

УДК 534.23

ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СТРУКТУРАХ СО СКОРОСТЬЮ РАСПРОСТРАНЕНИЯ, СТРЕМЯЩЕЙСЯ К НУЛЮ

© 2002 г. М. А. Миронов, В. В. Писляков*

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: mironov@akin.ru

* Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию 17.07.01 г.

Рассмотрена замедляющая структура, позволяющая создать эффективную проводимость стенки плавно увеличивающейся вдоль оси трубы. На конечном отрезке трубы скорость распространения звука постепенно уменьшается и в некотором сечении обращается в нуль. При этом время распространения волны по этому отрезку равно бесконечности. Приходящая к входному сечению волна не доходит до конечного сечения трубы за конечное время и поэтому не отражается от него. Происходит полное поглощение волны, причем оно вызвано не переходом ее энергии в тепло, как в обычных поглотителях звука, а накоплением энергии в сечении трубы, где скорость волны обращается в нуль. В работе получено дифференциальное уравнение распространения звука в одномерном волноводе переменного сечения с переменной акустической проводимостью стенки, проведен анализ его решений в ВКБ-приближении, дано точное решение для специальной зависимости сечения и проводимости, приведены результаты вычисления входной проводимости волновода. В последней части работы отмечена возможная аналогия в задаче о сдвиговых волнах в морских осадках.

1. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ВЕБСТЕРА

Скорость распространения звука в узкой по сравнению с длиной волны трубе зависит от акустической проводимости стенки трубы [1]. Проводимость стенки упругого типа уменьшает скорость распространения. Ниже проводится исследование продольных звуковых волн в узком волноводе переменного сечения с переменной проводимостью стенок. Волновод обеспечивает плавное, но достаточно быстрое замедление скорости распространения волны, так что на конечном расстоянии она обращается в нуль. В работах [2, 3] рассмотрена возможность создания не отражающих изгибные волны окончаний пластин и стержней, заостренных специальным образом. Скорость заострения выбирается, исходя из двух условий. Во-первых, изменение сечения должно быть достаточно плавным, чтобы не вызывать отражения. Во-вторых, изменение сечения должно быть достаточно быстрым, чтобы скорость изгибной волны на конечном протяжении заостренного участка обратилась в нуль.

Волновое уравнение для узкого осесимметричного волновода переменного сечения во стенками переменной проводимости получается следующим образом. Направим ось x вдоль оси симметрии, $S = S(x)$ – площадь сечения волновода, $r = r(x)$ – его радиус, $Y = Y(x)$ – проводимость сте-

нок (рис. 1). Уравнение Эйлера остается без изменений:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (1)$$

v – проекция скорости на ось x , p – давление, ρ_0 – плотность среды. Уравнение непрерывности можно получить, записав закон сохранения вещества в тонком слое толщиной dx (рис. 1):

$$d(\rho_0 S v) + (2\pi r v_{\perp} \rho_0) dx + \frac{\partial \rho}{\partial t} S dx = 0,$$

v_{\perp} – проекция скорости жидкости у стенок на перпендикуляр к оси симметрии, ρ – акустичес-

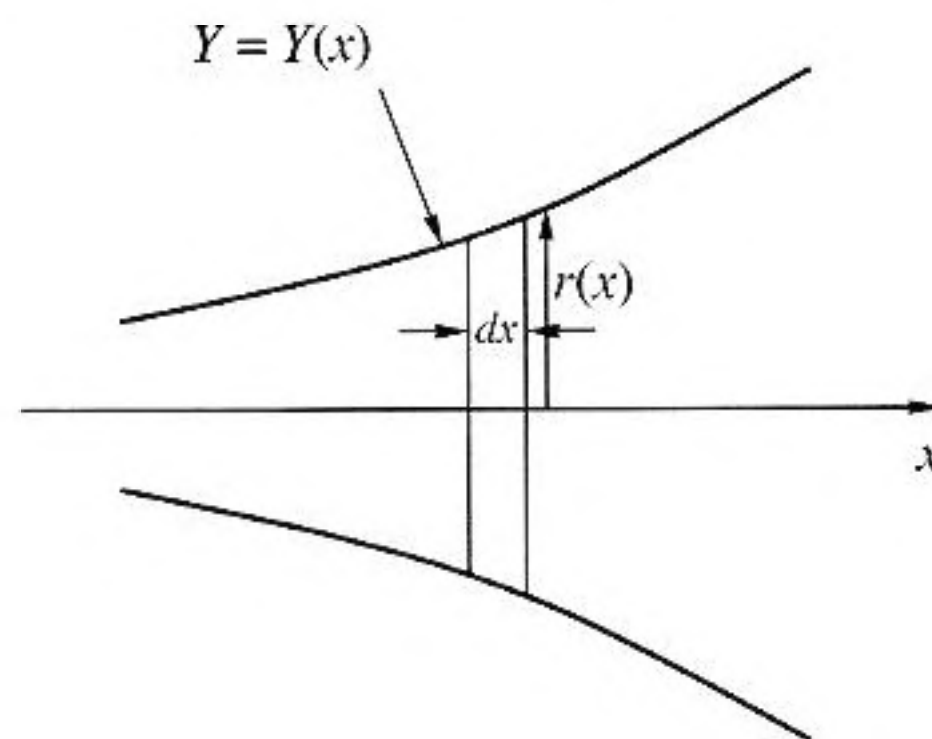


Рис. 1. Вывод обобщенного уравнения Вебстера. Волновод с переменным сечением и переменной проводимостью стенок.

кая компонента плотности. Подставив $v_{\perp} = Yp$, получим:

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = v(\ln S)'_x + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2Yp}{r}. \quad (2)$$

Учитывая равенство $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$ и исключая скорость v из (1) и (2), получаем волновое уравнение для давления

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2Y\rho_0}{r} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} (\ln S)'_x. \quad (3)$$

Для гармонической по времени зависимости $p(x, t) = p(x)e^{-i\omega t}$ (3) переходит в обобщенное уравнение Вебстера:

$$p'' + p'(\ln S)' + p\left(k_0^2 + \frac{2Y\rho}{r}(i\omega)\right) = 0. \quad (4)$$

$k_0 \equiv \omega/c$, штрихом обозначена производная по x . При проводимости Y , равной нулю, (4) переходит в обычное уравнение Вебстера.

II. АКУСТИЧЕСКАЯ “ЧЕРНАЯ ДЫРА”. ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для определенности рассмотрим далее конкретную конструкцию волновода с переменным сечением и переменной проводимостью стенки, изображенную на рис. 2. Это отрезок абсолютно жесткой цилиндрической трубы радиуса R , внутри которой достаточно часто расставлены абсолютно жесткие кольцевые перегородки с внутренним радиусом $r = r(x)$, убывающим по некоторому закону, причем $\lim_{x \rightarrow -0} r(x) = 0$. Вся конструкция рас-

положена в полупространстве $x < 0$, а правая стенка – в плоскости $x = 0$. В этой структуре волноводом является область АОС, а остальная, “межперегородочная”, часть трубы создает переменную проводимость “стенок” этого волновода. Проводимость обеспечивается сжимаемостью среды, заключенной между соседними перегородками. Элементарные вычисления дают:

$$Y = (-i\omega) \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{R^2 - r^2}{2r}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4) и учитывая, что $S = \pi r^2$, получим

$$p'' + 2p'(\ln r)' + k_0^2 \frac{R^2}{r^2} p = 0. \quad (6)$$

Отметим, что это уравнение годится также и для переменного радиуса трубы R .

Следуя [2, 3], рассмотрим ВКБ-приближение решений (4) и определим, какая зависимость $r(x)$

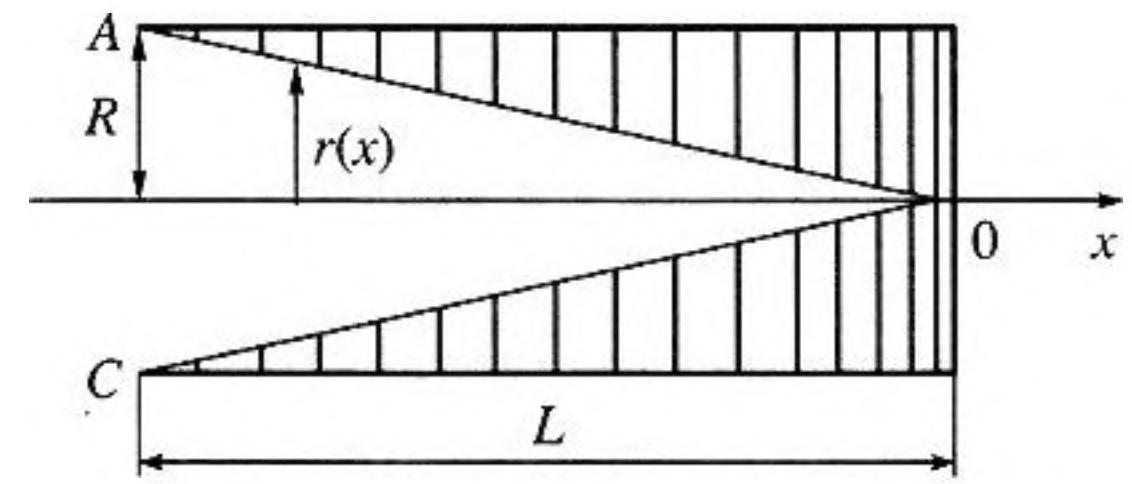


Рис. 2. Модель акустической “черной дыры”. Труба с расположенными внутри кольцевыми перегородками, радиус которых $r(x)$ убывает до нуля.

могла бы обеспечить бесконечное время распространения на конечной длине волновода. Отметим, что применимость ВКБ-приближения означает одновременно, что распространяющиеся в разных направлениях волны не трансформируются друг в друга. Подставляя в (6) $p(x) \sim \exp(ikx)$, получим следующее выражение для локального волнового числа $k = k(x)$:

$$k(x) = \sqrt{k_0^2 \frac{R^2}{r^2} - ((\ln r)')^2} = \frac{1}{r} \sqrt{k_0^2 R^2 - (r')^2}. \quad (7)$$

ВКБ-приближение применимо, если коэффициенты уравнения (6) мало меняются на длине порядка $k(x)^{-1}$:

$$\left| \frac{d(\ln r)' \frac{1}{k}}{dx} \right| \ll |(\ln r)'| \quad \text{и} \quad \left| \frac{d(\ln r)' \frac{1}{k}}{dx} \right| \ll \frac{1}{r^2}.$$

Эти неравенства переписываются в виде

$$|k| \gg \left| \frac{r''}{r'} \right|, \quad |k| \gg \left| \frac{r'}{r} \right|. \quad (8)$$

Рассмотрим далее степенную зависимость радиуса волновода от x :

$$r(x) = \varepsilon x^n. \quad (9)$$

В этом случае оба условия (8) идентичны:

$$|k| \gg 1/x, \quad (10)$$

при этом формула для текущего волнового числа (7) приобретает вид:

$$k(x) = \frac{1}{\varepsilon x^n} \sqrt{k_0^2 R^2 - \varepsilon^2 n^2 x^{2(n-1)}}. \quad (11)$$

Из (10, 11) получаем условие применимости метода ВКБ:

$$\left| \frac{1}{\varepsilon x^{n-1} \sqrt{k_0^2 R^2 - \varepsilon^2 n^2 x^{2(n-1)}}} \right| \gg 1.$$

При $n > 1$ это условие выполняется для достаточно малых $|x|$ $\left(|x| \ll \left[\frac{k_0 R}{\varepsilon \sqrt{n^2 + 1}} \right]^{1/(n-1)} \right)$, а при $n = 1$ и $\varepsilon \ll k_0 R$ – для всех x . Далее рассмотрим случай $n = 1$, в котором радиус волновода уменьшается медленнее всего, а условие применимости ВКБ выполняется равномерно по x . В качестве параметра ε возьмем отношение радиуса трубы к длине отрезка L , на котором радиус волновода уменьшается от R до нуля (рис. 2): $\varepsilon = R/L$. Из (11) получаем:

$$k(x) = -\frac{1}{x} \sqrt{k_0^2 L^2 - 1}. \quad (12)$$

Знак “–” соответствует волне, бегущей в сторону возрастающих x , слева направо. При $x \rightarrow -0$ волновое число стремится к бесконечности. Как фазовая c_ϕ , так и групповая $c_{гр}$ скорости при этом стремятся к нулю:

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} = -\frac{\omega}{\sqrt{k_0^2 L^2 - 1}} x, \quad c_{гр} = -\frac{c^2 \sqrt{k_0^2 L^2 - 1}}{L^2 \omega} x. \quad (13)$$

Время распространения волнового пакета T от начального сечения $x = -L$ до некоторого сечения $x_1 = -l$ равно:

$$T = \int_{-L}^{x_1} \frac{dx}{c_{гр}} = \frac{L^2 \omega}{c^2 \sqrt{k_0^2 L^2 - 1}} \ln \left(\frac{L}{l} \right). \quad (14)$$

При $x_1 \rightarrow -0$ $T \rightarrow -\infty$. Волна, упавшая на левое сечение волновода, никогда не достигнет его правого сечения и, следовательно, не отразится от него. Таким образом, рассматриваемая конструкция является “акустической черной дырой”, аналогичной “вибрационной черной дыре”, рассмотренной в [2, 3] применительно к изгибным волнам в стержне переменного сечения.

III. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Оказывается, что уравнение (6) с зависимостью $r(x) = -\frac{L}{R}x$ имеет набор точных частных решений в виде степенных функций:

$$p(x) = A_\alpha \left(\frac{x}{L} \right)^\alpha. \quad (15)$$

Действительно, при подстановке (15) в (6), степенные зависимости от x сокращаются, а для α получается квадратное уравнение, имеющее два решения:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (k_0 L)^2}. \quad (16)$$

При $k_0 L < \frac{1}{2}$ эти показатели степени вещественны, соответственно поле давления имеет неволновой характер (отсутствует сдвиг по фазе между давлением в разных точках). При $k_0 L > \frac{1}{2}$ показатели имеют мнимую компоненту, соответственно поле давления имеет вид бегущей волны (имеется сдвиг по фазе). Соответствие точных решений (15) и (16) с ВКБ-приближением очевидно. Степенная функция в правой части (15) переписывается в виде:

$$x^\alpha \equiv x^{-1/2} \exp \left(\pm i \int_L^x \sqrt{k_0^2 L^2 - (1/4)} \frac{dx}{x} \right). \quad (17)$$

Сопоставляя эту формулу с выражением для локального волнового числа ВКБ-приближения (12), видим, что (12) правильно передает зависимость от параметра $k_0 L$, хотя в точном решении (17) под знаком корня стоит не -1 , как в (12), а $-1/4$. Таким образом, пороговая частота, начиная с которой и выше поле давления имеет волновой характер, ниже в два раза, чем это предсказывает ВКБ-приближение. Предэкспоненциальный множитель в (17) описывает закон сохранения потока энергии.

IV. ОТРАЖЕНИЕ ЗВУКА ОТ “ЧЕРНОЙ ДЫРЫ”

Рассмотрим отражение звука от “черной дыры”, а также вычислим ее акустическую проводимость. Учтем возможную неидеальность конструкции: внутренний радиус кольцевых перегородок не убывает до нуля, но обрывается при некотором конечном своем значении. Таким образом, замедляющая конструкция занимает область $-L < x < -l$, причем $l > 0$. Из полубесконечной однородной трубы $x < -L$, расположенной слева, на нее падает акустическая волна единичной амплитуды, отражаясь с некоторым коэффициентом V (рис. 3). Внутри “черной дыры” возбуждаются две волны, описываемые соотношением (15) с амплитудами A_1 и A_2 . Зададим проводимость Y в сечении $x = -l$ – на выходе из “черной дыры” – и вычислим коэффициент отражения V . Граничные условия на входе “черной дыры” ($x = -L$) имеют вид:

$$e^{-ikL} + V e^{ikL} = A_1 + A_2, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\rho_0 c} (e^{-ikL} - V e^{ikL}) = -\frac{1}{i \rho_0 \omega L} (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2), \quad (19)$$

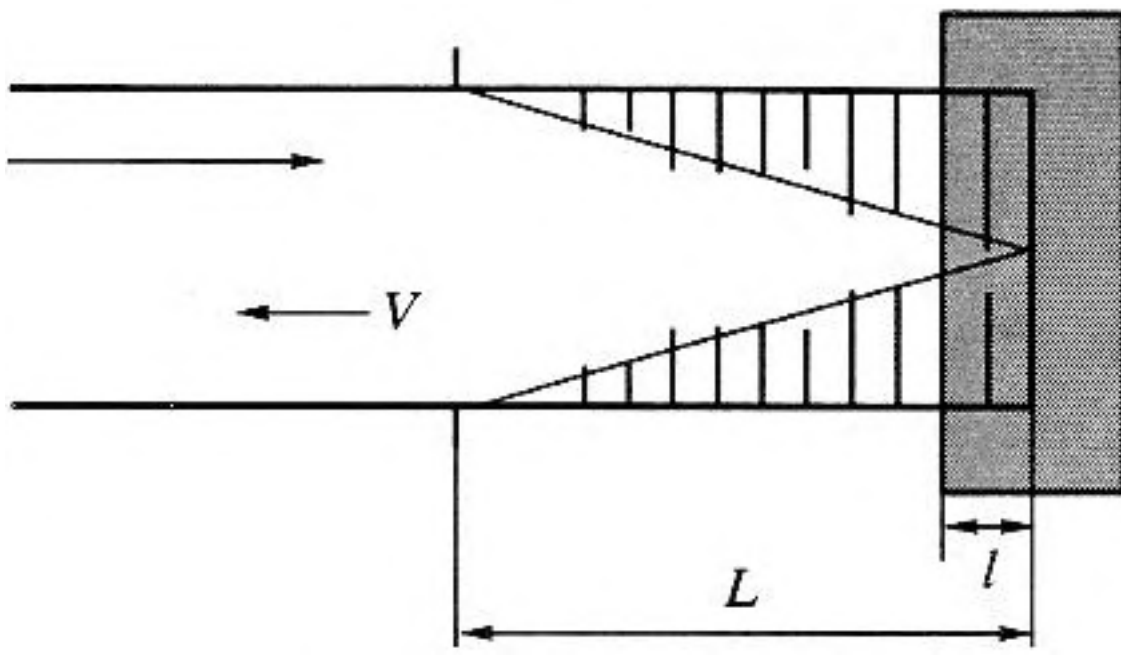


Рис. 3. Отражение звука от реальной акустической "черной дыры". Расстояние l характеризует "несовершенство" черной дыры.

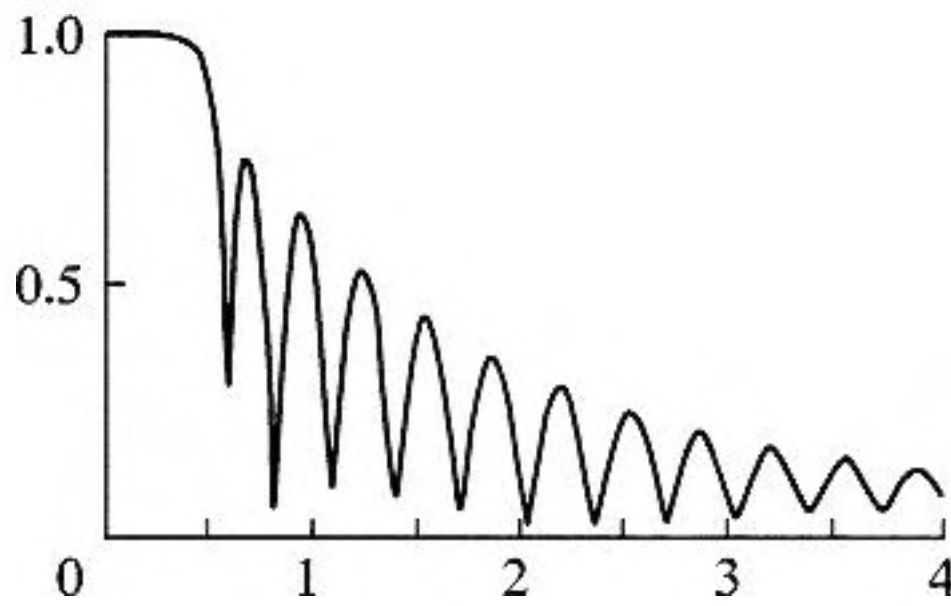


Рис. 5. Частотная зависимость коэффициента отражения звука от акустической "черной дыры" при отражении от абсолютно жесткого сечения $x = -l$ и наличии потерь звуковой энергии при распространении в жидкости.

А на границе $x = -l$:

$$A_1 \left(\frac{l}{L}\right)^{\alpha_1} + A_2 \left(\frac{l}{L}\right)^{\alpha_2} = \frac{V}{Y} = -\frac{1}{i\omega\rho_0 l Y} \left(\alpha_1 \left(\frac{l}{L}\right)^{\alpha_1} A_1 + \alpha_2 \left(\frac{l}{L}\right)^{\alpha_2} A_2 \right). \quad (20)$$

Решая совместно (18)–(20), найдем V :

$$V = \frac{1 + W + \frac{c}{i\omega L} (\alpha_1 + W\alpha_2)}{1 + W - \frac{c}{i\omega L} (\alpha_1 + W\alpha_2)} e^{-2ikL}. \quad (21)$$

Здесь

$$W \equiv \frac{A_2}{A_1} = -\left(\frac{l}{L}\right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{1 + \frac{\alpha_1}{i\omega\rho_0 l Y}}{1 + \frac{\alpha_2}{i\omega\rho_0 l Y}} \quad (22)$$

– коэффициент отражения от выходного сечения $x = -l$.

Выражение для акустической проводимости конструкции рисунка 3 имеет вид:

$$Y_{Bh} = \frac{1}{\rho_0 c} \frac{e^{-ikL} - V e^{ikL}}{e^{-ikL} + V e^{ikL}} = \frac{1}{i\rho_0 \omega L} \frac{\alpha_1 + W\alpha_2}{1 + W}. \quad (23)$$

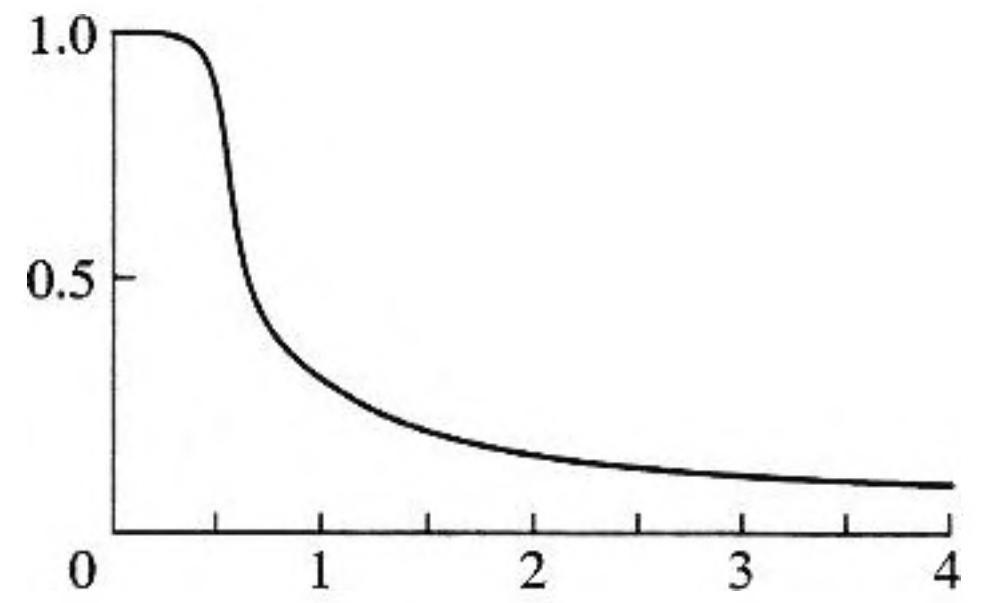


Рис. 4. Частотная зависимость коэффициента отражения звука от акустической "черной дыры" при отсутствии отражения от сечения $x = -l$ (частота дана в единицах k_0L).

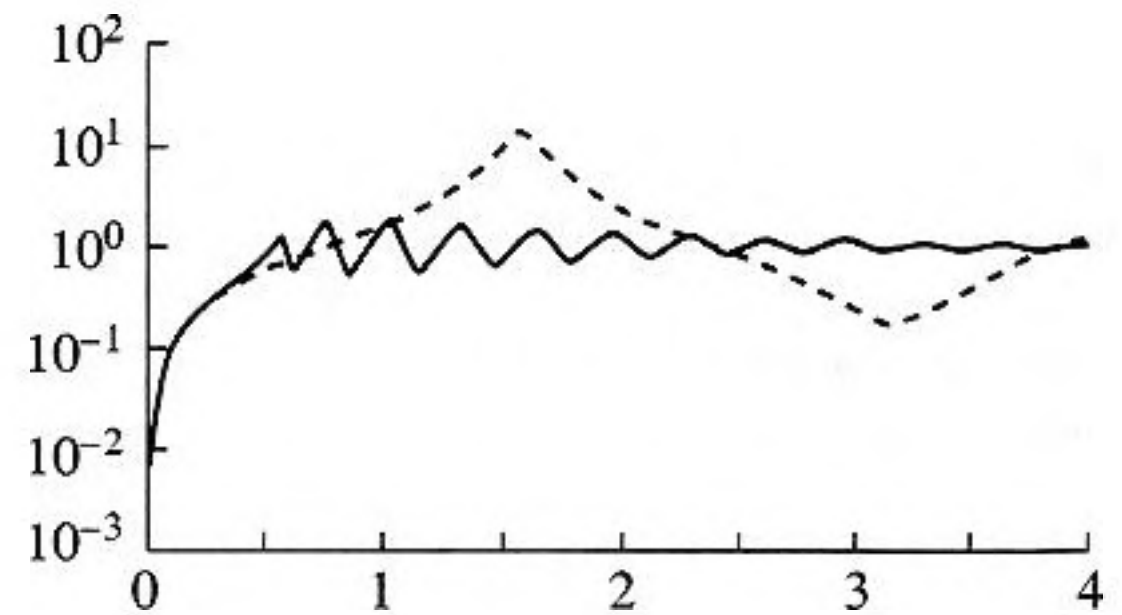


Рис. 6. Акустическая проводимость "черной дыры" (сплошная линия) в сравнении с четвертьволновым отрезком трубы (пунктир). По оси ординат логарифмический масштаб.

Если сделать так, чтобы отражения от сечения $x = -l$ не было, то есть чтобы W обратилось в нуль, тогда

$$V = \frac{1 + \frac{\alpha_1 c}{i\omega L}}{1 - \frac{\alpha_1 c}{i\omega L}} e^{-2ikL}. \quad (24)$$

График зависимости $|V|$ от ω показан на рис. 4. Как и следовало ожидать, наблюдается резкий спад коэффициента отражения при $k_0L = 0.5$ (ср. (16)). То, что график сглажен и не имеет ступенчатого вида (как, казалось бы, должно быть согласно (16)) обусловлено отражением от входного сечения ($x = -L$).

Пусть теперь $W \neq 0$ и $l = 5 \times 10^{-5}$, $L = 0.5$, граница $x = -l$ жесткая. Введем небольшие потери энергии, добавляя к скорости звука мнимую часть: $c = 340(1 - 0.05i)$. Зависимость $|V|$ от ω изображена на рис. 5. Осцилляции коэффициента отражения связаны с резонансами "черной дыры". На рис. 6 приведена проводимость "черной дыры" с теми же параметрами, что и для рис. 5 (сплошная линия), а также проводимость обычного четвертьволнового отрезка трубы (пунктир). Обе проводимости нормированы на $(\rho c)^{-1}$.

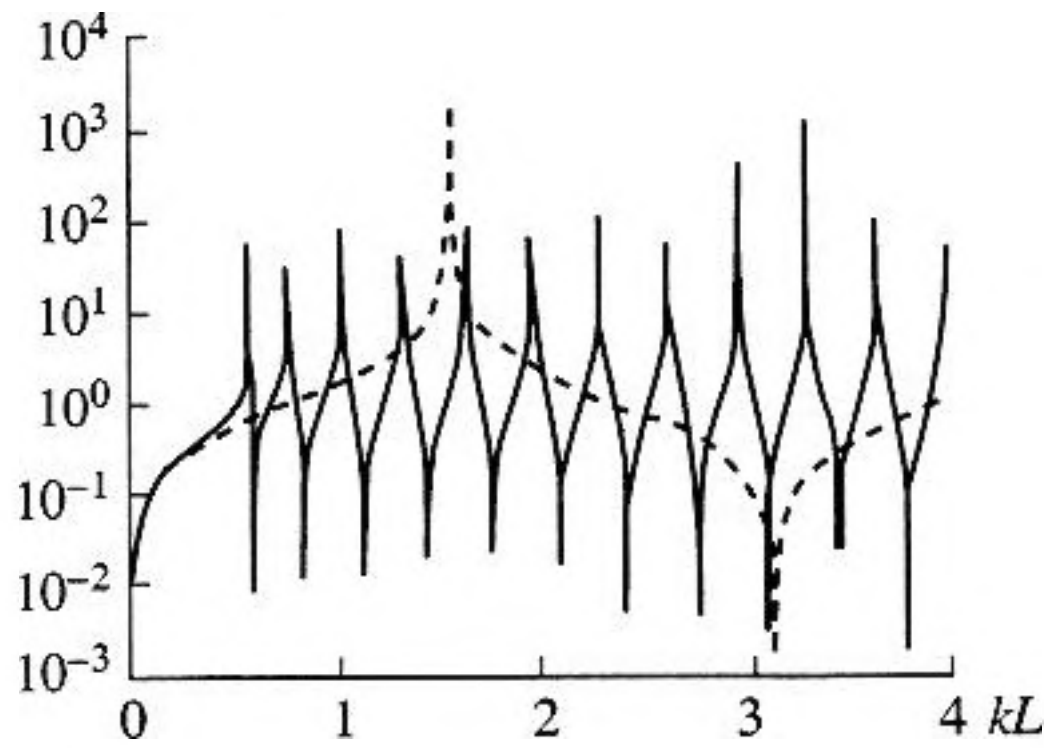


Рис. 7. То же сопоставление, что и на рис. 6, при уменьшении потерь звуковой энергии в жидкости на четыре порядка.

Прежде всего, из графика видно, что замедляющая конструкция имеет много резонансов, причем первый резонанс имеет резонансную частоту примерно в три раза ниже, чем резонансная частота четвертьволновой трубы. Таким образом, использование замедляющей структуры увеличивает “эффективную длину” трубы.

При уменьшении потерь амплитуда осцилляций $|Y_{Bh}|$ резко возрастает. На рис. 7 изображены те же зависимости $|Y_{Bh}|$, $|Y_0|$ после уменьшения потерь (мнимой части c) на четыре порядка.

V. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН

Отметим, что аналогичный эффект может возникнуть и в случае распространения сдвиговых волн в среде с изменяющимся модулем сдвига.

При объяснении экспериментов, связанных с распространением акустических волн в мелком море, в [4] была предложена модель дна, состоящего из слоя осадков, модуль сдвига в котором уменьшается при приближении к границе раздела с водой. Измерение модуля сдвига μ выражается степенной функцией с некоторым показателем степени 2ν :

$$\mu = \rho c_0^2 \left(\frac{z}{H}\right)^{2\nu}. \quad (25)$$

Здесь c_0 – скорость сдвиговой волны при $z = H$, ρ – плотность осадков (которая считается постоянной). При этом исследуется распространение сдвиговых волн в слое с такой зависимостью модуля сдвига и с краевыми условиями, соответствующими контактам с невязкой жидкостью при $z = 0$ и с жесткой границей при $z = H$.

Волновое уравнение для сдвиговых волн имеет вид:

$$u'' + \frac{1}{\mu} \mu' u' + \frac{\rho \omega^2}{\mu} u = 0 \quad (26)$$

(здесь штрихом обозначена производная по z). Выписанное в [4] точное решение для произвольного значения ν выражается через функции Бесселя:

$$u = z^{1/2-\nu} \left[B_1 J_m \left(\frac{\omega}{c_0(1-\nu)} \left(\frac{z}{H}\right)^{1-\nu} \right) + B_2 Y_m \left(\frac{\omega}{c_0(1-\nu)} \left(\frac{z}{H}\right)^{1-\nu} \right) \right],$$

$$m = 2\nu - 1/[2(1-\nu)].$$

При $\nu = 1$ индекс m функций Бесселя обращается в бесконечность, поэтому данный случай в [4] не рассматривается. Рассмотрим этот частный, но интересный случай, при котором модуль сдвига в слое осадка квадратично зависит от глубины:

$$\mu = \rho c_0^2 (z/H)^2. \quad (27)$$

Тогда волновое уравнение (26) принимает вид, подобный (6):

$$u'' + 2\frac{u'}{z} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(\frac{H}{z}\right)^2 u = 0. \quad (28)$$

Сделав выкладки, аналогичные проведенным в части II настоящей работы, получим выражение для локального волнового числа $k = k(z)$ ВКБ-приближения:

$$k(z) = \frac{i}{z} \pm \frac{1}{z} \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 H^2 - 1}. \quad (29)$$

Групповая и фазовая скорости сдвиговых волн стремятся к нулю при z стремящемся к нулю (т.е. при приближении к границе слоя осадков с водой), а время распространения T волнового пакета от начального сечения $z = H$ до некоторого сечения $z = z_1$

$$T = \left| \int_L^{z_1} \frac{dx}{c_{гр}} \right| = \frac{H^2 \omega}{c_0^2 \sqrt{(\omega/c_0)^2 H^2 - 1}} \ln \left(\frac{L}{z_1} \right). \quad (30)$$

стремится к бесконечности при $z_1 \rightarrow 0$. Волна, распространяющаяся от дна к границе осадка с водой, никогда не достигнет этой границы. Таким образом, здесь мы имеем дело с эффектом, аналогичным разобранному в части II. В данном случае, при $\nu = 1$, волновое уравнение для сдвиговых волн в слое осадка (28) также имеет набор

точных частных решений в виде степенных функций:

$$u(z) = A_{\alpha}(z/H)^{\alpha}, \quad (31)$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{c_0^2} H^2}. \quad (32)$$

Когда эти показатели степени вещественны, т.е. при $\omega < c_0/(2H)$, $u(z)$ имеет неволновой характер, а при $\omega > c_0/(2H)$ поле (31) является распространяющейся волной.

1. В работе показана принципиальная возможность создания конструкции из непоглощающих материалов, которая обеспечивает полное поглощение акустической волны. Поглощение происходит за счет постепенного уменьшения скорости распространения звукового поля по волноводу и накоплению акустической энергии в точке обращения скорости в нуль.

2. В специальном случае изменения параметров замедляющей структуры, при котором

ВКБ-асимптотика равномерна, точные решения описываются степенными функциями.

3. При усечении "акустической черной дыры" замедляющая структура приводит к резкому снижению резонансных частот.

4. Аналогичный эффект может быть обнаружен в случае распространения сдвиговой волны в среде с переменным модулем сдвига.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исакович М.А. Общая акустика. М., 1973.
2. Миронов М.А. Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 546–547.
3. Миронов М.А. Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения вдоль его оси // XI Всесоюзная акустическая конференция. Доклады. Секция. Л.–М., 1991. С. 23–26.
4. Godin O.A., Chapman D.M.F. Shear-speed gradients and ocean seismo-acoustic resonances // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 106. № 5. P. 2367–2382.

One-dimensional Waves in Retarding Structures with Propagation Velocity Tending to Zero

M. A. Mironov* and V. V. Pislyakov**

* *Andreev Acoustics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia*
e-mail: mironov@akin.ru

** *Moscow Institute of Physics and Technology, Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700 Russia*

Abstract—A retarding structure that makes the effective admittance of a tube wall to increase smoothly along the tube axis is considered. The sound velocity gradually decreases along a finite segment of the tube and finally vanishes at some cross section. The time of the sound propagation along this segment is infinitely long. A wave incident on the input cross section cannot reach the other end of the tube within a finite time, and, hence, it is not reflected from it. The wave is completely absorbed, the absorption being caused by the energy accumulation in the cross section where the velocity of sound vanishes, rather than by the energy transformation to heat, as in common sound absorbers. A differential equation is obtained to describe the sound propagation in a one-dimensional waveguide with a varying cross section and a varying acoustic admittance of the walls. The solutions to this equation are analyzed in the WKB approximation. An exact solution is determined for the case of some specific functions describing the variations of the cross section and admittance. Calculated results for the input admittance of the waveguide are presented. A possible similarity to the problem on shear waves in sea sediments is pointed out.