АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 2, с. 277–280

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.26

РЕЗОНАНСНЫЙ ПОГЛОТИТЕЛЬ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ И ПЛАСТИНАХ

© 2002 г. А. Д. Лапин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: bvp@akin.ru

Поступила в редакцию 15.03.2001 г.

На практике для создания виброизоляции изгибных волн в стержнях и пластинах применяют резонаторы [1–7]. Простейшим резонатором является пружина с грузом [8–10]. Такой резонатор, расположенный перпендикулярно пластине и присоединенный к ней пружиной, интенсивно рассеивает изгибные волны, распространяющиеся в этой пластине. Виброизоляция происходит вследствие рассеяния (отражения) изгибных волн от резонаторов [3, 4–6]. Диссипативные потери в резонаторе уменьшают эффективность его работы как рассеивателя изгибных волн. В работе [11] показано, что при определенном значении коэффициента диссипации мощность, поглощаемая резонатором, достигает максимума и становится равной мощности, рассеянной этим резонатором. Это свойство резонатора с диссипацией можно использовать для создания эффективного поглотителя изгибных волн в стержнях и пластинах. Широкополосные поглотители, состоящие из нескольких резонансных элементов, исследованы в работе [12].

Пусть тонкий полубесконечный стержень совпадает с полуосью $x > 0$, его конец $x = 0$ заделанный. По стержню бежит гармоническая изгибная волна со смещением

$$w^{(i)}(x, t) = \exp[-i(kx + \omega t)],$$

где k и ω – соответственно волновое число и круговая частота. При отражении от заделанного конца возникают две волны – однородная и неоднородная, отраженное поле имеет вид

$$w^{(r)}(x, t) = \{ie^{ikx} - (1 + i)e^{-kx}\}e^{-i\omega t}.$$

Полное поле в стержне равно

$$w^{(0)}(x, t) = w^{(i)}(x, t) + w^{(r)}(x, t) = (1 + i)\{\cos(kx) - \sin(kx) - e^{-kx}\}e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

В этом стоячем поле пучности расположены в точках

$$x_n \approx \frac{(4n - 1)\pi}{4k},$$

где n – любое целое положительное число. В какой-либо пучности поля $w^{(0)}$ (например, при $x = x_q \equiv \equiv H$) присоединим к стержню резонатор с массой m и коэффициентом упругости $\kappa(1 - i\varepsilon)$, где ε – коэффициент диссипации. Под действием поля $w^{(0)}(x, t)$ резонатор возбуждается и излучает поле $w^{(1)}(x, t)$. Полное поле w в стержне с резонатором равно $(w^{(0)} + w^{(1)}$. Покажем, что при определенном значении коэффициента диссипации ε в полном поле $w(x, t)$ при $x > H$ на резонансной частоте отсутствует бегущая изгибная волна $\exp[i(kx - \omega t)]$.

Обозначим через $w'(t)$ – смещение груза резонатора. Уравнение движения этого груза имеет вид

$$m\frac{d^2w'}{dt^2} = -F(t), \quad (2)$$

где сила F определяется по формуле

$$F(t) = \kappa(1 - i\varepsilon)[w'(t) - w(H, t)]. \quad (3)$$

Уравнение движения стержня, соединенного с резонатором, можно написать в виде

$$\rho\frac{d^2w}{dt^2} + G\frac{d^4w}{dx^4} = F(t)\delta(x - H), \quad (4)$$

где ρ и G – соответственно линейная плотность и изгибная жесткость стержня, $\delta(x)$ – дельта-функция.

Волновое число изгибной волны равно $\left(\frac{\rho}{G}\omega^2\right)^{\frac{1}{4}}$.

Поскольку волны $w^{(i)}$ и $w^{(r)}$ являются свободными волнами, то в левой части уравнения (4) можно заменить w на $w^{(1)}$. Смещение $w^{(1)}$ удовлетворяет граничному условию

$$w^{(1)} = \frac{dw^{(1)}}{dx} = 0 \text{ при } x = 0. \quad (5)$$

Рассеянное поле в стержне получим следующим способом. Рассчитаем смещение в полубесконечном стержне, создаваемое точечной гармонической силой $F(t) = F_0\exp(-i\omega t)$, где F_0 – ком-

плексная амплитуда. В безграничном стержне эта точечная сила создает смещение

$$w^{(2)}(x,t) = \frac{iF_0}{4Gk^3}\{\exp[ik|x-H|] + i\exp[-k|x-H|]\}\exp(-i\omega t).$$

Учитывая волны, отраженные от заделанного конца $x = 0$, получим следующие выражения для $w^{(1)}$:

$$0 < x < H, \quad w^{(1)}(x,t) = \frac{iF_0}{4Gk^3}\{\exp[ik(H-x)] + i\exp[-k(H-x)] + [ie^{ikH} - (1+i)e^{-kH}]e^{ikx} + [e^{-kH} - (1+i)e^{ikH}]e^{-kx}\}\exp(-i\omega t), \quad (6)$$

$$x > H, \quad w^{(1)}(x,t) = \frac{iF_0}{4Gk^3}\{[e^{-ikH} + ie^{ikH} - (1+i)e^{-kH}]e^{ikx} + [ie^{kH} + e^{-kH} - (1+i)e^{ikH}]e^{-kx}\}\exp(-i\omega t). \quad (7)$$

Амплитуду силы F_0 подберем таким образом, чтобы удовлетворялось соотношение (3). Согласно уравнению (2) смещение груза будет

$$w'(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}\exp(-i\omega t). \quad (8)$$

Подставляя формулы (1), (6) и (8) в соотношение (3), получим искомую амплитуду силы

$$F_0 = i\omega w_0^{(0)}(H)\left\{\left[\mathrm{Re}Y + \frac{\varepsilon\omega}{\kappa(1+\varepsilon^2)}\right] + i\left[\mathrm{Im}Y + \frac{1}{m\omega} - \frac{\omega}{\kappa(1+\varepsilon^2)}\right]\right\}^{-1}, \quad (9)$$

где

$$w_0^{(0)}(H) = w^{(0)}(H,t)\exp(i\omega t),$$

$$Y = \frac{-i\omega w^{(1)}(H,t)}{F(t)}$$

– податливость полубесконечного стержня по отношению к точечной силе. Пренебрегая малыми величинами порядка $\exp(-kH) \equiv \exp\left[-(4q-1)\frac{\pi}{4}\right]$, имеем приближенно

$$w_0^{(0)}(H) = 2\exp(-ikH), \quad Y = \frac{\omega}{4Gk^3}(2+i).$$

Рассеянное поле $w^{(1)}$ получим по формулам (6) и (7) при подстановке F_0 в них. Резонансное рассеяние происходит при частоте ω_0, определяемой из уравнения

$$\mathrm{Im}Y + \frac{1}{m\omega} - \frac{\omega}{\kappa(1+\varepsilon^2)} = 0. \quad (10)$$

На резонансной частоте амплитуда силы равна

$$F_0 = i\omega w_0^{(0)}(H)\left[\mathrm{Re}Y + \frac{\varepsilon\omega}{\kappa(1+\varepsilon^2)}\right]^{-1} \approx \approx i4Gk^3e^{-ikH}\left[1 + \frac{2\varepsilon Gk^3}{\kappa(1+\varepsilon^2)}\right]^{-1}.$$

Выделим в полном поле $w = w^{(0)} + w^{(1)}$ волну, бегущую вдоль оси x. Согласно формулам (1) и (7) амплитуда этой волны равна

$$A = i + \frac{iF_0}{4Gk^3}[e^{-ikH} + ie^{ikH} - (1+i)e^{-ikH}].$$

При частоте $\omega = \omega_0$ имеем приближенно

$$A = i\left\{1 - 2\left[1 + \frac{2\varepsilon Gk^3}{\kappa(1+\varepsilon^2)}\right]^{-1}\right\}.$$

При коэффициенте диссипации ε, равном приближенно $\kappa/(2Gk^3)$, амплитуда A обращается в нуль. Это означает, что резонатор полностью поглощает падающую волну.

Выполним аналогичное исследование для пластины. Пусть полубезграничная пластина лежит в верхней полуплоскости xy и заделана на границе $y = 0$. На эту границу падает гармоническая изгибная волна со смещением

$$w^{(i)}(x,y,t) = \exp[i(k_x^0x - k_y^0y - \omega t)],$$

где k_x^0 и $(-k_y^0)$ – проекции волнового вектора падающей волны соответственно на оси x и y. Полное поле $w^{(0)}$ в пластине, равное сумме падающей и отраженных волн, имеет вид

$$w^{(0)}(x,y,t) = -i2\{\sin(k_y^0y - \varphi^0) + \sin\varphi^0\exp(-\alpha^0y)\}\exp[i(k_x^0x - \varphi^0 - \omega t)], \quad (11)$$

где

$$\alpha^0 = \sqrt{k^2 - (k_x^0)^2}, \quad \sin\varphi^0 = \frac{k_y^0}{\sqrt{2}k}.$$

В этом поле пучности расположены на линиях $y_n \approx \approx \frac{\pi(2n-1) + 2\varphi^0}{2k_y^0}$, где n – любое целое число. Вдоль какой-либо из этих линий (например, при $y = y_q \equiv H$) в точках $x = x_s \equiv sL$, где $s = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, присоединим одинаковые резонаторы с массами m и коэффициентами упругости $\kappa(1 - i\varepsilon)$. Под дей-

ствием поля $w^{(0)}$ резонаторы возбуждаются и излучают поле $w^{(1)}$. Полное поле в пластине с резонаторами равно $w = w^{(0)} + w^{(1)}$.

Обозначим через $w'_s(t)$ – смещение груза s-го резонатора (присоединенного к пластине в точке (x_s, H)). Уравнение движения этого груза имеет вид

$$m\frac{d^2w'_s}{dt^2} = -F_s(t), \qquad (12)$$

где сила F_s определяется по формуле

$$F_s(t) = \kappa(1 - i\varepsilon)[w'_s(t) - w(x_s, H, t)]. \qquad (13)$$

Уравнение пластины, соединенной с резонаторами, запишем в виде

$$\rho\frac{dw^2}{dt^2} + G\Delta^2 w = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} F_s(t)\delta(x - x_s)\delta(y - H),$$

где ρ и G – соответственно поверхностная плотность и изгибная жесткость пластины, Δ – оператор Лапласа. В левой части этого уравнения можно заменить w на $w^{(1)}$.

Структура рассеянного поля определяется периодом рассеивающей решетки (цепочки резонаторов), величина $w^{(1)}(x, y, t)\exp(-ik_x^0 x)$ является периодической функцией x с периодом L. На этом основании при возбуждающем поле (11) силу $F_s(t)$ можно представить в виде

$$F_s(t) = F\exp[(k_x^0 x_s - \omega t)],$$

где F – амплитуда силы при $s = 0$. Рассеянное поле в пластине получим тем же методом, что и рассеянное поле в стержне. В безграничной пластине цепочка точечных сил $F_s(t)$ создает поле

$$w^{(2)}(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{iF}{4LGk^2}\left\{\frac{1}{k_y^n}\exp(ik_y^n|H - y|) + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{\alpha^n}\exp(-\alpha^n|H - y|)\right\}\exp[i(k_x^n x - \omega t)],$$

где

$$k_x^n = k_x^0 + \frac{2\pi}{L}n,$$

$$k_y^n = \sqrt{k^2 - (k_x^n)^2}, \quad \alpha^n = \sqrt{k^2 + (k_x^n)^2}.$$

Учитывая волны, отраженные от заделанной границы $y = 0$, получим следующее выражение для $w^{(1)}$ при $y \geq H$:

$$w^{(1)}(x, y, t) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{iF}{4LGk^2}\left\{\frac{1}{k_y^n}[1 - \exp(i2k_y^n H - i2\varphi^n)]\times\right.$$

$$\times\exp[i(k_x^n x - \omega t) + ik_y^n(y - H)] + \qquad (14)$$

$$+ i\left[\frac{1}{\alpha^n} - \frac{2}{k_y^n}\sin\varphi^n\exp(ik_y^n H - i\varphi - \alpha^n H)\right]\times$$

$$\left.\times\exp[i(k_x^n x - \omega t) - \alpha^n(y - H)]\right\},$$

где $\sin\varphi^n = \frac{k_y^n}{\sqrt{2}k}$. В фигурной скобке первое слагаемое есть однородная плоская волна при $|k_x^n| < k$ и неоднородная плоская волна при $|k_x^n| > k$, второе слагаемое всегда является неоднородной волной.

Амплитуду силы F подберем таким образом, чтобы удовлетворялось соотношение (13). Под смещением пластины в точке присоединения резонатора следует понимать усредненное смещение по площади контакта пластины и резонатора. Согласно уравнению (12) смещение $w'_s(t)$ равно $\frac{F_s(t)}{m\omega^2}$. Подставляя $w^{(0)}$, $w^{(1)}$ и w'_s в соотношение (13), получим искомую амплитуду силы

$$F = i\omega w_0^{(0)}(0, H)\left\{Y + i\left[\frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{\kappa(1 - i\varepsilon)}\right]\right\}^{-1},$$

где

$$w_0^{(0)}(0, H) = w^0(0, H, t)\exp(i\omega t) \approx 2\exp(-ik_y^0 H),$$

$$Y = \frac{-i\omega w^{(1)}(x_s, H, t)}{F_s(t)} \approx$$

$$\approx \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\omega\varepsilon_n}{4LGk^2k_y^n}\left\{1 - \exp[i2(k_y^n H - \varphi^n)] + i\frac{k_y^n}{\alpha^n}\right\},$$

$$\varepsilon_n = \frac{\sin(k_x^n a)}{(k_x^n a)}\frac{\exp(ik_y^n a) - 1}{(ik_y^n a)}.$$

Усреднение выполнено по квадратной площадке со сторонами $2a$, малыми по сравнению с длиной изгибной волны, $\varepsilon_n \approx 1$ при $k_x^n a \ll 1$. Рассеянное поле получим по формуле (14) при подстановке F в нее. Резонансное рассеяние происходит при частотах, определяемых из уравнения

$$\mathrm{Im}\,Y + \frac{1}{m\omega} - \frac{\omega}{\kappa(1 + \varepsilon^2)} = 0.$$

По форме это дисперсионное уравнение совпадает с уравнением (10), но здесь из-за сложной зависимости Y от частоты оно может иметь несколько

решений. На резонансной частоте амплитуда n-го рассеянного однородного спектра (рассеянной однородной плоской волны) равна

$$A_n = -\frac{\omega}{2LGk^2k_y^n}\left\{Y_1 + \frac{\varepsilon\omega}{\kappa(1+\varepsilon^2)}\right\}^{-1} \times \quad (15)$$

$$\times \exp[-i(k_y^0 + k_y^n)H]\{1 - \exp[i2(k_y^n H - \varphi^n)]\},$$

где

$$Y_1 = \mathrm{Re}\,Y = \sum_s{}' \frac{\omega}{4LGk^2k_y^s}\{1 - \cos[2(k_y^s H - \varphi^s)]\}, \quad (16)$$

штрих означает, что суммирование производится по всем s, при которых k_y^s вещественное.

При периоде цепочки, меньшем $\lambda(1 + \sin\theta)^{-1}$, где $\theta = \arcsin\dfrac{k_x^0}{k}$ – угол падения волны, $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$, в рассеянном поле (14) только "нулевой" спектр однородный. Тогда из формул (15) и (16) получим соотношения

$$Y_1 = \frac{\omega}{2LGk^2k_y^0},$$

$$A_0 = 2\exp(-i2\varphi^0)\left[1 + \frac{2\varepsilon LGk^2k_y^0}{\kappa(1+\varepsilon^2)}\right]^{-1}.$$

Складывая отраженную однородную волну с "нулевым" рассеянным спектром, получим убегающую однородную волну с амплитудой A, равной

$$[-\exp(-i2\varphi^0) + A_0] =$$

$$= -\exp(-i2\varphi^0)\left\{1 - 2\left[1 + \frac{2\varepsilon LGk^2k_y^0}{\kappa(1+\varepsilon^2)}\right]^{-1}\right\}.$$

При коэффициенте диссипации ε, равном приближенно $\dfrac{\kappa}{2LGk^2k_y^0}$, амплитуда A обращается в нуль. Это означает, что цепочка резонаторов полностью поглощает падающую волну.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клюкин И.И.* Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 6. С. 213–219.
2. *Клюкин И.И., Сергеев Ю.Д.* О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 60–65.
3. *Исакович М.А., Кашина В.И., Тютекин В.В.* Применение систем резонаторов для звукоизоляции нормальной волны нулевого порядка в трубах и других длинных линиях. Научн.-техн. сб. Морское приборостроение. Сер. Акустика. 1972. Вып. 1. С. 117–125.
4. *Исакович М.А., Кашина В.И., Тютекин В.В.* Способ виброизоляции продольных и изгибных волн в стержнях и пластинах. Авт. свид. № 440509. Б.И. № 31. 1974.
5. *Исакович М.А., Кашина В.И., Тютекин В.В.* Экспериментальное исследование виброизоляции изгибных волн, создаваемой импедансными системами // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 384–389.
6. *Цилькер Л.С.* Применение волноводных изоляторов для изоляции изгибных волн на пластине, возбуждаемой точечной силой // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 4. С. 606–608.
7. *Nagem R.J., Velikovik I., Sandri G.* Vibration Damping by a Continuous Distribution of Undamped Oscillators. J. Sound Vib. V. 207. № 3. P. 429–434.
8. *Malcolm J. Crocker.* Editor-in-Chief. Acoustics Handbook. John Wiley & Sons, Inc., New Yorc, 1997.
9. *Gurgoze M., Batan H.* On the Effect of an Attached Spring-Mass System an the Frequency Spectrum of a Cantilevered Beam. J. Sound Vib. 1996. V. 195. № 1. P. 163–168.
10. *Gurgoze M.* Alternative Formulations of the Characteristic Equation of a Bernoulli-Euler Beam to Wich Saveral Viscously Damped Spring-Mass System Are Attached In-Span. J. Sound Vib. 1999. V. 223. № 4. P. 667–677.
11. *Лапин А.Д.* Влияние диссипативных потерь на эффективность работы резонатора для изгибных волн // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 2. С. 278–280.
12. *Тютекин В.В., Шкварников А.П.* Синтез и исследование поглотителей изгибных волн в стержнях и пластинах. Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 441–447.

Resonance Absorber for Flexural Waves in Beams and Plates

A. D. Lapin

Andreev Acoustics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia
e-mail: bvp@akin.ru

In practice, a vibration insulation for flexural waves in beams and plates is obtained with the use of resonators [1–7]. The simplest resonator is a spring–mass system [8–10]. When such a resonator is positioned normally to a plate and attached to it by a spring, it provides effective scattering of flexural waves propagating in the plate. The vibration insulation occurs because of the scattering (reflection) of flexural waves from the resonators [3, 4, 6]. A dissipative loss in a resonator reduces the efficiency of its operation as a scatterer for flexural waves. Earlier [11], it was shown that, at a certain value of the dissipation factor, the power absorbed by a resonator reaches its maximum and becomes equal to the power scattered by this resonator. The latter property of resonators with dissipation can be used for designing efficient absorbers of flexural waves propagating in beams and plates. Wide-band absorbers consisting of several resonant elements were studied in [12].