АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 5, с. 661–665

УДК 534.26

ЗАТУХАЮЩИЕ ВОЛНЫ В ТЕНИ ЦИЛИНДРА

© 2002 г. **М. А. Миронов, И. А. Урусовский**

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 6.11.2001 г.

Проанализировано звуковое поле в области глубокой тени за импедансным цилиндром при дифракции плоской волны на нем, когда основная часть этого поля представляется затухающей по угловой координате цилиндрической волной с комплексным индексом, определяемым из граничных условий. Найдено выражение для амплитуды этой волны выделением ее из полного поля в области тени. Показано, что эта волна более точно аппроксимирует полное поле за цилиндром, чем наименее затухающая волна в представлении поля, полученном на основе преобразования Ватсона. Указан путь совершенствования звуковых барьеров.

Для улучшения эффективности звуковых барьеров, экранирующих дорожный шум, применяют цилиндрические насадки на кромки барьеров, акустически достаточно мягкие [1]. Однако в некоторых полосах частот экранировка таким барьером оказывается неэффективной. Представляет теоретический и практический интерес выяснить причину этой неэффективности, что и является целью дальнейшего рассмотрения.

При дифракции на цилиндре плоской волны звукового давления $p_i(x) = \exp(ikx)$, где k – волновое число, x – координата вдоль направления распространения волны, (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ подразумевается) рассеянное поле имеет вид

$$p_r(r, \phi) = b_0 H_0^{(1)}(kr) + 2\sum_{m\geq 1} i^m b_m H_m^{(1)}(kr)\cos(m\phi),$$

где r – расстояние от центра цилиндра до точки наблюдения, ϕ – угол между направлением из центра цилиндра в эту точку и осью x. С учетом тождества [2]

$$\exp(ikx) = J_0(kr) + 2\sum_{m\geq 1} i^m J_m(kr)\cos(m\phi)$$

полное поле $p = p_i + p_r$ принимает вид

$$p(r, \phi) = J_0(kr) + b_0 H_0^{(1)}(kr) + \\ + 2\sum_{m\geq 1} i^m \left[J_m(kr) + b_m H_m^{(1)}(kr)\right]\cos(m\phi). \quad (1)$$

На поверхности цилиндра, которую будем полагать характеризующейся удельной акустической проводимостью η, выполняется граничное условие

$$\left(\frac{dp}{dr} + ik\eta p\right)_{r=a} = 0, \quad (2)$$

где a – радиус цилиндра. При этом

$$b_0 = -\frac{J_1(ka) - i\eta J_0(ka)}{H_1^{(1)}(ka) - i\eta H_0^{(1)}(ka)},$$

$$b_m = -\frac{J_m'(ka) - i\eta J_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka) - i\eta H_m^{(1)}(ka)},$$

где штрих означает производную по аргументу.

Поскольку поле в области тени образуется волнами, приходящими из освещенной области, то основная его часть должна иметь вид затухающей по углу ϕ цилиндрической волны

$$p_\nu(r, \phi) = A_\nu \cos(\nu\phi) H_\nu^{(1)}(kr)/H_\nu^{(1)}(ka)$$

с некоторым комплексным индексом ν, определяемым из граничного условия (2) для поля $p_\nu(r, \phi)$ на поверхности цилиндра в разветвленном по углу ϕ пространстве:

$$[H_\nu^{(1)'}(ka)/H_\nu^{(1)}(ka)] + i\eta = 0. \quad (3)$$

Подставив сюда интегральное представление [2]

$$H_\nu^{(1)}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}\exp\left[i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right]\int_0^\infty U_\nu(x, t)dt, \quad (4)$$

где $U_\nu(x, t) = \left[\left(1 + i\frac{t}{2}\right)t\right]^{\nu - \frac{1}{2}}\exp(-xt)$, $\mathrm{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}, x > 0$, получим при $x = ka$:

$$\frac{\nu}{x} + i - \left[\int_0^\infty U_\nu(x, t)t\,dt \Big/ \int_0^\infty U_\nu(x, t)dt\right] + i\eta = 0,$$

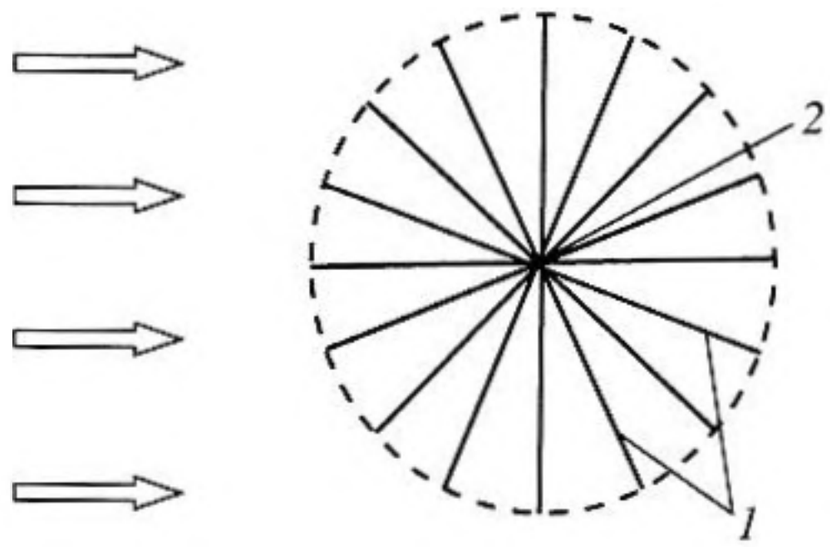

Рис. 1. Импедансный цилиндр в виде большого числа жестких полос *1*, имеющих общую кромку *2*.

В наборе значений ν, удовлетворяющих уравнению (3), значение ν с наименьшей положительной мнимой частью соответствует волне, менее всех затухающей с увеличением угла $(\pi/2) - \phi$ и поэтому глубже всех проникающей в зону тени. Это значение нас и будет интересовать.

Для нахождения амплитуды A_ν представим p в виде $p = p_\perp + p_\nu$, где $p_\perp$ – часть полного поля в зоне достаточно глубокой тени $0 \le |\phi| \le \Psi$, $\Psi < \pi/2$, не содержащая в своем угловом спектре затухающей волны p_ν, так что $\int_0^\Psi p_\perp \cos(\nu^*\phi)d\phi = 0$, где * – знак комплексного сопряжения. Отсюда, интегрируя p по ϕ с весом $\cos(\nu^*\phi)$, найдем

$$A_\nu = \int_0^\Psi p(a,\phi)\cos(\nu^*\phi)d\phi \Big/ \int_0^\Psi \cos(\nu\phi)\cos(\nu^*\phi)d\phi = \\ = \frac{4}{S_0}\int_0^\Psi p(a,\phi)\cos(\nu^*\phi)d\phi, \tag{5}$$

где $S_0 = \dfrac{\sin(2\Psi \mathrm{Re}\nu)}{\mathrm{Re}\nu} + \dfrac{\mathrm{sh}(2\Psi \mathrm{Im}\nu)}{\mathrm{Im}\nu}$.

При $r = a$ с учетом тождества [2]

$$J_m(z)N_{m-1}(z) - J_{m-1}(z)N_m(z) = \frac{2}{\pi z}$$

(1) сводится к виду

$$p(a,\phi) = \frac{2i}{\pi ka}\left[\frac{1}{i\eta H_0^{(1)}(ka) - H_1^{(1)}(ka)} + \right. \\ \left. + 2\sum_{m\ge 1} i^m \frac{\cos m\phi}{\left(i\eta - \dfrac{m}{ka}\right)H_m^{(1)}(ka) + H_{m-1}^{(1)}(ka)}\right].$$

Подставив (5) и (4) и проведя интегрирование, получим

$$A_\nu = \frac{8i}{\pi kaS_0}\left[\frac{\sin(\nu^*\Psi)}{i\eta H_0^{(1)}(ka) - H_1^{(1)}(ka)}\frac{1}{\nu^*} + \right. \\ \left. + \sum_{m\ge 1} i^m \frac{S(m)}{\left(i\eta - \dfrac{m}{ka}\right)H_m^{(1)}(ka) + H_{m-1}^{(1)}(ka)}\right], \tag{6}$$

где

$$S(m) = 2\int_0^\Psi \cos(m\phi)\cos(\nu^*\phi)d\phi = \\ = \frac{\sin\lfloor(m+\nu^*)\Psi\rfloor}{m+\nu^*} + \frac{\sin\lfloor(m-\nu^*)\Psi\rfloor}{m-\nu^*}.$$

В качестве удельной акустической проводимости на поверхности цилиндра выберем величину $\eta = -iJ_1(ka)/J_0(ka)$. Она реализуется для показанной на рис. 1 структуры, составленной из большого числа N жестких полос шириной a, соприкасающихся по одной из кромок так, что расстояния между соседними внешними кромками малы по сравнению с длиной звуковой волны ($2\pi ka/N \ll 1$ при одинаковых расстояниях между не соприкасающимися кромками).

При выбранном η в определенных узких полосах частот рассматриваемые волны, как показывают проведенные нами расчеты, имеют сравнительно большую амплитуду при сравнительно глубоком проникновении в зону геометрической тени за цилиндром, что нарушает эффективность экранировки зоны тени. Далее приводятся примеры расчета полей для таких частот.

Для $ka = 7.54444$, что при $a = 1$ м соответствует частоте 408.25 Гц, $i\eta = 0.5618$, искомый корень уравнения (3) при таком η есть $\nu = 9.44777 + 0.41256i$, в то время как для абсолютно жесткой поверхности (при $\eta = 0$) корень уравнения (3) равен $\nu_h = 8.30649 + 1.43768i$. Поскольку мнимая часть ν в этом примере гораздо меньше мнимой части ν_h, соответственная волна для импедансной поверхности на указанной частоте затухает гораздо медленнее, чем для жесткой поверхности, так что уровень звукового давления в тени цилиндра может быть в первом случае значительно больше, чем во втором. Отсюда видно, что именно затухающая волна, сравнительно глубоко проникающая в зону тени, в неблагоприятных случаях, когда основные угловые гармоники, формирующие звуковое поле, складываются почти в фазе, делает экранировку зоны тени барьером с импедансным цилиндром наверху неэффектив-

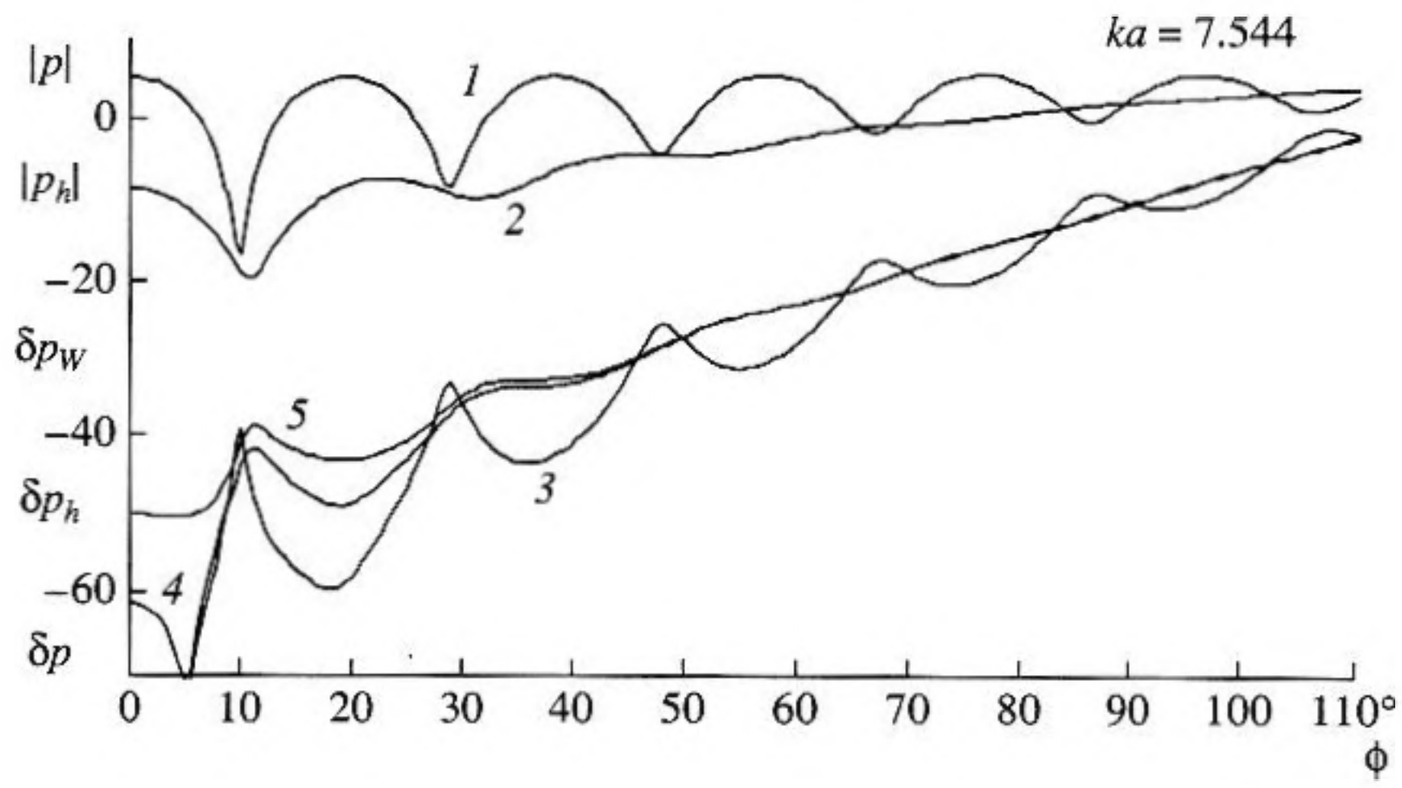

Рис. 2. *1* – выраженное в децибелах звуковое давление на поверхности цилиндра $p(a, \phi)$ в зависимости от угла ϕ для $ka = 7.54444$, *2* – то же для звукового давления $p_h(a, \phi)$ на абсолютно жесткой поверхности. *3* и *4* – выраженные в децибелах относительные разности δp и δp_h между этими функциями и звуковыми давлениями в соответственных затухающих волнах. *5* – выраженные в децибелах относительные разности δp_W между звуковыми давлениями $p(a, \phi)$ и $B_0\cos(\nu_0\phi)$ для случая жесткого цилиндра.

ной даже по сравнению с экранировкой барьером с жестким цилиндром [1]. Поэтому в задаче экранировки звука барьерами необходимо предусмотреть меры по борьбе с проникновением затухающих волн в зону тени. Заметим, что аномальное увеличение амплитуды затухающей волны не связано с резонансом колебаний воздуха в клиновидных полостях конструкции. Такому резонансу соответствовало бы значение $|\eta| = \infty$ (мягкая граница), в то время как в приведенном примере $i\eta = 0.5618$, что соответствует импедансу упругого типа. Вдоль такой импедансной поверхности волна распространяется с относительно малым затуханием.

Для рассмотренного примера при $\Psi = 0.2$ на рис. 2 кривой *1* представлено выраженное в децибелах звуковое давление на поверхности цилиндра $p(a, \phi)$ в зависимости от угла ϕ, кривой *2* – то же для звукового давления $p_h(a, \phi)$ на абсолютно жесткой поверхности. Кривые *3* и *4* представляют выраженные в децибелах относительные разности δp и δp_h между этими функциями и звуковыми давлениями в соответственных затухающих волнах $A_\nu\cos(\nu\phi)$ и $A_{\nu h}\cos(\nu_h\phi)$, где $A_{\nu h}$ – равно правой части (6) при $\eta = 0$ с заменой ν на ν_h. Как видно из рисунка, превышение уровня звукового давления в $p(a, \phi)$ над уровнем $p_h(a, \phi)$ при некоторых углах в области, казалось бы, глубокой тени составляет более 10 дБ, что и демонстрирует неэффективность рассматриваемой насадки на выбранной частоте.

Для $ka = 4.29659$, что при $a = 1$ м соответствует частоте 232.5 Гц, $i\eta = 0.4724$, $\nu = 5.44785 + 0.58282i$, $\nu_h = 4.9204 + 1.21461i$. Для этого случая на рис. 3 представлены кривые, соответствующие рис. 2. Здесь также $\Psi = 0.2$.

Сравним теперь полученную амплитуду затухающей волны A_ν с соответственной амплитудой первой (наименее затухающей) волны в представлении поля в форме разложения по затухающим волнам на основе преобразования Ватсона [3]. Указанное представление имеет вид

$$p(r, \phi) = \pi\sum_{s\geq 0} g(\nu_s, ka)\frac{1}{\sin(\nu_s\pi)}\times$$
$$\times\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\nu_s\right)H_{\nu_s}^{(1)}(kr)\cos(\nu_s\phi),$$

где

$$g(\nu, x) = \sum_{s\geq 0}\left[\frac{d}{dx}H_\nu^{(2)}(x)/\frac{d}{d\nu}\frac{d}{dx}H_\nu^{(1)}(x)\right],$$

ν_s – корни уравнения (3). Подставляя сюда интегральные представления (4) и

$$H_\nu^{(2)}(x) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}\nu+\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\int_0^\infty V_\nu(x, t)dt,$$

где $V_\nu(x, t) = \left[\left(1 - i\frac{t}{2}\right)t\right]^{\nu-\frac{1}{2}}\exp(-xt)$, при $r = a$ получим

$$p(a, \phi) = \sum_{s\geq 0} B_s\cos(\nu_s\phi),$$

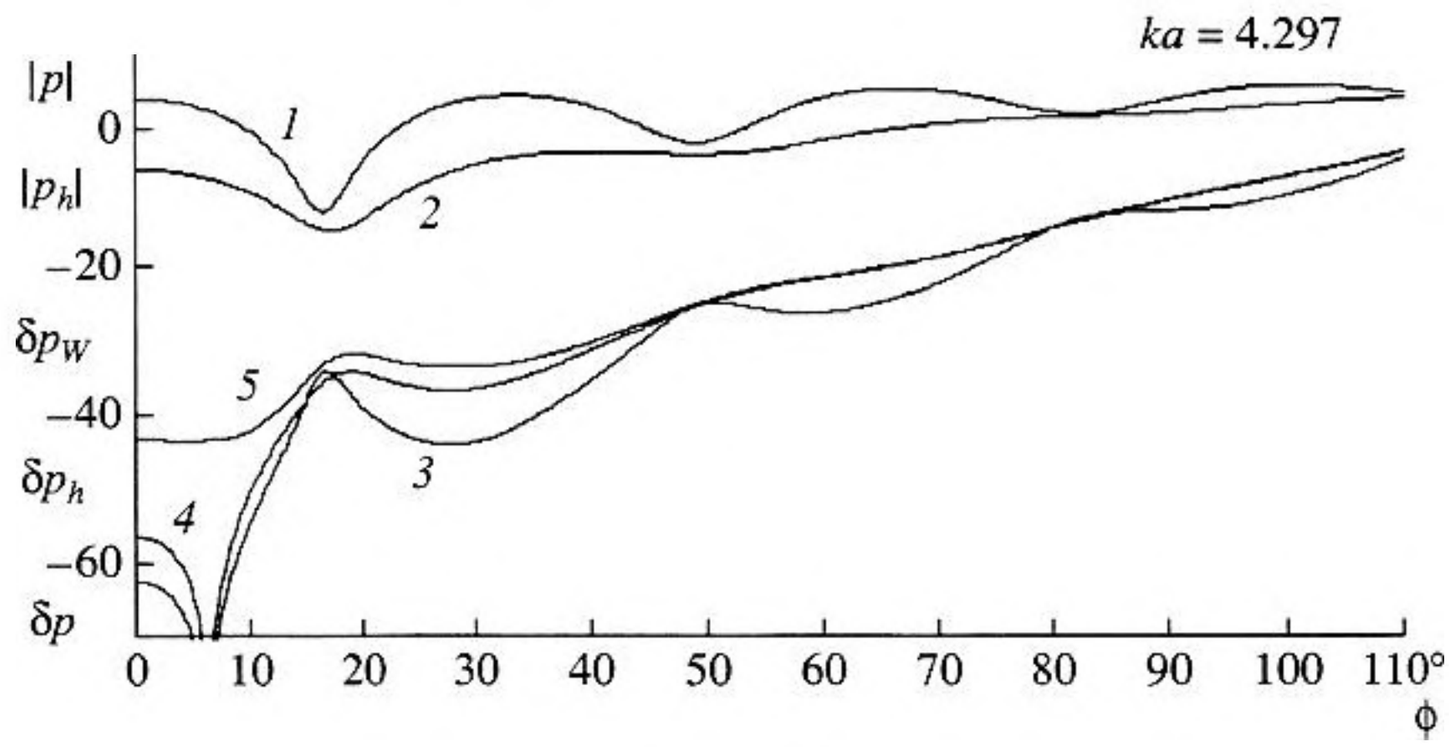

Рис. 3. То же, что и на рис. 2 для $ka = 4.29659$.

где

$$B_s = \sqrt{2\pi}\exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} - ka\right)\right]G(\nu_s, ka)\times$$

$$\times\frac{(ka)^{\nu_s}}{\Gamma\left(\nu_s + \frac{1}{2}\right)}\frac{1}{\sin(\nu_s\pi)}\int_0^\infty U(ka, t)dt,$$

$$G(\nu, x) = \exp\left[i\left(2x - \pi\nu - \frac{\pi}{2}\right)\right]g(\nu, x) =$$

$$= \left[\left(\frac{\nu}{x} - i\right)\int_0^\infty V_\nu(x, t)dt - \int_0^\infty V_\nu(x, t)tdt\right]/D(\nu, x),$$

$$D(\nu, x) = \left[L(\nu, x)\left(\frac{\nu}{x} + i\right) + \frac{1}{x}\right]\int_0^\infty U_\nu(x, t)dt -$$

$$-L(\nu, x)\int_0^\infty U_\nu(x, t)tdt +$$

$$+\int_0^\infty U_\nu(x, t)\left(\frac{\nu}{x} + i - t\right)\ln\left[\left(1 + i\frac{t}{2}\right)t\right]dt,$$

$$L(\nu, x) = \ln x - i\frac{\pi}{2} - \frac{d}{d\nu}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right).$$

Для вычисления производной гамма-функции воспользуемся ее представлением [2] $\Gamma(z) = \exp(-Cz)\frac{1}{z}\prod_{m\geq 1}\frac{\exp(z/m)}{1 + (z/m)}$, где $C = 0.577215$ – постоянная Эйлера, откуда найдем

$$\frac{d}{d\nu}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -C - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\sum_{m\geq 1}\left[\left(m + \nu + \frac{1}{2}\right)m\right]^{-1}.$$

Последнюю формулу, используя равенства [2]

$$\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{m\geq 1}\left[\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)m\right]^{-1} = 8\ln 2 - 4,$$

$$\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^4} = \frac{\pi^2}{90},$$

можно привести к более удобному для численных расчетов виду, содержащему быстро сходящийся ряд:

$$\frac{d}{d\nu}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = -C - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^{-1} +$$

$$+\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi^2}{6} - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2(8\ln 2 - 4) +$$

$$+\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2\sum_{m\geq 1}\left(\nu + \frac{1}{2} + \frac{1}{4m}\right)/\left[\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\left(m + \nu + \frac{1}{2}\right)m\right].$$

На рисунках 2 и 3 кривыми *5* для рассмотренных примеров представлены выраженные в децибелах относительные разности δp_W между звуковыми давлениями $p(a, \phi)$ и $B_0\cos(\nu_0\phi)$ для случая жесткого цилиндра. Из рисунков видно, что затухающая волна $A_{\nu h}\cos(\nu_h\phi)$ более точно аппроксимирует полное поле за цилиндром, чем наименее затухающая волна в представлении поля, полученном на основе преобразования Ватсона. Увеличение точности составляет здесь в среднем по области $0 \leq |\phi| \leq \pi/2$ 2.15 дБ для первого примера и 4.33 дБ для второго. Для области более глубокой тени $0 \leq |\phi| \leq \pi/4$ соответственное увеличение составляет 2.98 и 5.88 дБ. Поле $A_{\nu h}\cos(\nu_h\phi)$ оказывается более точным приближением, поскольку оно выделяется из полного поля только на части цилиндра, находящейся в достаточно глубокой тени, в то время как $B_0\cos(\nu_0\phi)$ выделяется из пол-

ного поля на всей поверхности цилиндра. Что касается приближения Келлера, то оно для рассматриваемой задачи сводится к замене ν и $H_\nu^{(1)}(kr)$ их приближенными значениями [4], что только уменьшает точность аппроксимации.

Дальнейшее усовершенствование акустических барьеров возможно на пути поиска подходящей конструкции насадки на кромку экрана, препятствующей проникновению затухающей волны глубоко в зону тени.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю.И. Бобровницкому за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mözer M., Volz R.* Improvement of sound barriers using headpieces with finite acoustic impedance // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 106. № 6. P. 3049–3060.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФ-МЛ, 1962, 1094 с.
3. *Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964, 428 с.
4. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.

Damped Waves in a Cylinder Shadow

M. A. Mironov and I. A. Urusovskii

Andreev Acoustics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia
e-mail: mironov@akin.ru

Abstract—The sound field in the region of a deep shadow behind an impedance cylinder is analyzed for the case of the plane wave diffraction by the cylinder surface. The main part of the field is represented by a cylindrical wave that has a complex index determined from the boundary conditions and decays with the angular coordinate. An expression for the amplitude of this wave is determined by extracting it from the total field formed in the shadow region. It is demonstrated that this wave approximates more closely the total field behind the cylinder, as compared to the least damped wave in the field representation obtained on the basis of the Watson transform. A way for an improvement of sound barriers is indicated.