АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 2, с. 266–276

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ, РАСПОЛОЖЕННОМ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2002 г. **Е. Л. Шендеров**

Центральный научно-исследовательский институт "Морфизприбор"
197376 Санкт-Петербург, Чкаловский пр. 46
E-mail: shend@peterlink.ru

Поступила в редакцию 25.09.2000 г.

Рассмотрена дифракция звуковой волны на упругом цилиндре, находящемся вблизи поверхности упругого полупространства. Решение основано на использовании соотношения типа интегрального уравнения Гельмгольца с использованием функции Грина для упругого полупространства. Такая функция записана в виде интеграла по контуру Зоммерфельда на комплексной плоскости углов падения волн на границу полупространства. Получено интегральное уравнение относительно распределения звукового давления на поверхности цилиндра, которое сведено к бесконечной системе уравнений относительно коэффициентов разложения этого распределения в ряд Фурье. Полученные результаты справедливы для дифракции цилиндрической волны и дифракции плоской волны. Кроме того, они описывают и рассеянное поле для дифракции сферической волны в случае, когда точки приема и излучения удалены от цилиндра и находятся в одной плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.

Если тело находится вблизи звукоотражающей границы, то при излучении или дифракции звука возникают многократные переотражения между телом и границей, которые могут существенно изменить картину звукового поля. Дифракция звука на телах, находящихся вблизи плоской границы, исследовалась в ряде работ. В работах [1, 2] методом T-матриц с применением многократного суммирования переотраженных волн исследовано рассеяние на некоторых телах, находящихся вблизи жидкого полупространства. Были рассмотрены цилиндр с закруглениями на концах и упругая сферическая оболочка. В работах [3–5] задача решалась путем замены отражающей границы на зеркально отраженный от нее рассеивающий объект. При такой замене возникает задача о дифракции на двух телах, которая решается путем применения теорем сложения для специальных функций, входящих в разложения звуковых полей, и приводится к бесконечной системе уравнений. Методы решения таких задач приведены в работах [6–8]. Однако, замена границы на зеркальный объект справедлива только для идеальной (акустически жесткой или мягкой) границы. Если граница является упругой или импедансной, то такие методы неприменимы. Здесь ситуация является аналогичной классической задаче об отражении сферической волны от импедансной плоскости, подробное решение которой изложено в книге [9].

В настоящей статье рассмотрена дифракция на упругом цилиндре, находящемся вблизи упругого или импедансного полупространства. Полупространство может быть слоистым, а также покрытым упругой пластиной. При этом предполагается, что известна зависимость коэффициента отражения или входного импеданса поверхности полупространства от угла падения.

Приведенное ниже решение является строгим решением для двумерного случая, т.е. для задачи о дифракции цилиндрической звуковой волны на упругом цилиндре, когда ось цилиндра, оси цилиндрических источника и приемника параллельны друг другу и поверхности полупространства. Однако, как показано в Приложении 1, полученные результаты справедливы как для дифракции цилиндрической волны, так и для дифракции сферической волны в случае, когда точки приема и излучения находятся в одной плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, и расстояние от точки наблюдения или точки излучения до цилиндра велико по сравнению с длиной волны. В этом случае единственное различие между решениями для цилиндрической и сферической волн заключается в том, что амплитуда волны, рассеянной на цилиндре при дифракции цилиндрической волны (а, следовательно, и радиус эквивалентной сферы), оказывается в $\sqrt{2}$ раз больше, чем при дифракции сферической волны. Это обстоятельство было отмечено ранее в книге [10].

Прежде всего приведем вывод системы уравнений для определения коэффициентов разложения полного звукового поля на поверхности цилиндра.

Расположение системы координат показано на рис. 1. Пусть линейный нитевидный источник M_0, перпендикулярный плоскости чертежа, излучает цилиндрическую волну

$$p_i(\mathbf{r}_1) = -ik\rho cQG_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1), \tag{1}$$

где $k = \omega/c$ – волновое число, ρ и c – плотность и скорость звука в верхнем полупространстве, соответственно, Q – производительность источника, $G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) = iH_0^{(1)}(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|)/4$ – функция Грина для свободного пространства.

Полное звуковое поле в верхнем полупространстве удовлетворяет уравнению типа интегрального уравнения Гельмгольца

$$p(\mathbf{r}_1) = -ik\rho cQG(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) + \int\limits_{S = S_p + S_{cyl}} \left[p(\mathbf{r}_2)\frac{\partial G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial n_2} - \frac{\partial p(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2}G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\right]dS. \tag{2}$$

Здесь S – поверхность интегрирования, состоящая из поверхности цилиндра и поверхности полупространства. Вывод последнего уравнения приведен в приложении к работе [11]. Индекс 2 указывает, что дифференцирование выполняется по нормали в точке с координатой $\mathbf{r}_2$, причем в интеграле по поверхности S_{cyl} точка $\mathbf{r}_2$ находится на поверхности цилиндра, а в интеграле по поверхности S_p точка $\mathbf{r}_2$ находится на поверхности полупространства. В качестве функции Грина $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ может быть выбрана любая функция Грина дифференциального уравнения Гельмгольца. Для того, чтобы исключить интегрирование по бесконечной поверхности, выберем функцию Грина для верхнего полупространства, удовлетворяющую граничным условиям на поверхности (см. работу [11]), т.е.

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(iku(x_1 - x_2)) \times \times [\exp(ik\gamma|y_1 - y_2|) + A'_p\exp(ik\gamma(y_1 + y_2))]\frac{du}{\gamma}, \tag{3}$$

где $\gamma = \sqrt{1 - u^2}$, $A'_p = \exp(i2kb\gamma)A_p$, $A_p(u) = (w_p\gamma - 1)/(w_p\gamma + 1)$, $w_p = Z_p/(\rho c)$, Z_p – входной импеданс поверхности упругого полупространства. При замене переменной $u = \sin\theta$ выражение $A_p(u)$ превращается в формулу

$$A_p(\theta) = \frac{w_p\cos\theta - 1}{w_p\cos\theta + 1}, \tag{4}$$

определяющую коэффициент отражения плоской звуковой волны, падающей под углом θ на границу упругого полупространства. Заметим, что для локально-реагирующей поверхности (т.е.

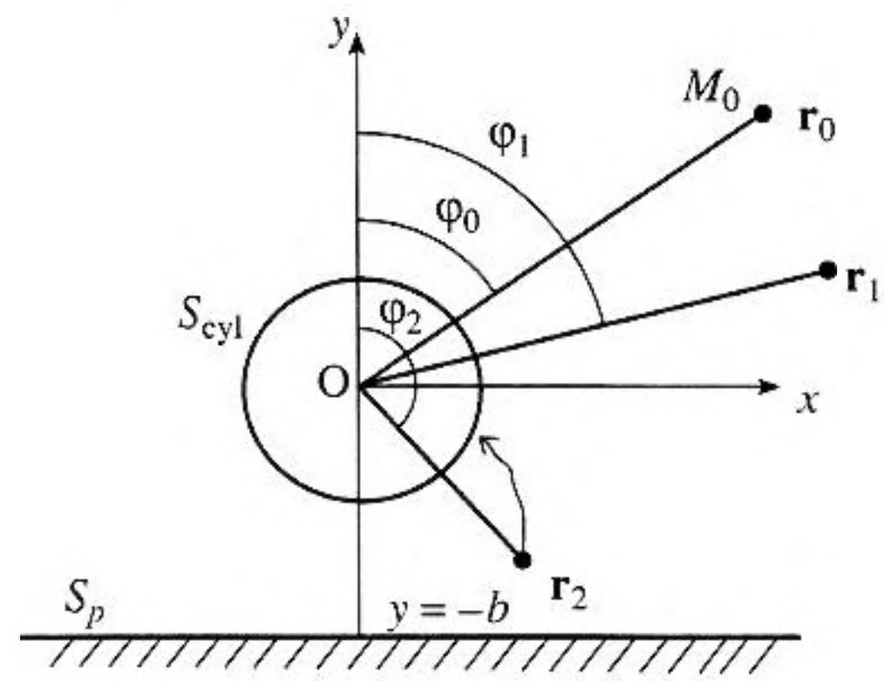

Рис. 1. Система координат.

поверхности, свойства которой описываются нормальным импедансом) импеданс w_p не зависит от угла падения, в то время как для упругой поверхности импеданс следует считать функцией этого угла. В книге [9] приведено выражение для этого импеданса

$$w_p = w_l\frac{\cos^2 2\theta_t}{\cos\theta_l} + w_t\frac{\sin^2 2\theta_t}{\cos\theta_t}. \tag{5}$$

Здесь $w_l = (\rho_1 c_l)/(\rho c)$, $w_t = (\rho_1 c_t)/(\rho c)$ – нормированные к ρc – волновые сопротивления среды в нижнем полупространстве. Индексами l и t обозначены значения для продольных и сдвиговых волн, соответственно, ρ_1, c_l, c_t – плотность среды и скорости этих волн. Углы преломления θ_l и θ_t удовлетворяют закону Снеллиуса $\sin\theta_l = \sin\theta(c_l/c)$, $\sin\theta_t = \sin\theta(c_t/c)$.

Запишем распределение звукового давления и нормальную составляющую колебательной скорости на поверхности полупространства в виде интегралов Фурье, представляющих разложения по волновым числам бегущих волн,

$$p(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(u)\exp(ikux_2)du, \tag{6}$$

$$v_n(x_2) = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial n_2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(u)\exp(ikux_2)du. \tag{7}$$

В этих выражениях x_2 означает точку, находящуюся на поверхности полупространства. Для каждой из плоских волн значения комплексных амплитуд звукового давления и колебательной скорости связаны соотношением $P(u) = -Z_p(u)V(u)$. Из этих выражений получаем, что нормальная производная звукового давления на поверхности по-

лупространства, входящая в уравнение (3), определяется в виде

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} = -ik\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(u)}{w_p(u)}\exp(ikux_2)du. \quad (8)$$

Подставляя выражения (3), (6) и (8) в уравнение (2), получим, что интеграл по всей поверхности полупространства (S_p) обращается в нуль и остается только интеграл по поверхности цилиндра (S_{cyl}). Таким образом, применение функции Грина в виде выражения (3) дало возможность исключить интегрирование по бесконечной поверхности.

Выражение (3) можно представить в виде $G = G_0 + G_1$, где G_0 – функция Грина свободного пространства и G_1 – слагаемое, определяющее поле, отраженное от границы полупространства, т.е.

$$G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) =$$

$$= \frac{i}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\begin{Bmatrix} J_n(kr_1)H_n^{(1)}(kr_2) \\ J_n(kr_2)H_n^{(1)}(kr_1)\end{Bmatrix}\exp(in(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad \begin{matrix} r_2 > r_1 \\ r_1 > r_2\end{matrix} \quad (9)$$

$$G_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) =$$

$$= \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A'_p\exp[ik(u(x_1 - x_2) + \gamma(y_1 + y_2)]\frac{du}{\gamma}. \quad (10)$$

Выражение (9) представляет собой теорему сложения для цилиндрических функций. После замены переменных $u = \sin\theta$, $\gamma = \cos\theta$ и перехода к цилиндрической системе координат: $x_1 = r_1\sin\varphi_1$, $y_1 = r_1\cos\varphi_1$, $x_2 = r_2\sin\varphi_2$, $y_2 = r_2\cos\varphi_2$ получаем

$$G_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4\pi}\int_{\Gamma}A'_p(\theta)\times$$

$$\times\exp[ikr_1\cos(\varphi_1 - \theta)]\exp[ikr_2\cos(\varphi_2 + \theta)]d\theta. \quad (11)$$

Здесь Г – контур Зоммерфельда: $-\pi/2 + i\infty$, $\pi/2 - i\infty$. Используя разложение плоской волны по цилиндрическим функциям

$$\exp(ikr\cos\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr)\exp(im\alpha), \quad (12)$$

получаем

$$G_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n J_n(kr_1)\exp(in\varphi_1)\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m J_m(kr_2)\exp(-im\varphi_2)f_{m+n}, \quad (13)$$

где f_{m+n} – коэффициенты, определяемые следующим выражением,

$$f_s = \frac{(-i)^s}{\pi}\int_{\Gamma}A_p(\cos\theta)\exp[i2kb\cos\theta + is\theta]d\theta. \quad (14)$$

Для акустически жесткой или акустически мягкой поверхности полупространства имеем: $A_p = 1$ или $A_p = -1$, соответственно. Тогда выражение (14) превращается в интегральное представление функции Ханкеля. Получаем $f_s = \pm H_s^{(1)}(2kb)$, где знаки плюс и минус относятся к акустически жесткой и акустически мягкой поверхностям, соответственно. Путем двукратного применения теоремы сложения можно показать, что в этих частных случаях слагаемое G_1 превращается в выражение $G_1 = iH_0^{(1)}(kR')/4$, описывающее поле линейного источника, зеркально отраженного от плоскости, причем $R' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$.

Представим неизвестное распределение полного звукового давления на поверхности цилиндра в виде разложения

$$p(r, \varphi)|_{r=a} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} p_q\exp(iq\varphi), \quad (15)$$

где p_q – неизвестные коэффициенты. Нормальную составляющую колебательной скорости в среде на поверхности цилиндра, равную радиальной составляющей колебательной скорости цилиндра, также можно представить в виде разложения

$$v(\varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} v_q\exp(iq\varphi) = \left.\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{r=a}.$$

Коэффициенты p_q и v_q связаны соотношением $v_q = -p_q/Z_q$, где Z_q – модовые импедансы колебаний упругого цилиндра, определяемые выражением (3п), приведенным в Приложении 1. Поэтому

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{r=a} = -ik\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{p_q}{w_q}\exp(iq\varphi). \quad (16)$$

Здесь $w_q = Z_q/(\rho c)$ – модовые импедансы, нормированные к волновому сопротивлению среды.

Устремим точку наблюдения на поверхность цилиндра, подставим полученные выше выражения в интегральное соотношение (2) и учтем, что при указанном выборе функции Грина можно ограничиться интегрированием по поверхности цилиндра. Дальнейшие преобразования являются несложными, но громоздкими. Поэтому мы лишь опишем основные этапы преобразований:

1. Подставим разложение (15) при $\varphi = \varphi_1$ в левую часть соотношения (2).

2. Подставим функцию Грина с входящими в нее выражениями (9) и (13) в первое слагаемое правой части, заменив в них r_2, φ_2 на a, φ_0.

3. Подставим разложения (15) и (16), определяющие распределения звукового давления и его нормальной производной на поверхности цилиндра, в подынтегральное выражение.

4. Подставим функцию Грина в подынтегральное выражение, причем дифференцирование по нормали будем выполнять по переменной r_2. После выполнения дифференцирования положим $r_1 = r_2 = a$. При выполнении дифференцирования в выражении (9) следует сначала устремить к поверхности точку r_2, т.е. считать, что $r_1 > r_2$ и выбрать нижнюю строчку формулы (9), продифференцировать по r_2 и затем положить $r_1 = r_2 = a$.

5. Проинтегрируем по φ_2 с учетом соотношения ортогональности экспоненциальных множителей. В результате суммы по n и m в подынтегральном выражении, содержащие φ_2, пропадут и от них останутся лишь члены с номерами $n = q$ или $m = q$.

6. Изменим в двойных суммах порядок суммирования, т.е. выполним замену $n \longleftrightarrow q$, для того, чтобы во всех слагаемых образовались множители $\exp(iq\varphi_2)$. Поскольку все суммы по q являются рядами Фурье, то полученное уравнение должно выполняться для каждого члена суммы по q.

7. Используя известное тождество $J_n'(ka)H_n^{(1)}(ka) = J_n(ka)H_n^{(1)\prime}(ka) - 2i/(\pi ka)$, получим систему уравнений относительно коэффициентов p_q

$$p_q + \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n z_{qn} = b_q, \quad q = -\infty \ldots \infty, \tag{17}$$

где

$$z_{qn} = \frac{w_q}{w_n}(-1)^{q+n}\frac{J_n(ka) - iw_n J_n'(ka)}{H_q^{(1)}(ka) - iw_q H_q^{(1)\prime}(ka)} f_{q+n}, \tag{18}$$

$$b_q = \frac{\rho c Q}{2\pi a}\frac{w_q}{H_q^{(1)}(ka) - iw_q H_q^{(1)\prime}(ka)} \times$$

$$\times \left(H_q^{(1)}(kr_0)\exp(-iq\varphi_0) + \right. \tag{19}$$

$$\left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+q} J_m(kr_0)\exp(-im\varphi_0) f_{m+q} \right).$$

Заметим, что коэффициенты матрицы z_{qn} не зависят ни от положения источника, ни от положения точки наблюдения. Свободные члены b_q зависят от положения источника, но не зависят от положения точки наблюдения.

Для определения звукового давления p в точке наблюдения M_1 снова обратимся к уравнению (2) и с учетом выражений (9), (13) представим его в виде суммы падающей цилиндрической волны p_i, волны, отраженной от границы полупространства p_r, и волны, рассеянной цилиндром p_s (разумеется с учетом многократного рассеяния между цилиндром и полупространством), т.е. запишем

$$p = p_i + p_r + p_s, \tag{20}$$

где

$$p_i = k\rho c Q H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|)/4, \tag{21}$$

$$p_r = \frac{k\rho c Q}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n J_n(kr_1)\exp(in\varphi_1) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m J_m(kr_0)\exp(-im\varphi_0) f_{m+n}, \tag{22}$$

$$p_s = \int_{S_{\text{cyl}}} \left[p(\mathbf{r}_2)\frac{\partial G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial n_2} - \frac{\partial p(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right] dS. \tag{23}$$

Рассмотрим сначала выражение (22). Подставим в него представление (14) и в каждой из сумм учтем разложение плоской волны по цилиндрическим функциям.

В результате получим интегральное представление отраженной волны

$$p_r = \frac{k\rho c Q}{4\pi}\int_{\Gamma} A_p(\theta)\exp[ik(2b\cos\theta +$$

$$+ r_1\cos(\varphi_1 + \theta) + r_0\cos(\varphi_0 - \theta)]d\theta. \tag{24}$$

Последнее выражение отличается от выражения (11) постоянным множителем и индексами, указывающими положение источника и точки наблюдения с координатами (r_0, φ_0) и (r_1, φ_1) соответственно. Оно представляет собой разложение отраженной цилиндрической волны, аналогичное интегралу Вейля–Бреховских [9] в классической задаче об отражении сферической волны от упругого полупространства.

Для определения рассеянного поля подставим в выражение (23) разложение (15) и функцию Грина, записанную в виде суммы выражений (9), (13). При этом будем считать, что точка $\mathbf{r}_2$ находится на поверхности цилиндра, т.е. $r_2 = a$. Поскольку при этом $r_1 > r_2$, то в выражении (9) следует взять нижнюю строчку. После этого получаем

$$p_s = -\frac{\pi ka}{2} \times$$

$$\times \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} p_q s_q H_q^{(1)}(kr_1)\exp(iq\varphi_1) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} p_q s_q u_q \right], \tag{25}$$

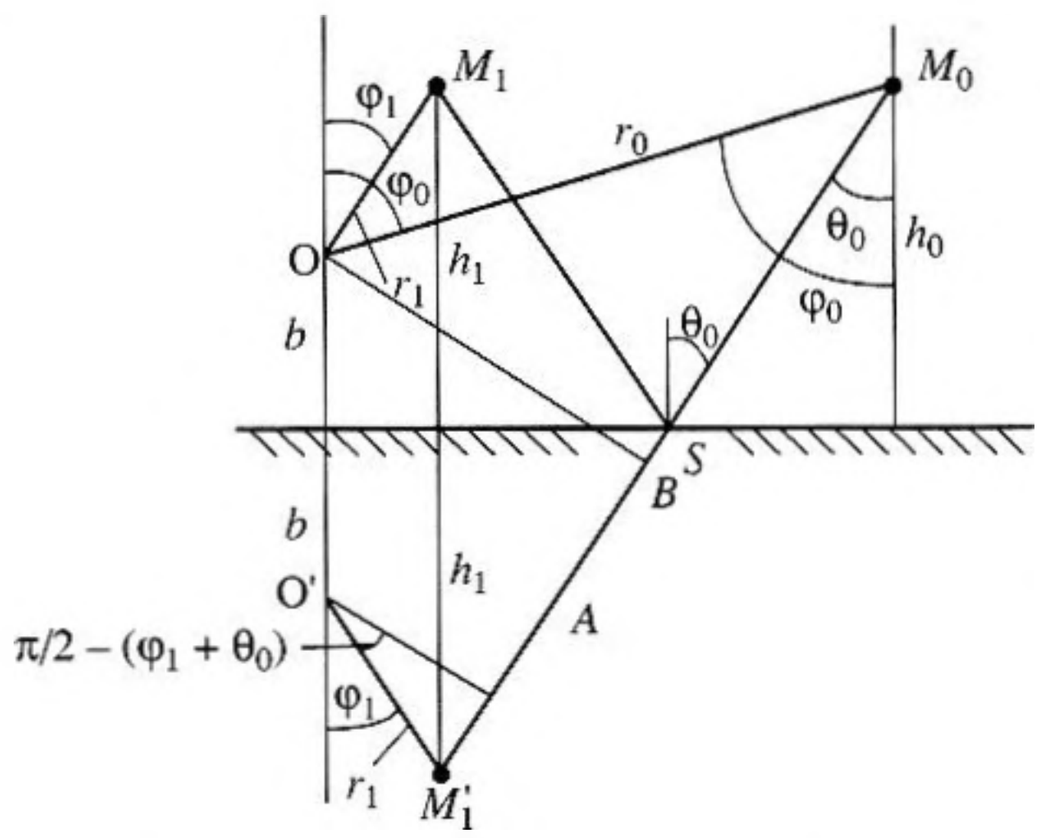

Рис. 2. К выводу выражений (33) и (34).

где

$$u_q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+q} J_n(kr_1)\exp(in\varphi_1) f_{n+q}, \qquad (26)$$

$$s_q = (J_q(ka) - iw_q J_q'(ka))/w_q. \qquad (27)$$

Система уравнений (17) и выражение для рассеянного поля (25) определяют поле рассеяния через коэффициенты разложения полного поля в ряд Фурье на поверхности цилиндра. Поэтому при уменьшении радиуса цилиндра эти коэффициенты стремятся не к нулю, а к коэффициентам разложения суммы падающего и отраженного поля. Целесообразно преобразовать их таким образом, чтобы выделить коэффициенты разложения рассеянного поля, стремящиеся к нулю при уменьшении радиуса цилиндра. Для этого введем новые коэффициенты разложения a_q, связанные с коэффициентами p_q соотношением

$$p_q = -a_q \frac{2}{\pi ka} \frac{w_q}{J_q(ka) - iw_q J_q'(ka)}. \qquad (28)$$

Тогда система уравнений (17)–(19) запишется следующим образом

$$a_q + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n D_{nq} = E_q, \quad q = -\infty \ldots \infty, \qquad (29)$$

$$D_{nq} = -a_q^{(0)} (-1)^{q+n} f_{q+n}, \qquad (30)$$

$$E_q = a_q^{(0)} \frac{k\rho c Q}{4} \left[H_q^{(1)}(kr_0)\exp(-iq\varphi_0) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+q} J_m(kr_0)\exp(-im\varphi_0) f_{m+q} \right], \qquad (31)$$

а рассеянное поле (25) примет вид

$$p_s = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \left[H_q^{(1)}(kr_1)\exp(iq\varphi_1) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+q} J_n(kr_1)\exp(in\varphi_1) f_{n+q} \right]. \qquad (32)$$

В выражениях (30) и (31) коэффициенты $a_q^{(0)}$ определяются формулами (2п) Приложения 1.

Чтобы получить асимптотические выражения для источника и приемника, находящихся вдали от цилиндра, рассмотрим сначала поле, отраженное от плоскости. Если хотя бы одно из значений волновых расстояний kr_1 или kr_0 много больше 1, то интеграл (24) можно вычислить методом перевала. Полюсы функции $A_p(\theta)$, которые могут быть пересечены при деформации контура интегрирования, можно не учитывать, т.к. вычеты в этих полюсах определяют поверхностные волны, экспоненциально затухающие при удалении от поверхности. В показателе экспоненты можно выделить слагаемое $ik(h_0 + h_1)\cos\theta$, где $h_0 = b + r_0\cos\theta$, $h_1 = b + r_1\cos\theta$ – расстояния от излучателя и точки наблюдения до поверхности, соответственно. Поэтому при вычислении вычета возникнет множитель $\exp(-k(h_0 + h_1)\mathrm{Re}(\cos\theta))$. Таким образом, амплитуда в поверхностной волне зависит от суммы $h_0 + h_1$, а не от каждого расстояния по отдельности. Следовательно, если хотя бы одно из расстояний от этих точек до поверхности больше длины волны, то вклад вычета можно не учитывать. Для задачи об отражении сферической волны от полупространства это обстоятельство отмечено в книге [9].

Значение переменной интегрирования, соответствующее точке перевала, определяется в виде

$$\mathrm{tg}\,\theta_0 = \frac{r_0\sin\varphi_0 - r_1\sin\varphi_1}{2b + r_0\cos\varphi_0 + r_1\cos\varphi_1}. \qquad (33)$$

Как следует из рисунка 2, значение θ_0 является углом падения звука в точке, соответствующей зеркальному отражению. После вычисления интеграла получаем

$$p_r \approx A_p(\theta_0)\frac{k\rho c Q}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi kl}}\exp(ikl - i\pi/4),$$
$$kr_1 \gg 1, \quad k(h_0 + h_1) \gg 1, \qquad (34)$$

где $l = r_1\cos(\varphi_1 + \varphi_0) + 2b\cos\theta_0 + r_0\cos(\varphi_0 - \theta_0)$ – суммарное расстояние M_0SM_1 (рис. 2). Первое, второе и третье слагаемые последнего выражения представляют собой отрезки $M_1'A$, AB и BM_0, соответственно. Таким образом, в дальнем поле, как и следует ожидать, отраженное поле определяется как результат излучения цилиндрического источ-

ника, расположенного зеркально относительно границы с амплитудой, пропорциональной коэффициенту отражения звука при угле падения, соответствующим геометрооптическому отражению.

Если источник находится на большом расстоянии от цилиндра, т.е. $kr_0 \gg 1$, то выражение (31) можно упростить. Для этого представим сумму, входящую в это выражение, в виде

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} = \frac{i^q}{\pi}\int_{\Gamma} A_p(\theta)\times \tag{35}$$
$$\times \exp(ik(2b\cos\theta + r_0\cos(\theta-\varphi_0)) + iq\theta)d\theta.$$

При $kr_0 \gg 1$ этот интеграл можно вычислить методом перевала. Если $r_0 \gg b$ и $kr_0 \gg q$, то точка перевала θ_0 определится в виде $\theta_0 \approx \varphi_0$. При деформации контура интегрирования в перевальный контур могут быть пересечены полюсы функции $A_p(\theta)$. Вычеты в этих полюсах определяют поверхностные волны вблизи границы полупространства. Однако, в связи с тем, что вклады этих полюсов экспоненциально убывают при удалении от границы, при расчете поля удаленного источника их можно не учитывать. Заметим, что все вклады полюсов и соответствующих им поверхностных волн, возникающих при взаимодействии близко расположенных цилиндра и границы, учитываются точно, т.к. они описываются коэффициентами f_{q+m}, входящими в коэффициенты матрицы z_{qm}.

После вычисления интеграла получаем систему уравнений

$$a_q + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n D_{qn} = F_q, \quad q = -\infty \ldots \infty, \tag{36}$$

где коэффициенты матрицы совпадают с коэффициентами, определяемыми выражением (30), а правые части записываются в виде

$$F_q \approx p_i^{(0)} a_q^{(0)} (-i)^q \times \tag{37}$$
$$\times [\exp(-iq\varphi_0) + (-1)^q A'_p(\varphi_0)\exp(iq\varphi_0)].$$

причем $p_i^{(0)}$ – представляет собой звуковое давление в свободном поле в точке, через которую проходит ось цилиндра, т.е.

$$p_i^{(0)} \approx \frac{k\rho c Q}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}}\exp(ikr_0 - i\pi/4).$$

При дифракции плоской волны единичной амплитуды следует положить $p_i^{(0)} = 1$ и заменить знак приближенного равенства на знак точного равенства.

Вычислим звуковое давление в рассеянной волне в точке наблюдения, находящейся вдали от цилиндра при выполнении условия $kr_1 \gg 1$. Сумму по n, входящую в выражение (32), можно представить в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \frac{i^q}{\pi}\int_{\Gamma} A_p(\theta)\times \tag{38}$$
$$\times \exp[ik(2b\cos\theta + r_1\cos(\varphi_1+\theta)) + iq\theta]d\theta.$$

В дальнем поле, т.е. при тех же ограничениях, которые были указаны при вычислении интеграла (35), интеграл (38) можно вычислить методом перевала. Точка перевала определяется как $\theta_0 = -\varphi_1$. После этого получаем рассеянное поле

$$p_s = \sqrt{\frac{2}{\pi k r_1}}\exp(ikr_1 - i\pi/4)\Phi_s(\varphi_1), \tag{39}$$

где

$$\Phi_s(\varphi_1) \approx \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q(-i)^q \times \tag{40}$$
$$\times [\exp(iq\varphi_1) + (-1)^q \exp(-iq\varphi_1)A'_p(\varphi_1)].$$

Система уравнений (36) и выражения (39), (40) полностью определяют дальнее рассеянное поле при дифракции плоской, а также цилиндрической волны на упругом цилиндре, находящемся вблизи поверхности упругого полупространства.

В системе уравнений (36) индексы принимают как положительные, так и отрицательные значения, в то время как существующие программы решения систем уравнений оперируют с положительными значениями индексов. В случае простой перенумерации путем постоянного сдвига окажется, что наиболее существенные члены (например, a_0, a_1), окажутся в середине системы, что неудобно при решении бесконечной системы методом усечения. Поэтому целесообразно преобразовать эту систему таким образом, чтобы индексы имели положительные значения и чтобы наиболее существенные члены находились в начале системы. Кроме того, полезно выделить симметричную и антисиммметричную части решения относительно направления $\varphi_1 = 0$. Это дает возможность разбить систему на две системы, причем каждая из них будет иметь вдвое меньший размер по сравнению с исходной системой, что может дать некоторый выигрыш во времени решения при больших порядках системы. Преобразования и окончательные расчетные формулы здесь для краткости не приводятся.

Рассмотрим теперь вычисление коэффициентов f_{n+q}, определяемых интегралом (14). Разобьем этот интеграл на интегралы по участкам $(-\pi/2 + i\infty, -\pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$ и $(\pi/2, \pi/2 - i\infty)$. В первом из этих интегралов сделаем замену переменных $\theta = -\pi/2 + i\alpha$, а в третьем интеграле – замену $\theta = \pi/2 - i\alpha$. Обозначив значение функ-

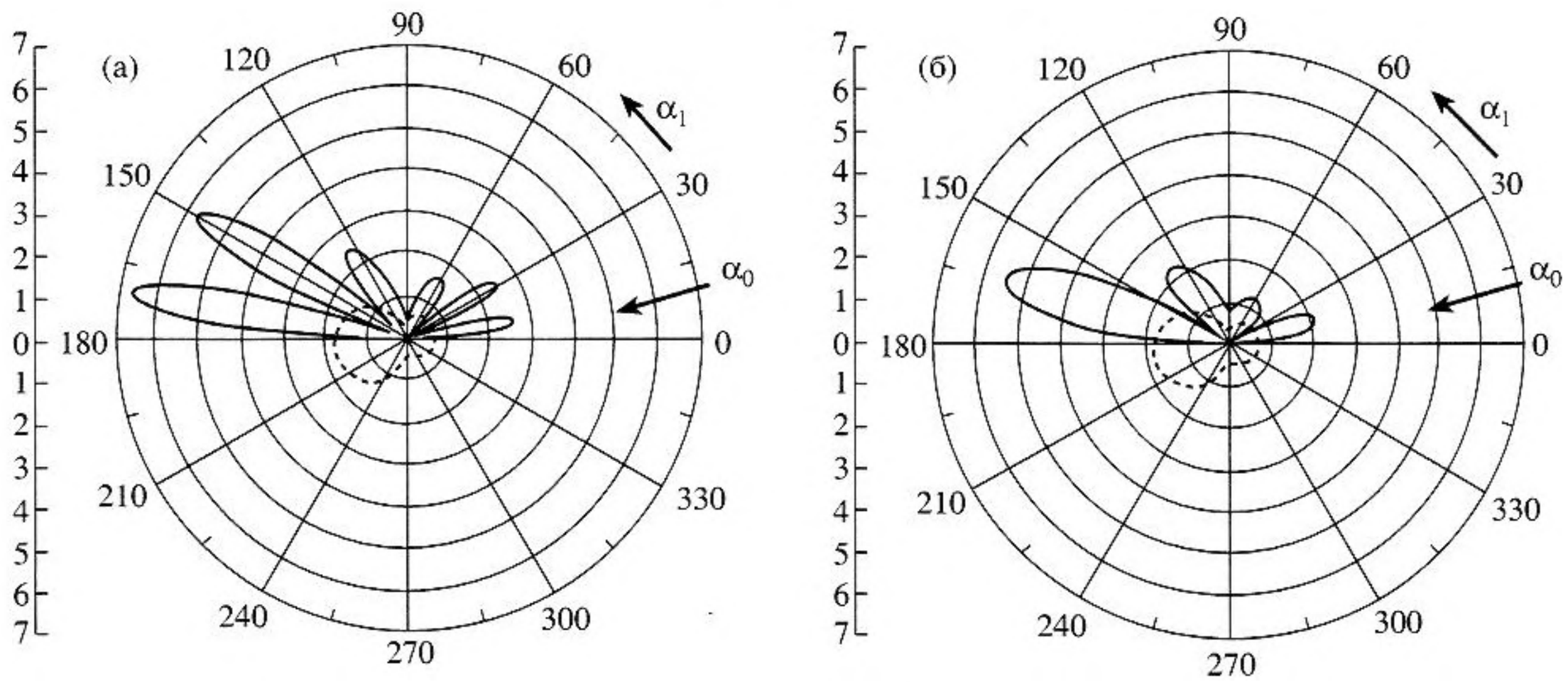

Рис. 3. Двухпозиционные диаграммы рассеяния на эластичном цилиндре, находящемся вблизи поверхности жидкого полупространства (сплошные кривые). Пунктирные кривые – диаграмма рассеяния в свободном пространстве. ρ_m = = 2000 кг/м^3, $ka = 3.0$, $c_l^{(cyl)} = 2000$ м/с, $c_t^{(cyl)} = 300$ м/с, $\varepsilon_l^{(cyl)} = 0.1$, $\varepsilon_t^{(cyl)} = 0.2$, $\rho_1 = 1800$ кг/м^3, $c_l = 2000$ м/с, $\varepsilon_l = 0.01$, $\varphi_0 = 80°$, ($\alpha_0 = 10°$). а – $kb = 7.0$, б – $kb = 3.0$.

ции $A_p(\theta)$ при $\theta = \pm(\pi/2 - i\alpha)$ через $A_p^{(1)}(\alpha)$, получим $f_s = (-i)^s(I_1 - iI_2)/\pi$,

где

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} A_p(\theta)\exp(i2kb\cos\theta)\cos(n\theta)d\theta, \qquad (41)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} A_p^{(1)}(\alpha)\exp(-2kb\,\mathrm{sh}\,\alpha)\times \qquad (42)$$

$$\times[\exp(i\pi n/2 + n\alpha) + \exp(-(i\pi n/2 + n\alpha))]d\alpha.$$

$$A_p^{(1)}(\alpha) = \frac{iw_p\,\mathrm{sh}\,\alpha - 1}{iw_p\,\mathrm{sh}\,\alpha + 1}, \qquad (43)$$

а углы преломления θ_l и θ_t, входящие в выражение (5), записываются в виде

$$\sin\theta_l = (c_l/c)\mathrm{ch}\,\alpha, \quad \sin\theta_t = (c_t/c)\mathrm{ch}\,\alpha. \qquad (44)$$

На вещественной оси комплексной плоскости θ функция $A_p(\theta)$ не имеет полюсов. Поэтому вычисление интеграла I_1 не вызывает затруднений.

При отсутствии потерь в среде функция $A_p^{(1)}(\alpha)$ на участке интегрирования в некоторых точках может обращаться в бесконечность, что соответствует условию возникновения поверхностных волн. В этих случаях следует добавить вычет в соответствующем полюсе. Однако при этом придется решать довольно сложное трансцендентное уравнение. Поэтому проще полагать, что в отражающем полупространстве всегда есть потери и считать скорости продольных и поперечных волн комплексными величинами.

Интеграл (42) быстро сходится, причем подынтегральное выражение начинает резко убывать при $\mathrm{sh}\,\alpha > n\alpha(2kb)$. Заметим, что в связи с наличием высоких максимумов в подынтегральном выражении для уменьшения времени интегрирования целесообразно не интегрировать сразу по всему интервалу, а разбить интервал интегрирования на ряд более мелких интервалов и затем вычислять интегралы в каждом из этих интервалов каким-либо квадратурным методом. В настоящей работе использовался метод Гаусса с автоматическим подбором числа точек.

Системы уравнений решались методом усечений, причем для получения по крайней мере 3 верных знаков результата было достаточно удерживать количество членов ряда и, соответственно, количество уравнений в системах, порядка $1.2k\alpha + 3$. Сходимость системы слабо зависит от расстояния между цилиндром и поверхностью полупространства и сохраняется вплоть до касания цилиндра и границы.

При расчете двухпозиционных (бистатических) диаграмм рассеяния на эластичном цилиндре (рис. 3) учитывались активные потери в материале цилиндра, причем коэффициенты, характеризующие затухание звука при распространении поперечных волн, считались вдвое большими, чем для продольных волн, что характерно для эластичных сред (типа резиноподобных материалов). На этом и последующих рисунках в качестве ар-

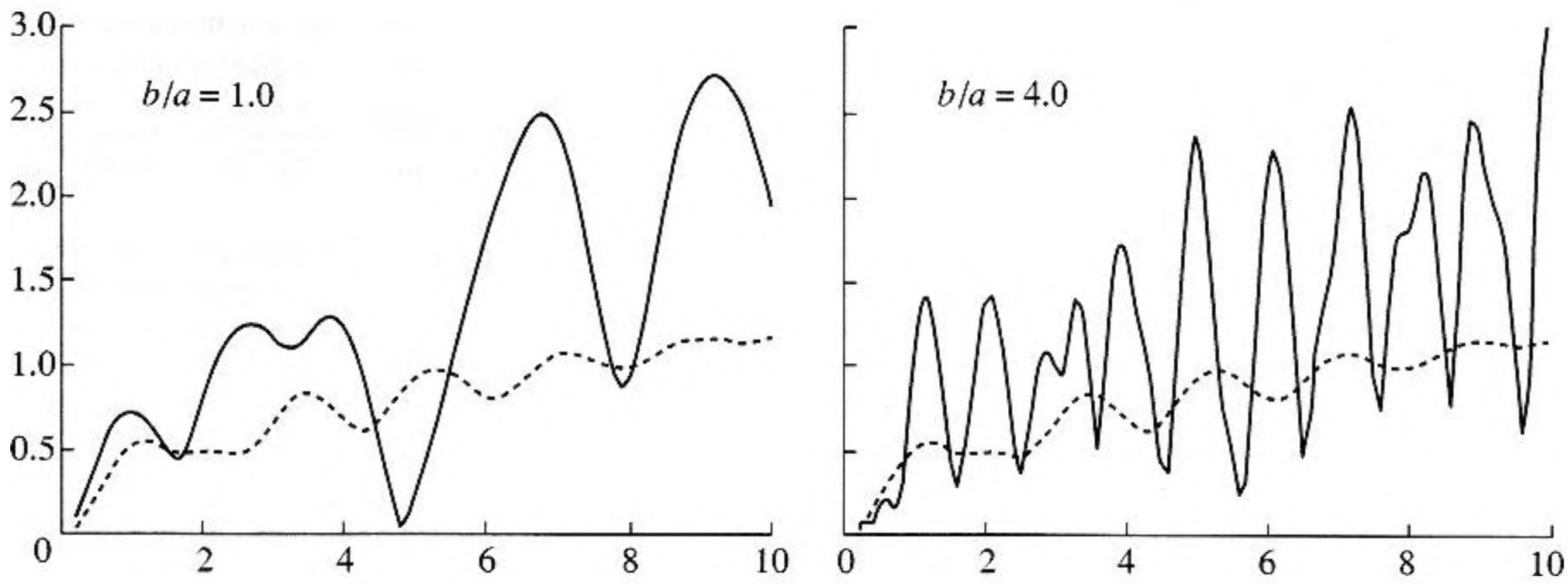

Рис. 4. Зависимости относительной амплитуды обратного рассеяния на цилиндре, находящемся вблизи границы полупространства (сплошная кривая), от волнового радиуса при различных расстояниях от цилиндра до поверхности. Пунктирная кривая – амплитуда обратного рассеяния в свободном поле. $\rho_m = 2000$ кг/м^3, $ka = 3.0$, $c_l^{(cyl)} = 2000$ м/с, $c_t^{(cyl)} = 300$ м/с, $\varepsilon_l^{(cyl)} = 0.1$, $\varepsilon_t^{(cyl)} = 0.2$, $\rho_1 = 1800$ кг/м^3, $c_l = 2000$ м/с, $\varepsilon_l = 0.01$, $\varphi_0 = 45°$.

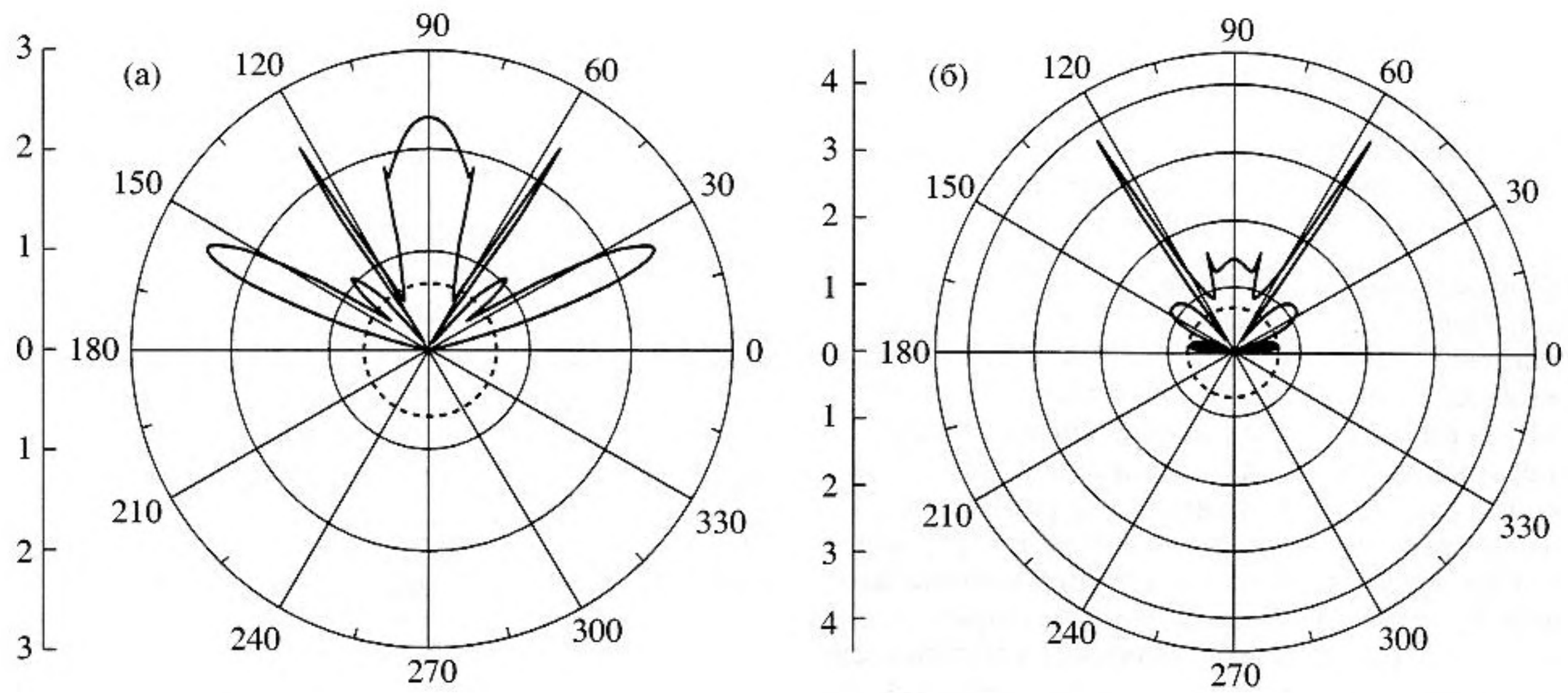

Рис. 5. Диаграммы рассеяния на эластичном цилиндре, находящемся вблизи поверхности упругого полупространства, в направлении, обратном направлению падения волны (сплошные кривые). Пунктирные кривые – диаграмма рассеяния в свободном пространстве. $\rho_m = 2000$ кг/м^3, $ka = 3.0$, $c_l^{(cyl)} = 1800$ м/с, $c_t^{(cyl)} = 300$ м/с, $\varepsilon_l^{(cyl)} = 0.1$, $\varepsilon_t^{(cyl)} = 0.2$, $\rho_1 = 2700$ кг/м^3, $c_l = 6100$ м/с, $c_t = 3050$ м/с, $\varepsilon_l = 0.001$, $\varepsilon_t = 0.002$. а – $kb = 7.0$, б – $kb = 3.0$.

гумента по угловой координате взято значение $\alpha_1 = 90° - \varphi_1$.

По сравнению с диаграммами рассеяния в свободном пространстве диаграммы рассеяния на цилиндре, расположенном вблизи границы, являются более неравномерными. Возникновение дополнительных максимумов и минимумов на диаграммах является следствием многократных переотражений рассеянных волн и интерференции между ними. Чем больше расстояние между цилиндром и границей, тем меньше угловое расстояние между экстремумами кривых. В отдельных направлениях амплитуда волны, рассеянной цилиндром, находящимся вблизи границы полупространства, оказывается в 2–3 раза больше, чем амплитуда волны, рассеянной цилиндром, находящимся в свободном пространстве.

Зависимости амплитуды рассеяния от волнового радиуса цилиндра имеют осциллирующий характер (рис. 4). Здесь проявляются два вида осцилляций. Один из них связан с резонансными колебаниями цилиндра, а второй – является следст-

вием интерференции многократно рассеянных волн между цилиндром и плоскостью. При увеличении расстояния между цилиндром и поверхностью полупространства частота осцилляций возрастает.

Приведенные выше результаты относились к случаю, когда цилиндр находится вблизи жидкого полупространства. На рис. 5 приведены результаты расчета функции обратного (моностатического) рассеяния для упругого полупространства. На диаграммах обратного рассеяния появляются острые максимумы, вызванные возбуждением продольных и поперечных волн. Углы, при которых возникают эти максимумы, удовлетворяют условиям $\sin\varphi_1 \approx c/c_l$ и $\sin\varphi_1 \approx c/c_t$. На рис. 5 этим углам соответствуют значения $\alpha_1 = \pi/2 - \varphi_1$, равные 57° и 123° для сдвиговых волн, а также 76° и104° – для продольных волн.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (грант № 00-02-17840).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

О связи между решениями задач дифракции на цилиндре для цилиндрической и сферической волн

Дифракция плоской волны на упругом цилиндре впервые была рассмотрена в статье [12]. Впоследствии аналогичные задачи в различных постановках решались в ряде работ (например, [13, 14]). В работе [15] рассматривалась дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре. Однако, как указано в этой работе, решение сводится к довольно сложным интегралам на комплексной плоскости от цилиндрических функций комплексного аргумента, которые весьма трудны для вычислений. Поэтому в настоящей работе использовано точное решение плоской задачи, а переход к решению для сферической падающей волны выполняется для асимптотического случая, когда излучатель и приемник находятся вдали от цилиндра.

Пусть центр цилиндра с радиусом a находится в начале координат, а положения нитевидного источника цилиндрической волны и точки наблюдения определяются координатами r_0, φ_0 и r_1, φ_1, соответственно. Поле рассеяния, возникающее при решении задачи дифракции цилиндрической звуковой волны на упругом цилиндре, определяется известным разложением (см., например, [10])

$$p_s^{(\mathrm{cyl})} = \frac{k\rho c Q}{4} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(0)} H_n^{(1)}(kr_0) H_n^{(1)}(kr_1) \exp(in(\varphi_1 - \varphi_0)), \tag{1п}$$

где

$$a_n^{(0)}(ka) = -\frac{J_n(ka) - iw_n J_n'(ka)}{H_n^{(1)}(ka) - iw_n H_n^{(1)\prime}(ka)}. \tag{2п}$$

Здесь $w_n = Z_n/\rho c$ – нормированные к ρc модовые импедансы колебаний упругого цилиндра. Выражения для импедансов Z_n приведены в книге [7]. Они имеют вид

$$Z_n = \frac{i\rho_m c_t^{(\mathrm{cyl})}}{k_t a} \times \frac{F_1(k_l a)F(k_t a) - 2F_3(k_l a)F_2(k_t a)}{nJ_n(k_t a)F_1(k_l a) - k_l J_n'(k_l a)F_2(k_t a)}, \tag{3п}$$

причем $k_l = \omega/c_l^{(\mathrm{cyl})}$, $k_t = \omega/c_t^{(\mathrm{cyl})}$ – волновые числа для продольной и сдвиговой волн в материале цилиндра, ρ_m – плотность материала цилиндра.

$$F_1(x) = 2n(xJ_n'(x) - J_n(x));$$
$$F_2(x) = x^2 J_n''(x) - xJ_n'(x) + n^2 J_n(x); \tag{4п}$$
$$F_3(x) = x^2[J_n''(x) + (1 - (c_l^{(\mathrm{cyl})}/c_t^{(\mathrm{cyl})})^2/2)J_n(x)].$$

В выражении (3п) исправлена опечатка, имеющаяся в работе [7].

При kr_0, $kr_1 \gg 1$, используя асимптотические выражения для функций Ханкеля, и нормируя к звуковому давлению в падающей цилиндрической волне в точке, находящейся на расстоянии, равном расстоянию от источника до оси цилиндра, т.е. к величине

$$p_0^{(\mathrm{cyl})} = \frac{k\rho c Q}{4} H_0^{(1)}(kr_0) \approx \frac{k\rho c Q}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \exp(ikr_0 - i\pi/4),$$

находим отношение амплитуды звукового давления в рассеянной волне к амплитуде падающей волны в начале координат

$$\frac{p_s^{(\mathrm{cyl})}}{p_0^{(\mathrm{cyl})}} = \sqrt{\frac{2}{\pi k r_1}} \exp(ikr_1 - i\pi/4)\Phi_s(ka), \tag{5п}$$

где

$$\Phi_s(ka) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n a_n^{(0)}(ka) \exp(in(\varphi_0 - \varphi_1)). \tag{6п}$$

Предположим теперь, что звук излучается сферическим источником и расстояние от источника до оси цилиндра равно r_0. Тогда звуковое

давление в свободном поле в точке, расположенной на этом расстоянии, будет

$$p_0^{(\mathrm{sph})} = -ik\rho cQ\frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0}. \qquad (7п)$$

Для того, чтобы получить поле рассеяния в трехмерном случае, т.е. для сферической волны, можно воспользоваться следующим известным ([10, 16]) приемом: заменить везде k на $\sqrt{k^2-\xi^2}$, умножить на $\exp[i\sqrt{k^2-\xi^2}(z_1-z_0)]/(2\pi)$, где z_1 и z_0 – координаты точки наблюдения и источника вдоль оси цилиндра (рис. 1п), и проинтегрировать по ξ в бесконечных пределах. Получаем

$$p_s^{(\mathrm{sph})} = \frac{-i\rho cQ}{4\pi^2\sqrt{r_0r_1}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\sqrt{k^2-\xi^2}(r_1+r_0)+i\xi(z_1-z_0)]\times \qquad (8п)$$

$$\times\Phi_s(\sqrt{k^2-\xi^2}a)d\xi.$$

Учитывая, что рассматривается случай $kr_0, kr_1 \gg 1$, интеграл можно вычислить методом стационарной фазы. Для упрощения будем считать, что точки, в которых находятся источник и приемник, расположены в одной плоскости, перпендикулярной оси, т.е. $z_1 = z_0$. В результате получаем

$$p_s^{(\mathrm{sph})} = -\frac{\rho cQ}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{k}{r_0r_1(r_1+r_0)}}\times \qquad (9п)$$

$$\times\Phi_s(ka)\exp(ik(r_1+r_0)).$$

Пронормировав эту величину к значению звукового давления на оси в свободном поле, определяемому выражением (7п) (т.е. при отсутствии цилиндра), находим

$$\frac{p_s^{(\mathrm{sph})}}{p_0^{(\mathrm{sph})}} = \sqrt{\frac{2r_0}{\pi kr_1(r_1+r_0)}}\exp(ikr_0)\Phi_s(ka). \qquad (10п)$$

Сравнивая выражения (5п) и (10п), получаем, что функция $\Phi_s(ka)$, зависящая от радиуса цилиндра, его упругих характеристик и углов рассеяния, для цилиндрического и сферического источников является одинаковой, а зависимости амплитуды рассеяния от расстояния оказываются различными. В частном случае, когда точки излучения–приема совмещены, т.е. $r_1 = r_0$, получаем

$$\frac{p_s^{(\mathrm{sph})}}{p_0^{(\mathrm{sph})}} = \sqrt{\frac{1}{\pi kr_1}}\exp(ikr_1)\Phi_s(ka). \qquad (11п)$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (6п), находим, что амплитуда рассеяния для сферического источника в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем для линейного источника. Как указано в работе [10], это объясняется тем, что при дифракции сферической волны на поверхности цилиндра вдоль его оси образуются зоны Френеля, т.е. – противофазные участки, вклады которых частично компенсируют друг друга. Радиус эквивалентной сферы при дифракции сферической волны на бесконечном цилиндре можно получить, сравнивая выражение (11п) с аналогичным выражением для акустически жесткой или акустически мягкой сферы с радиусом a_{ekv}, гораздо большим длины волны. В этом случае имеет место хорошо известное выражение

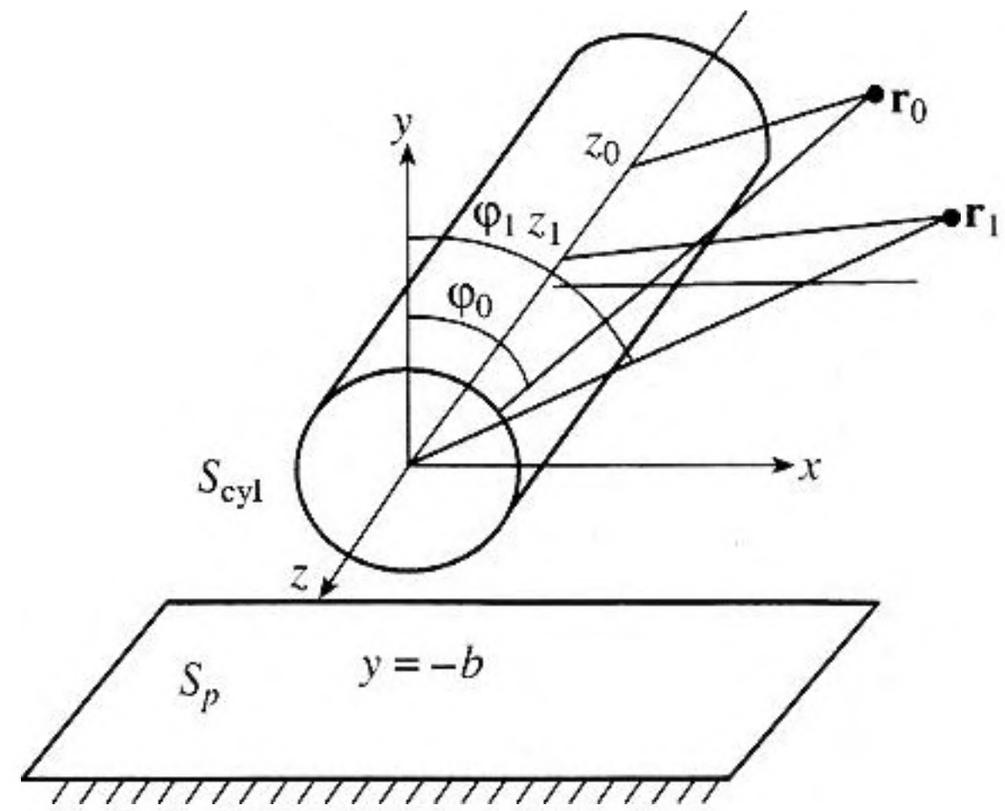

Рис. 1п. Система координат в трехмерном случае.

$$\left|\frac{p_s^{(\mathrm{sph})}}{p_0^{(\mathrm{sph})}}\right| = \frac{a_{\mathrm{ekv}}}{2r_1}. \qquad (12п)$$

Приравнивая выражения (11п) и (12п), находим радиус эквивалентной сферы для падающей на цилиндр сферической волны

$$a_{\mathrm{ekv}} = 2\sqrt{\frac{r_1}{\pi k}}|\Phi_s(ka)|. \qquad (13п)$$

Для определения радиуса эквивалентной сферы для обратного (локационного) рассеяния при расчете функции Φ_s следует считать $\varphi_1 = \varphi_0$. Заметим, что в таблицах, приведенных в приложении к книге [7], в связи с противоположным выбором направлений отсчета углов обратному рассеянию соответствуют функции, обозначенные там, как $\Phi_s(\pi)$.

Радиус эквивалентной сферы при падении на цилиндр цилиндрической или плоской волны можно определить, если приравнять выражения (5п) и (12п). В результате получаем выражение

$$a_{\mathrm{ekv}} = 2\sqrt{\frac{2r_1}{\pi k}}|\Phi_s(ka)|. \qquad (14п)$$

Таким образом, при падении на бесконечный цилиндр плоской или цилиндрической волны радиус эквивалентной сферы оказывается в $\sqrt{2}$ раз больше, чем при падении сферической волны.

Из выражений (13п) и (14п) следует, что для бесконечного цилиндра радиус эквивалентной сферы зависит от расстояния между источником и цилиндром. Это также связано с образованием зон Френеля вдоль оси цилиндра (см., например, [10]). При увеличении расстояния увеличивается и размер первой зоны, наиболее эффективно участвующей в формировании рассеянного поля. В связи с увеличением радиуса эквивалентной сферы по закону $r_1^{1/2}$ при удалении точки приема–излучения от цилиндра амплитуда рассеянного поля уменьшается не по сферическому закону r_1^{-1}, а по цилиндрическому закону $r_1^{-1/2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bishop G.C., Smith J.* Scattering from an elastic shells and a rough fluid-elastic interface. Theory // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 101. № 2. P. 767–788.
2. *Bishop G.C., Smith J.* Scattering from rigid and soft target near a planar boundary: Numerical results // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 105. № 1. P. 130–143.
3. *Bertrand J.C., Young J.W.* Multiple Scattering between a circular and a plane // J. Acoust. Soc. Am. 1976. V. 60. № 6. P. 1265–1269.
4. *Gaunaurd G.C., Huang H.* Sound scattering by a spherical objects near a rigid flat bottom // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1996. V. 43. № 4. P. 690–700.
5. *Gaunaurd G.C., Huang H.* Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 96. № 6. P. 2526–2536.
6. *Tversky V.* Multiple scattering of radiation by an arbitrary planar configuration of parallel cylinders // J. Appl. Phys. 1952. V. 23. № 3. P. 407.
7. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972.
8. *Иванов Е.А.* Дифракция на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968.
9. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1957.
10. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л. Судостроение, 1989.
11. *Шендеров Е.Л.* Дифракция звуковой волны на открытом конце волновода с импедансными стенками и импедансными фланцами // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 6. С. 699–711.
12. *Faran J.J.* Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Am. 1951. V. 23. № 4. P. 405–418.
13. *Л.М. Лямшев.* К теории рассеяния звука тонким стержнем // Акуст. журн. 1956. Т. 2. № 4. С. 382–390.
14. *Lin W.H., Raptis A.C.* Acoustic scattering by elastic cylinders and spheres in viscous fluids // J. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 73. № 3. P. 736–748.
15. *Tao-bao Li, Mitsuhiro Ueda.* Sound scattering of a spherical wave incident on a cylinder // J. Acoust. Soc. Am. 1990. V. 87. № 5. P. 1871–1879.
16. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. В 2 т. М.: Мир, 1978.

Diffraction of Sound by an Elastic Cylinder Near the Surface of an Elastic Halfspace

E. L. Shenderov

Morfizpribor Central Research Institute, Chkalovskii pr. 46, St. Petersburg, 197376 Russia

e-mail: shend@peterlink.ru

Diffraction of an acoustic wave by an elastic cylinder near the surface of an elastic halfspace is considered. The solution relies on a Helmholtz-type integral equation and uses the Green function of an elastic halfspace. The latter function is represented in the form of an integral over the Sommerfeld contour on the plane of a complex variable that has the meaning of the angle of the wave incidence on the halfspace boundary. An integral equation for the sound pressure distribution over the cylinder surface is derived. This equation is reduced to an infinite system of equations for the Fourier-series expansion coefficients of this distribution. The results obtained are valid for the diffraction of a cylindrical wave and a plane wave. They also describe the diffraction of a spherical wave when the transmitter and receiver are far from the cylinder and lie in one plane that is orthogonal to the cylinder axis.