бегущая отраженная волна, фазовая скорость которой $c = c_0 - v$. Во всех остальных случаях отраженных волн больше, и они предметом исследования данной работы не являются.

Что касается переносимой падающей волной энергии, то, с учетом (11), ее плотность $h_0 = \frac{1}{2}(\rho u_t^2 + \gamma u_{xx}^2) = \frac{1}{2}\rho\omega_0^2 u_0^2 = \text{const}$. Учитывая сказанное, из (7) имеем

$$m\frac{dv}{dt} = \left(2 - \frac{v}{c_0}\right)^2 h_0 - F,$$

$$\left(-2(\sqrt{2} + 1) < \frac{v}{c_0} < 2(\sqrt{2} - 1)\right).$$

Рассмотрим несколько частных случаев решения этого уравнения. Сначала будем считать силу трения пренебрежимо малой ($F = 0$), тогда после интегрирования уравнения $dv/dt = (2 - v/c_0)^2 h_0/m$ с учетом начального условия $v(0) = v_0$ получаем

$$v = v_0 + 2\frac{h_0}{m}\left(2 - \frac{v_0}{c_0}\right)t \Big/ \left[1 + \frac{h_0}{mc_0}\left(2 - \frac{v_0}{c_0}\right)t\right]. \tag{12}$$

Отсюда, в частности, следует, что продольная составляющая реакции балки на тело (давление волн) $F_{pr} = \left(2 - \frac{v_0}{c_0} \Big/ \left[1 + \frac{h_0}{mc_0}\left(2 - \frac{v_0}{c_0}\right)t\right]\right)^2 h_0$.

Последующее интегрирование позволяет найти закон движения тела

$$l(t) = 2c_0 t - \frac{mc_0^2}{h_0}\ln\left|1 + \frac{h_0}{mc_0}\left(2 - \frac{v_0}{c_0}\right)t\right| + l(0).$$

Поскольку $-2(\sqrt{2} + 1) < \frac{v}{c_0} < 2(\sqrt{2} - 1)$, то время, в течение которого справедливы приведенные выше формулы, удовлетворяет неравенству

$$t < t^* = 2(\sqrt{2} - 1) - \frac{v_0}{c_0} \Big/ \left[\frac{2\sqrt{2}h_0}{mc_0}\left(2 - \frac{v_0}{c_0}\right)(\sqrt{2} - 1)\right].$$

[1] Такая модель широко используется в механике [21, 22]. Однако внимание обращается главным образом на динамическое поведение системы под действием движущихся нагрузок, либо на взаимодействие изгибных волн с неподвижными закреплениями.

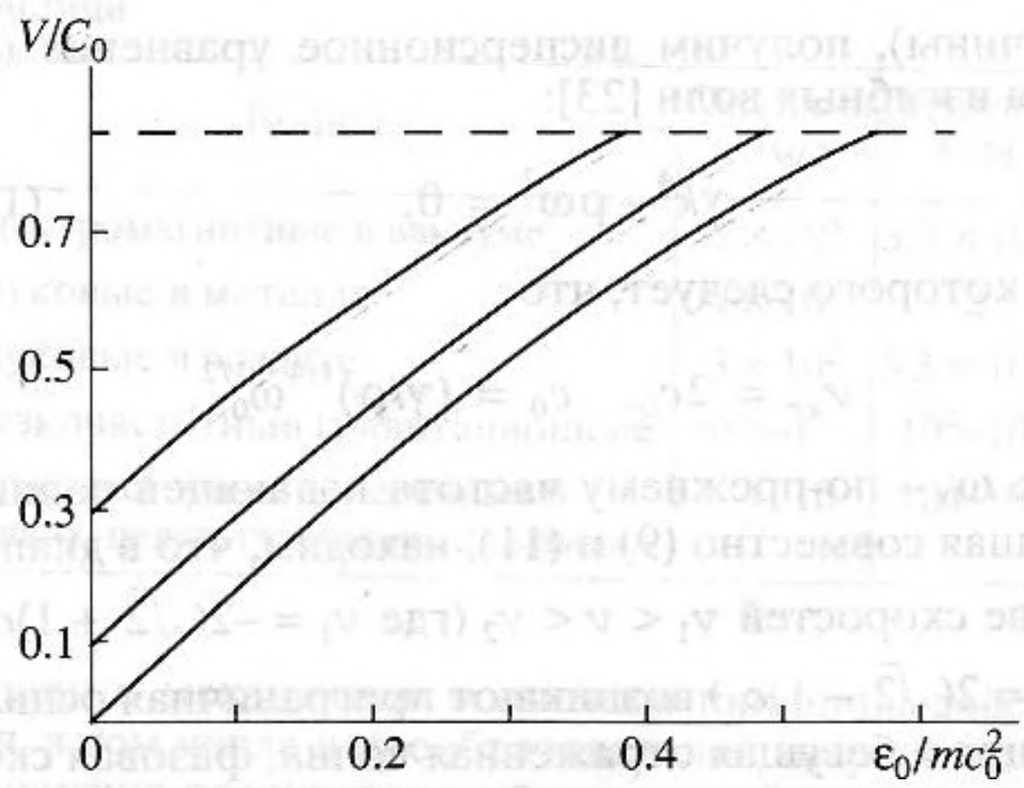

Рис. 2. Зависимость скорости движения массы от энергии падающей волны при различных начальных условиях.

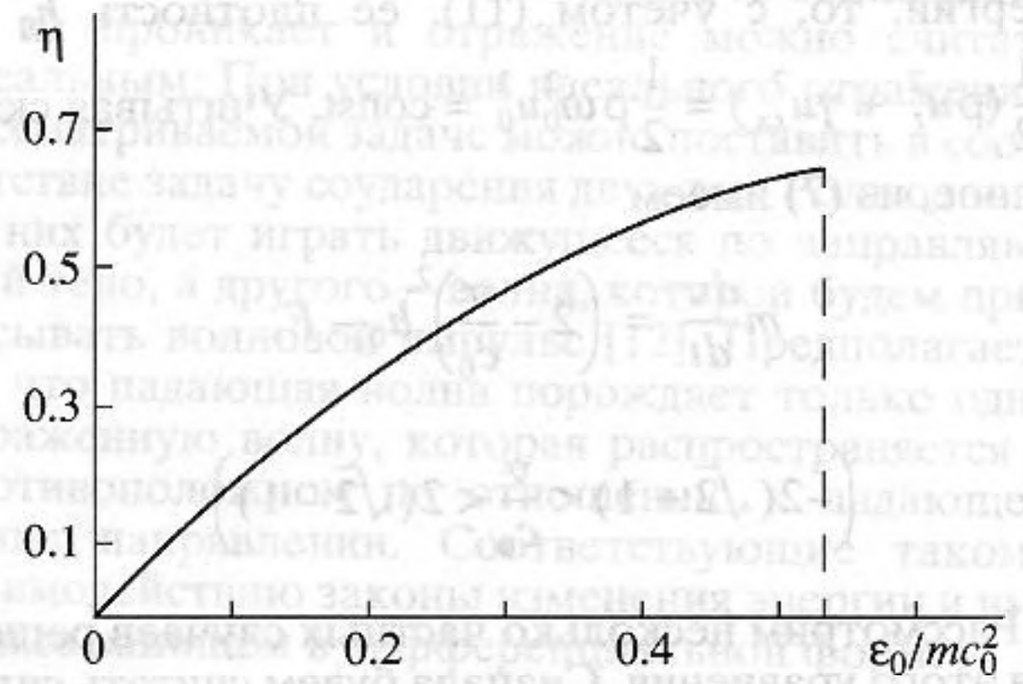

Рис. 3. Качественная зависимость КПД от приведенной энергии падающей волны.

Учитывая, что подводимая к движущейся массе энергия равна

$$\varepsilon_0 = \int_0^t (S_0 - vh_0)dt = h_0\int_0^t (2c_0 - v)dt =$$

$$= mc_0^2 \ln\left|1 + \frac{h_0}{mc_0}\left(2 - \frac{v_0}{c_0}\right)t\right|,$$

из (12) имеем $v = 2c_0 + (v_0 - 2c_0)\exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{mc_0^2}\right)$. Соответствующая этой формуле зависимость представлена на рис. 2.

Представляет также интерес рассчитать отношение изменения кинетической энергии к подводимой энергии, т.е. КПД $\eta = m(v^2 - v_0^2)/(2\varepsilon_0)$ ($t < t_*$). Отсюда при $v_0 = v(0) = 0$ с учетом (12) находим КПД разгона $\eta = 8h_0^2 t^2 / \left[m^2 c_0^2 \left(1 + \frac{2h_0 t}{mc_0}\right)^2 \ln\left|1 + \frac{2h_0 t}{mc_0}\right|\right]$, где $t < t_*$ или, выражая его через энергию падающей волны, $\eta = 2\left(\exp\left(\frac{\varepsilon_0}{mc_0^2}\right) - 1\right)^2 / \left[\frac{\varepsilon_0}{mc_0^2}\exp\left(\frac{2\varepsilon_0}{mc_0^2}\right)\right]$.

На рис. 3 представлена зависимость КПД от приведенной энергии падающей волны. Видно, что для рассматриваемого случая КПД не превосходит 0.7. Все решения получены в приближении (4):

$$mc_0\omega_0\left(1 - \frac{v}{c_0}\right)^3 / \left[2h_0\left(2 - \frac{v}{c_0}\right)^2\right] \gg 1$$

$$\left(\frac{v}{c_0} < 2(\sqrt{2} - 1)\right).$$

Наличие силы трения (3) приводит к существованию нескольких режимов движения [18]. Если сила, обусловленная давлением волн, меньше силы трения, то движение объекта за конечное время прекратится. В случае, когда эти силы сравнимы по величине, движение будет прерывистым. И наконец, движение объекта будет непрерывным, когда сила воздействия на него достаточно велика. Для последнего случая, в рамках указанного приближения, будем иметь

$$v = c_0\sqrt{K}\frac{1 + A_1\exp(2\beta t)}{1 - A_1\exp(2\beta t)} + 2c_0 + \frac{c_0^2\delta}{2h_0},$$

$$l(t) = c_0\left(\left(2 + \frac{c_0\delta}{2h_0} + \sqrt{K}\right)t - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{K}}{\beta}\ln\left|\frac{1 - A_1\exp(2\beta t)}{1 - A_1}\right|\right).$$

Здесь $A_1 = 2 - \frac{v_0}{c_0} + \frac{c_0\delta}{2h_0} + \sqrt{K} / \left[2 - \frac{v_0}{c_0} + \frac{c_0\delta}{2h_0} - \sqrt{K}\right]$, $K = \frac{c_0^2}{4}\left(\frac{8}{c_0} + \frac{\delta}{h_0}\right)\frac{\delta}{h_0} + \frac{F_0}{h_0}$, $\beta = \frac{h_0\sqrt{K}}{mc_0}$.

Таким образом, законы изменения энергии и импульса применительно к распределенным системам с движущимися вдоль них объектами позволяют определять некоторые важные величины, не прибегая к решению соответствующих нелинейных краевых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00344) и ФЦП "Интеграция".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* Historie de I Academie Royale de Berlin, 2, 1746. P. 117.
2. *Максвелл Дж.К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: ИЛ, 1954.
3. *Стретт Дж.* Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1944. Т. 2. С. 51–52.
4. *Лебедев П.Н.* Давление света. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1963. С. 368–390.
5. *Raileigh D.* On the pressure of vibrations // Phil. Mag., 2. 1902. Ser. 6. V. 3. № 15. P. 338–350.
6. *Larmor I.* Radiation. Encyclop. Brit. 1902. V. 32.
7. *Николаи Е.Л.* К вопросу о давлении вибраций // Изв. С.-Петербург. политехн. ин-та. 1912. Т. 18. Вып. 1. С. 49–60.
8. *Nicolai E.L.* On a Dinamical illustration of thre Pressure of Radiations // Phil. Mag. 1925. Ser. 6. V. 49. P. 171.
9. *Весницкий А.И., Потапов А.И.* О некоторых общих свойствах волновых процессов в одномерных механических системах переменной длины // Прикладная механика. 1975. Т. 11. № 4.
10. *Весницкий А.И., Крысов С.В.* Генерация импульсов в распределенных системах с подвижными границами // Письма в ЖТФ. 1977. Т. 3. № 19. С. 1032–1034.
11. *Весницкий А.И., Крысов С.В., Сьянов С.А., Уткин Г.А.* Излучение упругих волн в одномерных системах с равномерно движущимися закреплениями и нагрузками / Препринт № 160. НИРФИ. Горький, 1982. 17 с.
12. *Весницкий А.И., Каплан Л.Э., Уткин Г.А.* Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 863–866.
13. *Весницкий А.И., Метрикин А.В.* Переходное излучение в механике // УФН. 1996. Т. 166. № 10. С. 1044–1068.
14. *Metrikine A.V., Popp K.* Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space // European Journal of Mechanics A/Solids. 1999. V. 18. № 4. P. 679–701.
15. *Suiker A.S.J., Metrikine A.V., de Borst R.* Dynamic behavior of a layer of discrete particles. – Part 1. Analysis of body waves and ligen modes // Journal of Sound and Vibration. 2001. V. 240. № 1. P. 1–18.
16. *Весницкий А.И., Лисенкова Е.Е.* Частотно-энергетические соотношения для упругих волн в одномерных системах с движущимися объектами // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 2. С. 202–215.
17. *Виноградов М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
18. *Весницкий А.И., Уткин Г.А.* Движение тела вдоль струны под действием сил волнового давления // ДАН СССР. 1988. Т. 302. № 2. С. 810–811.
19. *Лисенкова Е.Е., Маланов С.Б.* Движение объекта вдоль струны под действием падающей волны // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 45–50.
20. *Дерендяев Н.В., Солдатов И.Н.* О движении точечной массы вдоль колеблющейся струны // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 703–706.
21. *Ichikowa M., Miyakowa Y., Matsuda A.* Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass // J. of Sound and Vibrat. 2000. V. 230. № 3. P. 493–506.
22. *Rao G.V.* Linear dynamics of an elastic beam under moving loads // Transactions of the ASME. J. of Vibration and Acoustics. 2000. V. 122. № 3. P. 281–289.
23. Вибрации в технике. Т. 1 / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

Transformation of the Elastic Wave Energy to the Energy of Motion of Bodies

A. I. Vesnitskii and E. E. Lisenkova

Abstract—The motion of a body along an elastic guide under the effect of an incident wave is considered. An equation describing the longitudinal motion of a body along an arbitrary guide is derived from the laws governing the energy and momentum variations for the case when the incident wave generates a single reflected wave. The equations that describe the motion of a body along a string and along a beam corresponding to the Bernoulli–Euler model are considered as examples. The process of the body acceleration along a beam of the aforementioned type is investigated. For the subcritical velocities, the law governing the motion of the body and the ratio of the kinetic energy variation to the energy supplied to the body are determined.