АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 2, с. 156–161

УДК 534.221;534.231.1

ФАКТОРИЗАЦИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД И ТЕНЗОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СКОРОСТЕЙ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

© 2002 г. Л. М. Барковский, А. Н. Фурс

Белорусский государственный университет,
220080 Минск, пр. Ф. Скорины, 4
E-mail: barkovsky@bsu.by

Поступила в редакцию 13.06.2000 г.

Проводится факторизация интегродифференциальных тензорных одномерных волновых уравнений акустики диспергирующих вязкоупругих анизотропных сред. Получаемые уравнения в частных производных первого порядка содержат тензорные интегральные функционалы скоростей звука поляризованных плоских волновых импульсов. Операторы скоростей $\hat{V}$ записываются в компактной бескоординатной форме. Они определяются ядрами интегральных представлений и дают общее описание кинематики и динамики волновых пакетов для любых направлений распространения в анизотропных вязкоупругих средах.

В монографии [1] приведены примеры факторизации некоторых нелинейных волновых уравнений в частных производных, позволяющей сводить их к уравнениям первого порядка, для которых существуют эффективные методы решения посредством характеристик [2]. Различные аспекты метода факторизации обсуждались также в [3–6]. Для систем уравнений вопросы факторизации усложняются из-за необходимости учета коммутации их матричных коэффициентов. Они еще более усложняются в случае интегродифференциальных уравнений [7, 8] при учете поляризации и дисперсии волновых пакетов. В настоящее время теория звуковых пучков и импульсов, последовательно учитывающая их поляризации и возможные трансформации, недостаточно разработана. Особенно это касается пространственно ограниченных плоских и объемных пучков в сложных неоднородных анизотропных средах [9]. Сдвиговое возмущение ограниченной длительности, представляемое набором волн с разными частотами, будет обладать скоростью, зависящей от его поляризации, и при этом в присутствии неоднородностей (например, границ раздела) или внешних воздействий (параметрическая акустика, электроакустика) может в той или иной мере трансформироваться в продольную или квазипродольную волну. Если фазовая скорость этого возмущения зависит от частоты, то среда обладает дисперсией, и скорость полного возмущения будет отличаться от скорости отдельных волн (его компонент). Из бесконечного множества состояний волн устойчивыми остаются только три (трипреломление в акустике кристаллов). Эти состояния характеризуют собственные (изонормальные) типы волн. Любые другие типы поляризации, допускаемые изотропной средой, при переходе волны в анизотропную среду даже при неизменном направлении распространения **n** распадаются на собственные, за исключением особых направлений **n** (акустических осей). Совокупности собственных волн характеризуются спектрами трехмерных эволюционных операторов (операторов Коши, пропагаторов) для волновых уравнений кристаллоакустики.

Один из приемов, упрощающих решение волновых уравнений, состоит в сведении их к уравнениям первого порядка (факторизации) [1], методы решения которых относительно хорошо разработаны [2]. В рассмотренных в [1, 10] примерах скалярных уравнений первого порядка для недиспергирующих сред в качестве коэффициента перед пространственной производной выступает скорость волны. В случае систем уравнений роль такого коэффициента выполняет матрица скоростей (тензорная скорость). Тензорные дисперсионные соотношения присущи акустическим материалам независимо от их сложности (линейности, нелинейности, изотропности, анизотропности, гиротропности и т.д. [11–14]).

Ниже мы рассматриваем поляризованные возмущения, все волновые нормали отдельных компонент которых параллельны некоторому фиксированному направлению **n**, и проводим факторизацию одномерного дифференциального тензорного волнового уравнения, описывающего та-

кие возмущения в линейных анизотропных вязкоупругих средах. На базе факторизации тензорных волновых уравнений мы предлагаем операторное описание поляризованных акустических пакетов. Как впервые показал Малюс, неполяризованные световые пакеты при отражениях могут поляризоваться, что указывает на ограниченность скалярного подхода. Важность этого заключения для акустики обуславливается наличием углов Брюстера сдвиговых волн [15]. Мы рассматриваем эволюционные тензорные решения, когда в начальной точке в начальный момент поле считается заданным. При этом одновременно учитываются изменения волнового поля в продольных и поперечных подпространствах в процессе распространения. Ниже показывается, как тензорное волновое уравнение второго порядка кристаллоакустики линейных анизотропных вязкоупругих сред сводится методом факторизации к интегродифференциальному уравнению первого порядка. В это уравнение входит тензор скоростей $\hat{V}$ второго ранга, являющийся функцией тензора модулей упругости и тензоров вязкости, а также волновой нормали $\mathbf{n}$. Из нашего рассмотрения следует, что тензорные скорости $\hat{V}$ есть просто математическое следствие уравнений Кристоффеля [16].

Рассмотрим факторизацию волнового уравнения акустики вязкоупругих анизотропных сред. Уравнения движения упругой среды имеют вид [16]

$$\rho\frac{\partial^2 u_i(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ik}(\mathbf{r},t)}{\partial x_k},$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = (u_i(\mathbf{r},t))$ – вектор смещения точек среды как функция радиус–вектора r точки наблюдения и времени t, σ_{ik} – тензор напряжений, ρ – плотность среды, по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Мы рассматриваем далее анизотропные вязкоупругие среды с памятью, для которых закон Гука записывается в следующей интегральной форме

$$\sigma_{ik} = c_{iklm}\gamma_{lm} + \hat{C}_{iklm}\gamma_{lm} =$$
$$= c_{iklm}\gamma_{lm}(\mathbf{r},t) + \int\limits_{-\infty}^{t} dt' C_{iklm}(t-t')\gamma_{lm}(\mathbf{r},t'),$$

где c_{iklm} – тензор модулей упругости, характеризующий мгновенный отклик среды на внешнее воздействие, $\hat{C}_{iklm}$ – интегральный оператор, описывающий последействие среды, $C_{iklm}(t-t')$ – ядро этого оператора, γ_{lm} – тензор деформаций. Отметим, что в силу причинности $C_{iklm}(t-t') = 0$ для отрицательных значений аргумента $t-t'$. Учитывая, что тензор деформаций $\gamma_{lm}(\mathbf{r},t)$ выражается через смещения $u_i(\mathbf{r},t)$ как $\gamma_{lm} = (\partial u_l/\partial x_m + \partial u_m/\partial x_l)/2$, а также принимая во внимание симметрию тензоров c_{iklm} и C_{iklm} относительно перестановок третьего и четвертого индексов, получаем

$$\rho\frac{\partial^2 u_i(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = c_{iklm}\frac{\partial^2 u_m(\mathbf{r},t)}{\partial x_k \partial x_l} + \int\limits_{-\infty}^{t} dt' C_{iklm}(t-t')\frac{\partial^2 u_m(\mathbf{r},t')}{\partial x_k \partial x_l}. \quad (1)$$

Пусть в направлении, задаваемом единичным вектором $\mathbf{n}$, распространяется волновой пакет. Введя координату $\zeta = \mathbf{nr}$ вдоль этого направления и заменяя пространственные производные $\partial/\partial x_k$ на $n_k\partial/\partial\zeta$, перепишем уравнение (1) в безиндексной форме

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\zeta,t)}{\partial t^2} = \Lambda\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\zeta,t)}{\partial \zeta^2} + \int\limits_{-\infty}^{t} dt'\Phi(t-t')\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\zeta,t')}{\partial \zeta^2}, \quad (2)$$

где тензоры второго ранга Λ и Φ определяются согласно формулам

$$\Lambda_{im} = \frac{1}{\rho}c_{iklm}n_k n_l, \quad \Phi_{im} = \frac{1}{\rho}C_{iklm}n_k n_l. \quad (3)$$

Для факторизации волнового уравнения (2) акустики вязкоупругих анизотропных сред представляем векторное поле смещений точек среды $\mathbf{u}(\zeta,t)$ в виде фурье-разложения

$$\mathbf{u}(\zeta,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{u}(\zeta,\omega)e^{-i\omega t},$$
$$\mathbf{u}(\zeta,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\mathbf{u}(\zeta,t)e^{i\omega t} \quad (4)$$

и подставляем (4) в (2)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t}\left\{-\omega^2 u(\zeta,\omega) - \Lambda\frac{\partial^2 u(\zeta,\omega)}{\partial\zeta^2} - \int\limits_{0}^{\infty} dt'\Phi(t')\frac{\partial^2 u(\zeta,\omega)}{\partial\zeta^2}e^{i\omega t'}\right\} = 0. \quad (5)$$

Введя тензор $\Phi(\omega)$ (фурье-образ ядра $\Phi(t)$)

$$\Phi(\omega) = \int\limits_{0}^{\infty} dt'\Phi(t')e^{i\omega t'} \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\Phi(t')e^{i\omega t'} \quad (6)$$

и приравнивая нулю выражение в фигурных скобках в (5), получаем

$$-\omega^2\mathbf{u}(\zeta,\omega) - [\Lambda + \Phi(\omega)]\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\zeta,\omega)}{\partial\zeta^2} = 0.$$

Тогда

$$\left[-i\omega+\sqrt{\Lambda+\Phi(\omega)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\left[-i\omega-\sqrt{\Lambda+\Phi(\omega)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\times$$

$$\times\mathbf{u}(\zeta,\omega)=\left[-i\omega-\sqrt{\Lambda+\Phi(\omega)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\times \qquad (7)$$

$$\times\left[-i\omega+\sqrt{\Lambda+\Phi(\omega)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\mathbf{u}(\zeta,\omega)=0,$$

где $\sqrt{\Lambda+\Phi(\omega)}$ – квадратный корень из оператора $\Lambda+\Phi(\omega)$ (об извлечении квадратного корня из операторов см., например, [17]). Тензорные дифференциальные операторы в квадратных скобках в (7) коммутируют, что позволяет перейти от уравнений (7) к дифференциальным уравнениям первого порядка для векторного поля смещений $\mathbf{u}(\zeta,\omega)$

$$-i\omega\mathbf{u}(\zeta,\omega)\pm\sqrt{\Lambda+\Phi(\omega)}\frac{\partial\mathbf{u}(\zeta,\omega)}{\partial\zeta}=0. \qquad (8)$$

Умножаем уравнение (8) на $e^{-i\omega t}/(2\pi)$, интегрируем по ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и с помощью преобразований (4) переходим от фурье-образа $\mathbf{u}(\zeta,\omega)$ к $\mathbf{u}(\zeta,t)$. В результате приходим к тензорному интегродифференциальному уравнению первого порядка для $\mathbf{u}(\zeta,t)$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\pm\hat{V}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\zeta}=0 \qquad (9)$$

или

$$\frac{\partial\mathbf{u}(\zeta,t)}{\partial t}\pm\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'V(t-t')\frac{\partial\mathbf{u}(\zeta,t')}{\partial\zeta}=0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}(\zeta,t)}{\partial t}\pm\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'V(t')\frac{\partial\mathbf{u}(\zeta,t-t')}{\partial\zeta}=0, \qquad (10)$$

где ядро $V(t)$ интегрального оператора $\hat{V}$ дается формулой

$$V(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{-i\omega t}\sqrt{\Lambda+\Phi(\omega)}. \qquad (11)$$

Оператор $\hat{V}$ имеет размерность скорости, и мы будем называть его оператором фазовых скоростей упругих волн в анизотропных вязкоупругих средах. Тензорный характер этого оператора обусловлен анизотропией среды, а интегральный характер – дисперсией волн в среде, которая является следствием вязкости среды. Лишь в отсутствие вязкости уравнение (10) становится локальным

$$\frac{\partial\mathbf{u}(\zeta,t)}{\partial t}\pm\sqrt{\Lambda}\frac{\partial\mathbf{u}(\zeta,t)}{\partial\zeta}=0. \qquad (12)$$

Из уравнения (6) следует, что ядро $\Phi(t)$ связано с $\Phi(\omega)$ следующим образом

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{-i\omega t}\Phi(\omega).$$

Так как $\Phi(t)=0$ при отрицательных значениях t (в силу причинности), то тензорная функция $\Phi(\omega)$ имеет регулярное аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости ω [18]. Полюсы функции $\Phi(\omega)$ всегда расположены в нижней полуплоскости ω. Ядро $\Phi(t)$, входящее в уравнение (2), имеет смысл функции отклика. Общие свойства функций отклика, обусловленные в том числе и требованиями причинности, подробно обсуждались в работах [19].

Волновое уравнение кристаллоакустики (2) обобщает скалярное уравнение

$$\varphi_{tt}-v^2\varphi_{xx}=0, \qquad (13)$$

встречающееся в различных разделах физики [1]. Очевидные усложнения в (2) определяются вязкоупругостью среды и тем, что различные компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$ взаимосвязаны, в том числе и в граничных условиях, причем тензорный характер связи (2) существенным образом обусловлен наличием у упругих волн такой характеристики, как поляризация.

Очевидно, что уравнение (2) также не сводится к (13) в случае изотропных невязких сред, т. е. оно имеет тензорную, нескалярную структуру даже в изотропных средах. Мы проводим тензорные (операторные) обобщения скоростей упругих волн по причинам, связанным с содержанием известных монографий Уизема и Лайтхилла по современной волновой теории [1, 20], в которых едва ли не первое место занимает вопрос о скоростях (в особенности групповых) линейных и нелинейных волн разной природы. Групповая скорость используется в различных сложных случаях анизотропных, нелинейных, диспергирующих сред для построения математических моделей нелинейных уравнений. Уизем [1] провел классификацию волновых систем на основе линейных, квазилинейных и нелинейных уравнений первого порядка и систем таких уравнений (гл. 5). Факторизация уравнения (13) приводит к

$$\varphi_t\pm v\varphi_x=0 \qquad (14)$$

с решениями

$$\varphi_+=f(x-vt),\quad \varphi_-=g(x+vt), \qquad (15)$$

где f и g – произвольные функции. Именно уравнение (14), а не (13) является отправным в построениях нелинейных модельных уравнений, простейшее из которых имеет вид

$$\varphi_t+v(\varphi)\varphi_x=0, \qquad (16)$$

где скорость распространения $v(\varphi)$ является функцией локального возмущения φ. Уравнение (16) называется квазилинейным, так как оно нелинейно по φ, но линейно по производным φ_t и φ_x. В общем нелинейном уравнении для функции $\varphi(x, t)$ допускается произвольная функциональная связь между φ, φ_t и φ_x. Ключом к решению уравнений типа (16) служит метод характеристик в плоскости (x, t); вдоль каждой характеристики уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Это в ряде случаев позволяет найти решение в аналитическом виде, в других случаях уравнение в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с последующим пошаговым численным интегрированием [1].

Для невязких анизотропных упругих сред пространственно-временная эволюция векторного поля $\mathbf{u}$ смещений описывается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_+(\zeta, t) &= F(\zeta - t\sqrt{\Lambda})\mathbf{u}_{0+}, \\ \mathbf{u}_-(\zeta, t) &= G(\zeta + t\sqrt{\Lambda})\mathbf{u}_{0-}, \end{aligned} \tag{17}$$

представляющими собой решения уравнений (12). Здесь $\mathbf{u}_{0\pm}$ – векторы смещений в начальной точке ζ_0 в начальный момент времени t_0, а функции F и G – произвольные функции тензорных аргументов $\zeta - t\sqrt{\Lambda}$ и $\zeta + t\sqrt{\Lambda}$, линейно зависящих от ζ и t. Эволюционные решения (17) обобщают даламберовские решения (15). Они являются эволюционными, поскольку в (17) подразумевается, что операторнозначные функции F и G есть операторы (тензоры второго ранга) матричного типа, действующие на начальные векторы $\mathbf{u}_{0\pm}$, считающиеся заданными. Каждое из решений (17) соответствует устойчивым (сохраняющим свою форму) плоским поляризованным волновым пакетам, распространяющимся либо в направлении положительного отсчета координаты ζ, либо в противоположном направлении.

Далее мы применим изложенный выше метод факторизации волнового уравнения для вязкоупругой изотропной среды с экспоненциальным ядром $C_{iklm}(t)$.

Тензор модулей упругости изотропной среды имеет вид [16]

$$c_{iklm} = (c_{11} - 2c_{44})\delta_{ik}\delta_{lm} + c_{44}(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}),$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, $c_{11} = c_{1111}$, $c_{44} = c_{2323}$. Предположим, что отклик среды является экспоненциальным. Тензор $C_{iklm}(t)$ симметричен относительно перестановок индексов i, k и l, m, а также пар индексов ik, lm и в рассматриваемом случае имеет следующее общее представление

$$\begin{aligned} C_{iklm}(t) = [&(C_{11} - 2C_{44})e^{-t/t_1}\delta_{ik}\delta_{lm} + \\ &+ C_{44}e^{-t/t_2}(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl})]\theta(t), \end{aligned}$$

где t_1, t_2 – времена релаксации, $\theta(t)$ – функция Хевисайда ($\theta(t) = 1$ при $t > 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t \le 0$). Для упрощения расчетов далее мы считаем, что времена релаксации одинаковы $t_1 = t_2 \equiv t_0$. Тогда тензоры Λ и $\Phi(t)$ (3) принимают вид

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{2} a_j\tau_j, \quad \Phi(t) = \sum_{j=1}^{2} b_j\tau_j e^{-t/t_0}\theta(t). \tag{18}$$

В (18) $a_1 = c_{11}/\rho$, $a_2 = c_{44}/\rho$, $b_1 = C_{11}/\rho$, $b_2 = C_{44}/\rho$, а τ_1, τ_2 – проективные тензоры (операторы)

$$\tau_1 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \tau_2 = 1 - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = -\mathbf{n}^{\times 2},$$

где $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ – диада (прямое произведение векторов), $\mathbf{n}^\times$ – тензор, дуальный вектору $\mathbf{n}$ [16], 1 – единичный тензор. Тензоры τ_1, τ_2 удовлетворяют соотношениям

$$\tau_1^2 = \tau_1, \quad \tau_2^2 = \tau_2, \quad \tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1 = 0. \tag{19}$$

Согласно (6) фурье-образ ядра $\Phi(t)$

$$\Phi(\omega) = \sum_{j=1}^{2} \tau_j \frac{ib_j}{\omega + i/t_0}.$$

Функция $\Phi(\omega)$ имеет полюс $\omega = -i/t_0$, лежащий в нижней полуплоскости комплексной плоскости ω.

По формуле (11) мы находим ядро $V(t)$ интегрального оператора фазовых скоростей $\hat{V}$. В силу свойств (19) проективных тензоров τ_1, τ_2 квадратный корень тензора $\Lambda + \Phi(\omega)$ равен

$$\sqrt{\Lambda + \Phi(\omega)} = \sum_{j=1}^{2} \tau_j \sqrt{a_j + \frac{ib_j}{\omega + i/t_0}}.$$

Для расчета интеграла (11) воспользуемся разложением подынтегральной функции в ряд

$$\sqrt{a_j + \frac{ib_j}{\omega + i/t_0}} = \sqrt{a_j}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n(2n-3)!!}{n!(\omega + i/t_0)^n}\left(\frac{b_j}{2a_j}\right)^n\right],$$

где $n!! = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times n$, $(-1)!! \equiv 1$. Замыкая контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса в нижней полуплоскости плоскости комплексных ω при $t > 0$ и в верхней полуплоскости при $t < 0$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega e^{-i\omega t}}{(\omega + i/t_0)^n} = 2\pi\frac{(-i)^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-t/t_0}\theta(t), \quad n \ge 1.$$

Кроме того

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} = 2\pi\delta(t),$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Таким образом, ядро $V(t)$ оператора фазовых скоростей дается формулой

$$V(t) = \sum_{j=1}^{2} \sqrt{a_j}\left[\delta(t) + \theta(t)e^{-t/t_0}\frac{b_j}{2a_j} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(n-1)!n!}\left(\frac{b_j t}{2a_j}\right)^{n-1}\right]\tau_j,$$

а факторизованное уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\zeta, t)}{\partial t} \pm \left[\sqrt{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{u}(\zeta, t)}{\partial \zeta} + \sum_{j=1}^{2}\frac{b_j}{2\sqrt{a_j}}\int_0^{\infty} dt' e^{-t'/t_0} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(n-1)!n!}\left(\frac{b_j t'}{2a_j}\right)^{n-1} \tau_j \frac{\partial \mathbf{u}(\zeta, t-t')}{\partial \zeta}\right] = 0. \quad (20)$$

В случае малой вязкости изотропной среды ($b_j t_0/a_j \ll \ll 1, j = 1, 2$) в (20) можно оставить только первый член разложения в ряд по n. В результате получается интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\zeta, t)}{\partial t} \pm \left[\sqrt{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{u}(\zeta, t)}{\partial \zeta} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2}\frac{b_j}{2\sqrt{a_j}}\int_0^{\infty} dt' e^{-t'/t_0}\tau_j \frac{\partial \mathbf{u}(\zeta, t-t')}{\partial \zeta}\right] = 0. \quad (21)$$

В отсутствие вязкости среды уравнения (20) и (21) переходят в (12) с тензором Λ, даваемым формулой (18).

В соотношениях (20) и (21) проективные операторы τ_1 и τ_2 учитывают изменения волнового поля в продольных и поперечных подпространствах в процессе его распространения, при этом оператор τ_2 может быть представлен в виде $\tau_2 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – любые взаимно перпендикулярные единичные векторы, лежащие в плоскости волнового фронта. В случае анизотропной вязкоупругой среды оператор фазовых скоростей $\hat{V}$ представляется в виде разложения по трем проективным операторам собственных волн с единичным следом (см., например, [12]).

В заключении отметим, что в современной акустике возникают задачи описания с высокой точностью тензорных акустических полей в пространстве и во времени, выявлении и количественном учете роли поляризации при фокусировке, преобразовании и фильтрации звуковых пучков. Тензорные скорости (9)–(11) позволяют сделать шаг в направлении к тензорной фурье-акустике волновых пучков в диспергирующих и вязкоупругих анизотропных средах. Изначальная скаляризация задачи ультразвукового распространения в силу возможности преобразования продольных волн в поперечные и наоборот, а также вследствие существования углов Брюстера [15] может приводить к недоразумениям. Пучок неполяризованных сдвиговых волн может поляризоваться в реальных условиях распространения и приобрести тем самым новые, изначально не учитываемые, физические свойства. Это и другие обстоятельства должны побуждать исследователей использовать аппарат тензорных фаз и скоростей, вытекающих прямо из фундаментальных тензорных уравнений движения (уравнений Кристоффеля).

Факторизация тензорных волновых уравнений открывает путь к введению нелинейных тензорных уравнений математической физики, учитывающих наличие у систем спиновых степеней свободы и обобщающих известные скалярные уравнения типа Кортевега де-Фриза, Дюффинга и др. Вывод и применение тензорных скоростей в некоторых нелинейных акустических динамических системах мы рассмотрим в отдельной публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Whitham G.B.* Linear and Nonlinear Waves. New York: John Wiley and Sons, 1974.
2. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
3. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1, 2. М.: ИЛ, 1958.
4. *Царев С.П.* Факторизация линейных дифференциальных операторов с частными производными и метод Дарбу интегрирования нелинейных уравнений с частными производными // Теор. и матем. физика. 2000. Т. 122. № 1. С. 144–160.
5. *Грава Т.* Существование глобального решения уравнения Уизема // Теор. и матем. физика. 2000. Т. 122. № 1. С. 59–71.
6. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
7. *Volterra V.* Theory of Functions and of Integral and Integro-Differential Equations. New York: Dover Publications, INC, 1958.
8. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988; *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
9. *Meseguer F. et al.* Rayleigh-Wave Attenuation by a Semi-Infinite Two-Dimensional Elastic-Band-Gap Crystal // Phys. Rev. B. 1999. V. 59. № 19. P. 12169–12172; *Torres M. et al.* Sonic Band Gaps in Finite Elastic Me-

dia: Surface States and Localization Phenomena in Linear and Point Defects // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. № 15. P. 3054–3057.

10. *Кадомцев Б.Б., Карпман В.И.* Нелинейные волны // УФН. 1971. Т. 103. Вып. 2. С. 193–232.

11. *Барковский Л.М., Ханг Ф.Т.Н.* Тензорный эйконал в геометроакустике кристаллов // Акуст. журн. 1990. Т. 36. С. 550–552; *Барковский Л.М., Ханг Ф.Т.Н.* Операторы эйконала и лучей в геометрической кристаллоакустике // Акуст. журн. 1991. Т. 37. С. 222–227.

12. *Барковский Л.М., Федоров Ф.И.* Импедансный тензор и прохождение упругих волн через плоскослоистые анизотропные среды // ДАН СССР. 1974. Т. 218. С. 1313–1317; *Барковский Л.М., Федоров Ф.И.* Тензорный импеданс в линейной акустике анизотропных вязких сред // ДАН БССР. 1975. Т. 19. С. 1070–1073; *Барковский Л.М., Федоров Ф.И.* Одномерное волновое уравнение кристаллоакустики и его операторные решения // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1975. № 2. С. 34–38; *Барковский Л.М., Федоров Ф.И.* Принципы операторного синтеза негармонических ультразвуковых полей в кристаллах // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. № 2. С. 43–48.

13. *Барковский Л.М., Мишенев И.В.* Тензорные соотношения Стокса в акустике анизотропных сред // Акуст. журн. 1994. Т.40. № 1. С. 24–27.

14. *Barkovsky L.M., Furs A.N.* Eikonal Groups of Photon and Phonon propagators in One-Dimensional Structures // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. V. 33. № 16. P. 3241–3251.

15. *Александров К.С.* Акустическая кристаллография. В сб. Проблемы современной кристаллографии / Под ред. Вайнштейна Б.К. и Чернова А.А. М.: Наука, 1975.

16. *Федоров Ф.И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.

17. *Barkovsky L.M., Borzdov G.N., Lavrinenko A.V.* Fresnel's Reflection and Transmission Operators for Stratified Gyroanisotropic Media // J. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 20. P. 1095–1106.

18. *Нуссенцвейг Х.М.* Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976.

19. *Киржниц Д.А.* Общие свойства электромагнитных функций отклика // УФН. 1987. Т. 152. Вып. 3. С. 399–422; *Долгов О.В., Максимов Е.Г.* Эффекты локального поля и нарушение соотношений Крамерса-Кронига для диэлектрической проницаемости // УФН. 1981. Т. 135. Вып. 3. С. 441–477.

20. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

Factorization of Integro-Differential Equations of the Acoustics of Dispersive Viscoelastic Anisotropic Media and the Tensor Integral Operators of Wave Packet Velocities

L. M. Barkovskii and A. N. Furs

Belarus State University, pr. F. Skoriny 4, Minsk, 220080 Belarus
e-mail: barkovsky@bsu.by

Factorization of tensor integro-differential wave equations of the acoustics of dispersive viscoelastic anisotropic media is performed for the one-dimensional case. The resulting first-order partial differential equations include integral tensor functionals of the sound velocities of polarized plane wave pulses. The velocity operators $\hat{V}$ are expressed in a coordinate-free compact form. They are determined by the kernels of the integral representations and provide a general description of the kinematics and dynamics of wave packets for arbitrary propagation directions in anisotropic viscoelastic media.