

УДК 517.947:534.414

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОСУДА С ЖИДКОСТЬЮ В ФОРМЕ ШАРОВОГО СЕКТОРА

© 2002 г. Ю. А. Лавров, В. Д. Лукьянов\*

Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения  
190031 Санкт-Петербург, Московский просп. 9

\*Санкт-Петербургский военный инженерно-технический университет  
191194 Санкт-Петербург, Захарьевская ул. 22

E-mail: lvv@vl2771.spb.edu

Поступила в редакцию 21.01.2002 г.

Получено и исследовано аналитическое решение задачи о нахождении частот и форм свободных осесимметрических колебаний шарового сектора. Сектор заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. На сферической поверхности сектора расположена тонкая упругая оболочка, жестко заделанная по своей границе в радиальную стенку сектора, которая является абсолютно жесткой. Приведены приближенные уравнения для собственных частот. Проведен анализ зависимости частот от механических свойств оболочки и геометрических размеров резонатора.

Изучению колебаний заполненной жидкостью упругой сферической оболочки посвящено множество работ. Применяются как аналитические решения [1–6], так и численные методики, к примеру, сочетание методов граничного и конечного элементов [3]. Рассматриваются колебания полной сферы [1–3, 6] и полусферы [4, 5, 7]. В настоящей работе исследуется случай, которому в литературе не уделено значительного внимания – случай свободных колебаний шарового сектора с произвольным углом раскрытия, заполненного идеальной сжимаемой жидкостью. Стенками сектора служат тонкая упругая сферическая оболочка, центр которой находится в вершине сектора, и абсолютно жесткая радиальная стенка.

Шаровой сектор занимает область  $\Omega = \{0 < r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \alpha\}$ . Здесь  $r, \varphi, \vartheta$  – сферические координаты. Область  $\Omega$  заполнена идеальной сжимаемой жидкостью с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c$ . Оболочка расположена на сферической поверхности радиуса  $R$ . Разыскиваются осесимметричные формы колебаний сектора, у которых нет зависимости от азимутального угла  $\varphi$  и потому эта переменная в выкладках отсутствует.

Акустическое давление  $P(r, \vartheta)$  в среде в области  $\Omega$  удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + k^2 \right) P(r, \vartheta) = 0, \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число,  $k = \omega/c$ ,  $\omega$  – круговая частота. Зависимость волновых процессов от времени считается гармонической и задается множителем  $\exp(-i\omega t)$ , который здесь и везде далее опущен.

Граничное условие неподвижности стенок угловой области имеет вид

$$\left. \frac{\partial P(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta = \alpha} = 0. \quad (2)$$

Смещения точек тонкой упругой оболочки описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений теории колебаний оболочки Власова [8] с учетом контакта с акустической средой. Уравнения гармонических во времени движений оболочки имеют вид

$$-\rho h \omega^2 U(\vartheta) = G \left( 1 - \sigma + \frac{d}{d\vartheta} L \right) U(\vartheta) + G \frac{d}{d\vartheta} ((1 + \sigma - \beta(\Delta_{\perp} + 2)) W(\vartheta)), \quad (3)$$

$$-\rho h \omega^2 W(\vartheta) = -G(1 + \sigma - \beta \Delta_{\perp}) L U(\vartheta) - G(2(1 + \sigma) + \beta(\Delta_{\perp}^2 + (1 - \sigma)(\Delta_{\perp} + 2))) W(\vartheta) + P(R, \vartheta), \quad (4)$$

где введены обозначения:  $U(\vartheta), W(\vartheta)$  – перемещение точек оболочки соответственно в меридианальном и радиальном направлениях,

$$L\Phi(\vartheta) = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta \Phi(\vartheta)),$$

$$\Delta_{\perp} \Phi(\vartheta) = L \left( \frac{d}{d\vartheta} \Phi(\vartheta) \right),$$

$G = Eh/(R^2(1 - \sigma^2))$ ,  $\beta = h^2/(12R^2)$ ,  $h$  – толщина оболочки, материал которой имеет модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\sigma$  и плотность  $\rho$ .

Равенство радиальных смещений точек оболочки и нормальных к ней перемещений жидкости на поверхности оболочки имеет вид

$$W(\vartheta) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial P(r, \vartheta)}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (5)$$

Условие жесткой заделки оболочки по периметру означают отсутствие смещений и поворотов на ее краях:

$$U(\alpha) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dW(\vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad (7)$$

$$W(\alpha) = 0. \quad (8)$$

Для однозначной разрешимости задачи следует указать характер поведения давления вблизи вершины угловой области. Вблизи этой вершины и точек заделки краев оболочки должны выполняться условия Мейкснера [9].

Построение и контроль решения поставленной задачи для совместной системы "оболочка-жидкость" опирается на решение задачи о собственных колебаниях оболочки в вакууме. Примеры изучения свободных колебаний цельной сферической оболочки содержатся в работах [2, 3, 10], полусферической – в [5, 7, 11].

Решение  $U_0(\vartheta)$ ,  $W_0(\vartheta)$  вспомогательной задачи о колебаниях оболочки с произвольным углом раскрыва должно удовлетворять условиям (3)–(4), (6)–(8), причем в (4) следует временно положить  $P(R, \vartheta) \equiv 0$ . Следует применить соотношения  $U_0(\vartheta) = AF_1(q, \vartheta)$ ,  $W_0(\vartheta) = BF_0(q, \vartheta)$ , где  $F_0(q, \vartheta) = P_q(\cos \vartheta)$ ,  $F_1(q, \vartheta) = \frac{\partial P_q(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta}$ ,  $P_q(z)$  – функция Лежандра первого рода порядка  $q$ . Величина  $q$  является искомой.

Для отыскания постоянных  $A$ ,  $B$  служит однородная система линейных алгебраических уравнений с неизвестной величиной  $\chi = q(q+1)$

$$\begin{cases} (a_{11}(\chi) + \rho h \omega^2)A + a_{12}(\chi)B = 0 \\ a_{21}(\chi)A + (a_{22}(\chi) + \rho h \omega^2)B = 0 \end{cases}, \quad (9)$$

коэффициенты системы определены выражениями

$$a_{11}(\chi) = (-\chi + 1 - \sigma)G,$$

$$a_{12}(\chi) = ((\chi - 2)\beta + 1 + \sigma)G,$$

$$a_{21}(\chi) = \chi(\chi\beta + 1 + \sigma)G,$$

$$a_{22}(\chi) = -((\chi^2 - (\chi - 2)(1 - \sigma))\beta + 2(1 + \sigma))G.$$

Ненулевое решение однородной системы (9) существует, если

$$\Delta(\chi) = (a_{11}(\chi) + \rho h \omega^2)(a_{22}(\chi) + \rho h \omega^2) - a_{12}(\chi)a_{21}(\chi) = 0. \quad (10)$$

Определитель  $\Delta(\chi)$  представляет собой многочлен третьей степени по  $\chi$ , поэтому уравнение (10) имеет три корня. По каждому из таких корней  $\chi_s$  найдется пара значений  $q_s = (-1 + \sqrt{1 + 4\chi_s})/2$ ,  $\tilde{q}_s = (-1 - \sqrt{1 + 4\chi_s})/2$ . Из свойства функций Лежандра  $P_q(z) = P_{-1-q}(z)$  вытекает равенство  $P_{\tilde{q}_s}(z) = P_{q_s}(z)$ , потому паре значений  $q_s, \tilde{q}_s$  соответствуют линейно зависимые решения системы дифференциальных уравнений (3)–(4). Таким образом, три линейно независимые решения системы определяются тремя корнями  $q_1, q_2, q_3$ , найденными с использованием характеристического уравнения (10). Каждому корню соответствует частное решение

$$U_{0s}(\vartheta) = a_{12}(\chi_s)F_1(q_s, \vartheta),$$

$$W_{0s}(\vartheta) = -(a_{11}(\chi_s) + \rho h \omega^2)F_0(q_s, \vartheta).$$

Общее решение системы, при подчинении его гранично-контактным условиям (6) и (7), обретает вид

$$U_0(\vartheta) = C \sum_{s=1}^3 m_s U_{0s}(\vartheta), \quad W_0(\vartheta) = C \sum_{s=1}^3 m_s W_{0s}(\vartheta),$$

$C$  – произвольная постоянная,  $m_1 = U_{03}(\alpha)W'_{02}(\alpha) - U_{02}(\alpha)W'_{03}(\alpha)$ ,  $m_2 = U_{01}(\alpha)W'_{03}(\alpha) - U_{03}(\alpha)W'_{01}(\alpha)$ ,  $m_3 = U_{02}(\alpha)W'_{01}(\alpha) - U_{01}(\alpha)W'_{02}(\alpha)$ .

Соблюдение условия (8) позволяет построить уравнение для поиска собственных частот изолированной оболочки

$$\sum_{s=1}^3 m_s W_{0s}(\alpha) = 0. \quad (11)$$

Методика построения решения задачи о совместных колебаниях оболочки и жидкости, изложенная в [13–15], приводит к результату

$$P(r, \vartheta) = C \sum_{n=0}^{\infty} p_n Q_n(r, \vartheta),$$

$$Q_n(r, \vartheta) = \frac{f_0(\lambda_n, kr) F_0(\lambda_n, \vartheta)}{f_0(\lambda_n, kR) F_0(\lambda_n, \alpha)},$$

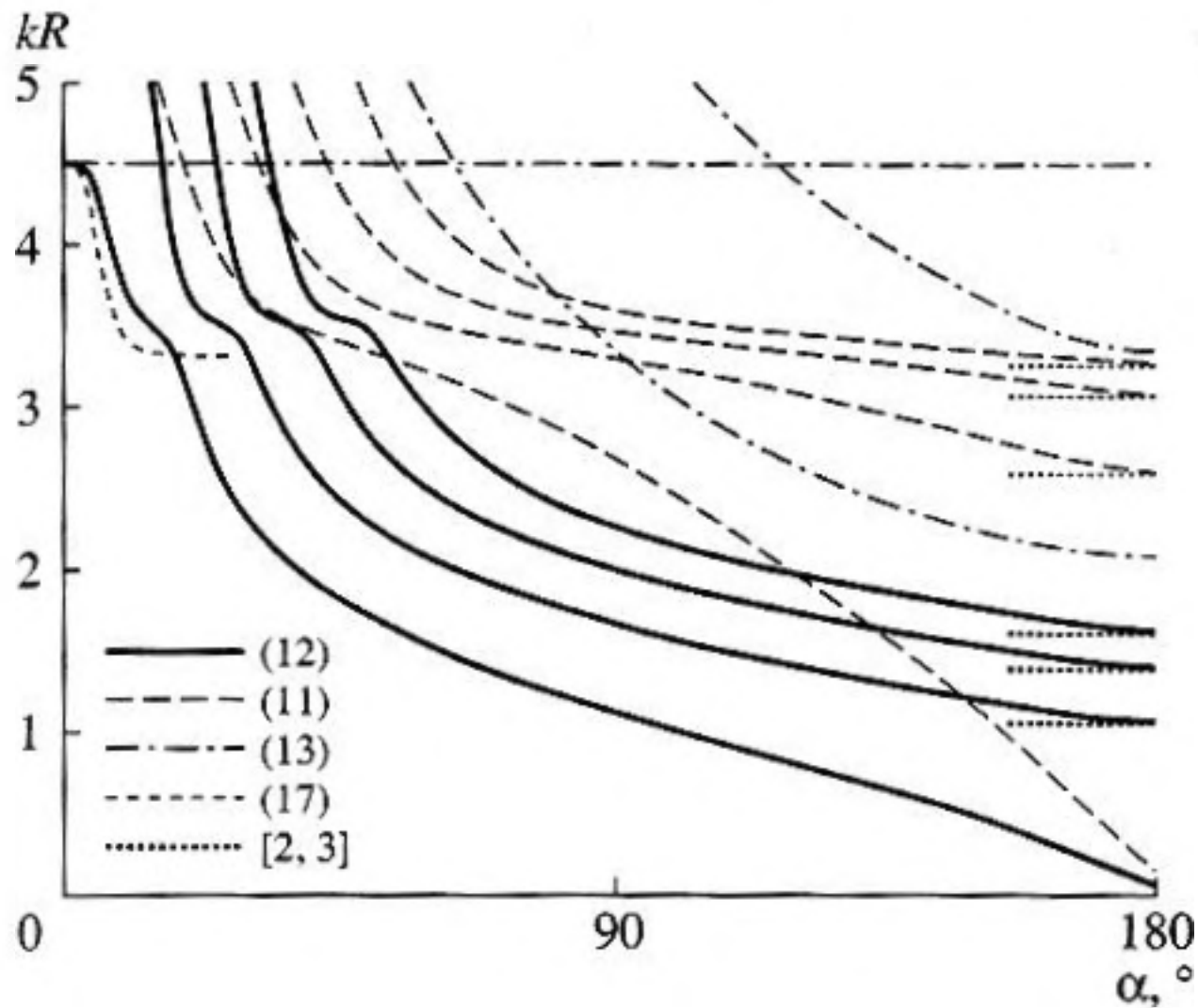


Рис. 1. Зависимости низших собственных частот от угла раскрыва сектора при фиксированном  $R$  (сплошные линии).  $h/R = 0.01$ . Пунктирные и штрих-пунктирные линии соответствуют частотам колебаний изолированной оболочки и резонатора с идеально жесткими стенками. Точечные линии построены с помощью частотного уравнения из работ [2, 3].

$$U(\vartheta) = C \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{F_1(\lambda_n, \vartheta)}{F_0(\lambda_n, \alpha)},$$

$$W(\vartheta) = C \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{F_0(\lambda_n, \vartheta)}{F_0(\lambda_n, \alpha)},$$

где применены обозначения:

$$p_n = \varepsilon_n f_0(\lambda_n, kR) \rho_0 \omega c (\rho h \omega^2 + a_{11}(\mu_n)) / z_n,$$

$$u_n = -\varepsilon_n f_1(\lambda_n, kR) a_{12}(\mu_n) / z_n,$$

$$w_n = w_n(\omega) = \varepsilon_n f_1(\lambda_n, kR) (\rho h \omega^2 + a_{11}(\mu_n)) / z_n,$$

$$z_n = z_n(\omega) = f_0(\lambda_n, kR) \rho_0 \omega c (\rho h \omega^2 + a_{11}(\mu_n)) + f_1(\lambda_n, kR) \Delta(\mu_n),$$

$$\varepsilon_n = -\alpha (\lambda_n + 1/2) F_0(\lambda_n, \alpha) \left( \frac{\partial F_1(\lambda_n, \alpha)}{\partial \lambda_n} \right)^{-1},$$

$$f_0(\lambda, z) = \frac{J_{\lambda+1/2}(z)}{\sqrt{z}}, \quad f_1(\lambda, z) = \frac{\partial f_0(\lambda, z)}{\partial z},$$

$\mu_n = \lambda_n(\lambda_n + 1)$ ,  $J_m(z)$  – функция Бесселя порядка  $m$ . Выражение для  $\varepsilon_n$  выбрано исходя из того [16], что  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ . Дискретный набор значений  $\lambda_n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , определяется из уравнения

$$F_1(\lambda, \alpha) = 0,$$

причем [16]  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(n + 1/4)/\alpha - 1/2$ .

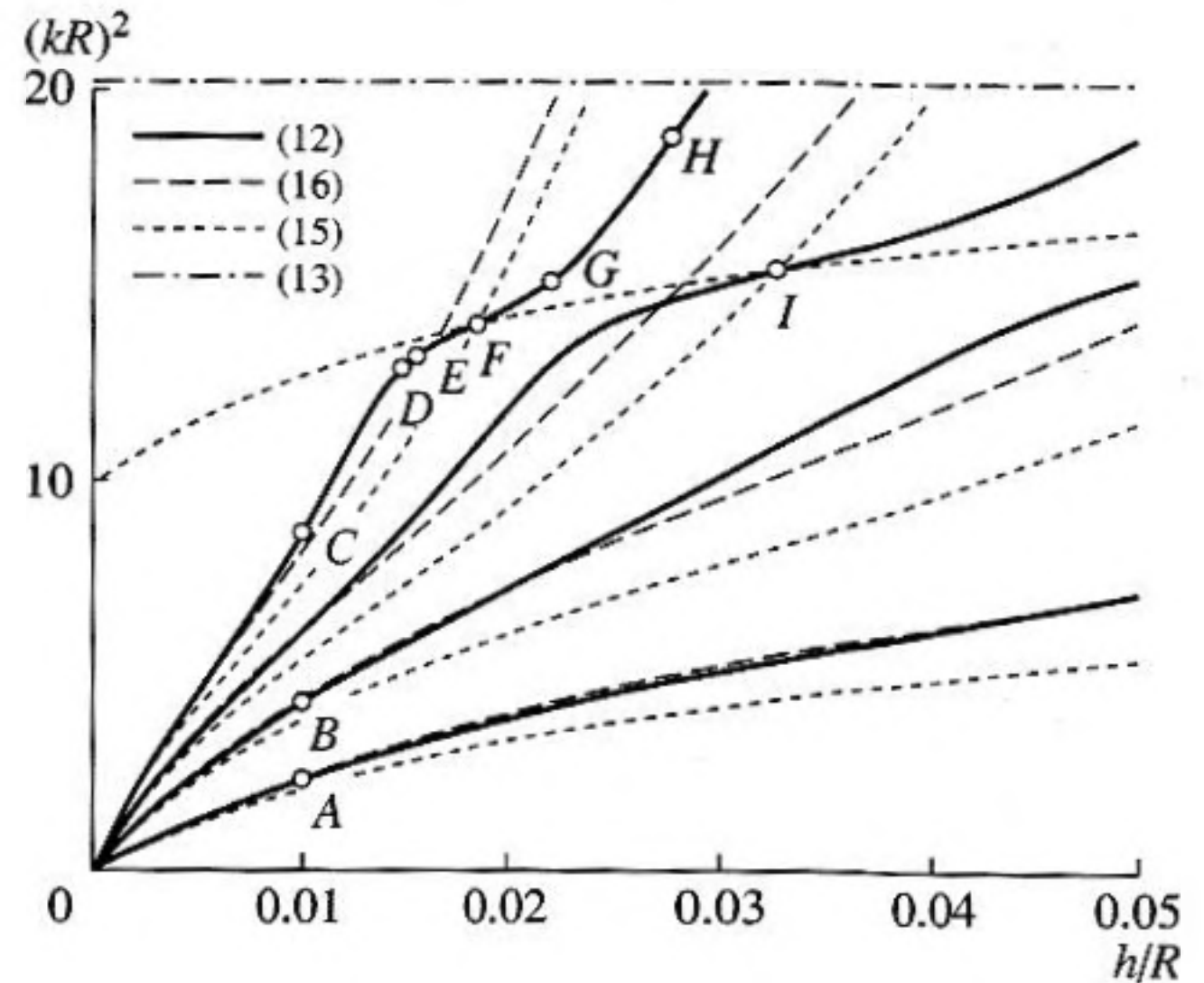


Рис. 2. Зависимости низших собственных частот  $\omega_s$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$ , от толщины оболочки при  $\alpha = 60^\circ$  (сплошные линии). Действие приближенного уравнения (16) показано пунктирными линиями. Линии полюсов представлены коротким пунктиром.

Предложенные выражения для полей, удовлетворяющие условиям (1)–(7), будут соответствовать собственному процессу, если на  $W(\vartheta)$  наложить последнее условие (8). Таким образом, уравнение для поиска дискретного множества  $\omega_s$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$  собственных частот принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(\omega) = 0. \quad (12)$$

Численное исследование свободных колебаний рассматриваемого резонатора удобно вести в сопоставлении с поведением изолированных оболочек, а также контейнеров с идеально жесткими стенками.

Формальная подстановка  $\rho_0 \equiv 0$  в (12) позволяет находить частоты свободных колебаний оболочки в вакууме. При этом отсутствует необходимость трудоемкого поиска вещественных корней комплекснозначной функции, как того требует работа с уравнением (11). Результаты двух подходов совпадают.

Примеры изучения колебаний заполненного жидкостью полусферического контейнера с жесткими стенками приведены в работах [5, 12].

Собственные частоты резонатора с произвольным углом раскрыва, коническая и сферическая стенки которого являются идеально жесткими, следует определять из уравнения

$$f_1(\lambda_s, kR) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

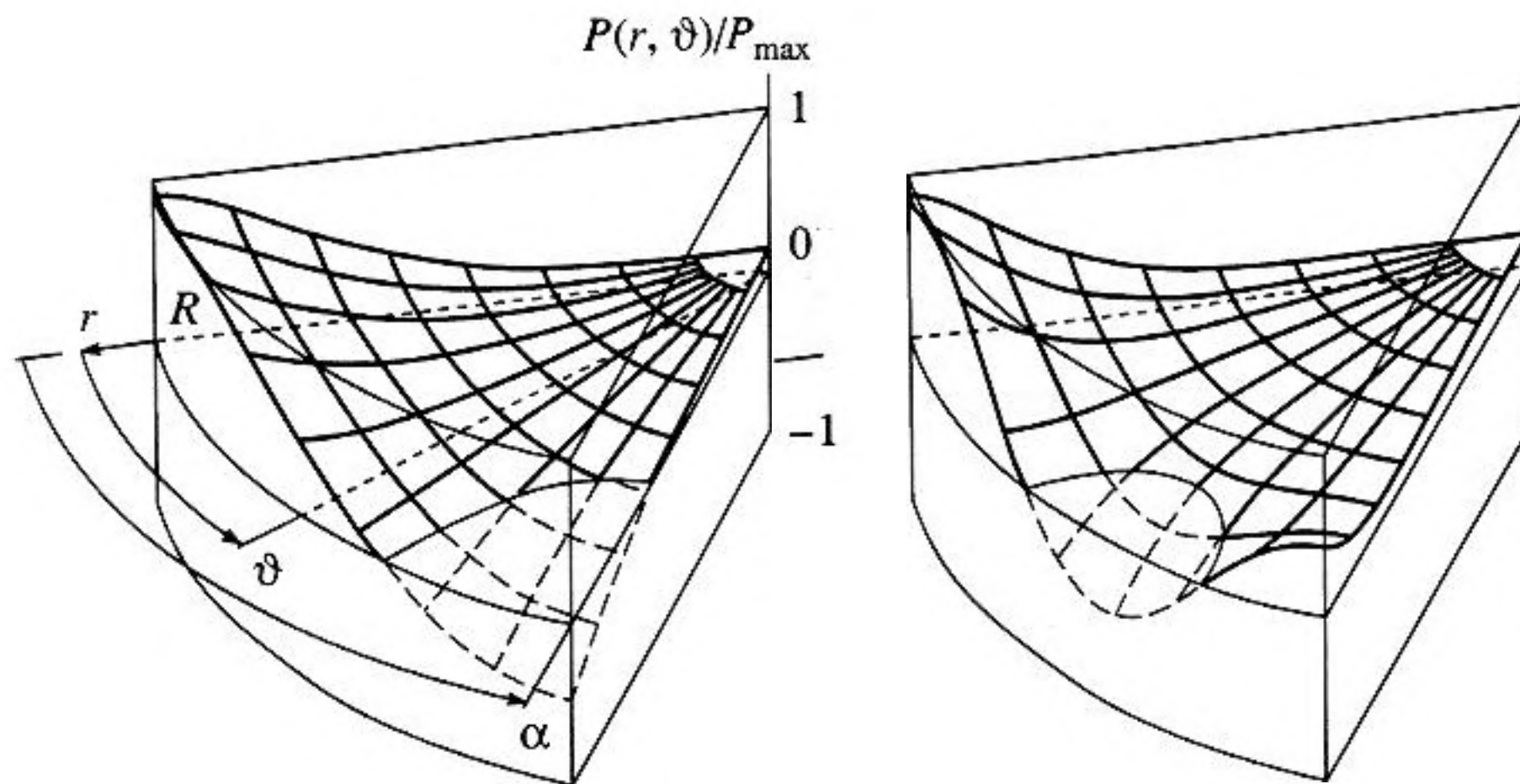


Рис. 3. Формы свободных колебаний давления в резонаторе. Части (а), (б) соответствуют частотам  $\omega_1, \omega_2$  (точки А, В на рис. 2).  $\alpha = 60^\circ, h/R = 0.01$ .

а если сферическая поверхность становится идеально мягкой, нужно пользоваться уравнением

$$f_0(\lambda_s, kR) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Иллюстрация численных экспериментов, проведенных для совместной системы “стальная оболочка–вода”, дана на рис. 1–5.

Прежде всего следует отметить, что спектр изучаемой совместной системы располагается в существенно более низкочастотной области как в сравнении со спектром изолированной оболочки, так и сравнении со спектром идеально жесткого резонатора (рис. 1).

При  $h/R \rightarrow 0$  сходимость ряда в (12) становится медленной, затрудняя вычислительную работу. Собственные частоты при этом сближаются с корнями уравнений

$$z_s(\omega) = 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$

низшие из которых для каждого индекса  $s$  далее обозначаются через  $\tilde{\omega}_s$ . Применяя алгоритм, описанный в [15], можно построить соотношение

$$\omega_s \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{\frac{hE\lambda_s(\mu_s - 2)}{R^3 \rho_0(\mu_s - 1 + \sigma)}}$$

либо конечное трансцендентное уравнение для приближенного частотного поиска

$$w_s(\omega) + \frac{R^2 \sqrt{R^4 \sqrt{3(1 - \sigma^2)}}}{Eh\sqrt{h}} = 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Уравнение (16) обеспечивает приемлемую точность в достаточно широком диапазоне изменения  $h/R$  (рис. 2).

Формы колебаний давления в среде представлены на рис. 3, 4; здесь

$$P_{\max} = \max_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \vartheta \leq \alpha}} |P(r, \vartheta)|.$$

Пока линия собственной частоты вплотную примыкает к линии корней (15)  $\tilde{\omega}_s$  (рис. 2), стоячая волна  $Q_s(r, \vartheta)$  доминирует в пакете волн колебательного процесса. На рис. 4 показана динамика коэффициентов  $p_n$  этого пакета.

На частоте  $\tilde{\omega}_s$  волна  $Q_s(r, \vartheta)$  удовлетворяет условиям задачи (1)–(7), условие (8) не выполнено. Однако в точках пересечения линий корней (15) при разных индексах  $s_1, s_2$  (точки F, I на рис. 2) собственный процесс в резонаторе представлен линейной комбинацией именно двух волн  $Q_{s_1}(r, \vartheta), Q_{s_2}(r, \vartheta)$ . Соотношение коэффициентов этой комбинации  $p_{s_1}, p_{s_2}$  таково, что выполненным оказывается и условие (8).

Использование асимптотики  $\lambda_n \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} j_{0n}/\alpha - 1/2, n > 0$ , где  $j_{0n}$  – серия положительных корней уравнения  $J_1(z) = 0$ , позволяет построить конечное трансцендентное уравнение, пригодное для поиска низших собственных частот при малых  $\alpha$ :

$$\frac{\text{tg}(kR)}{kR} \left( 1 + \frac{\alpha^3 \text{tg}(\alpha/2) R \rho_0 \omega^2}{96G(1 - \beta)\beta + \alpha^3 \text{tg}(\alpha/2)(2G(1 + \sigma + (1 - \sigma)\beta) - \rho h \omega^2)} \right) = 1. \quad (17)$$

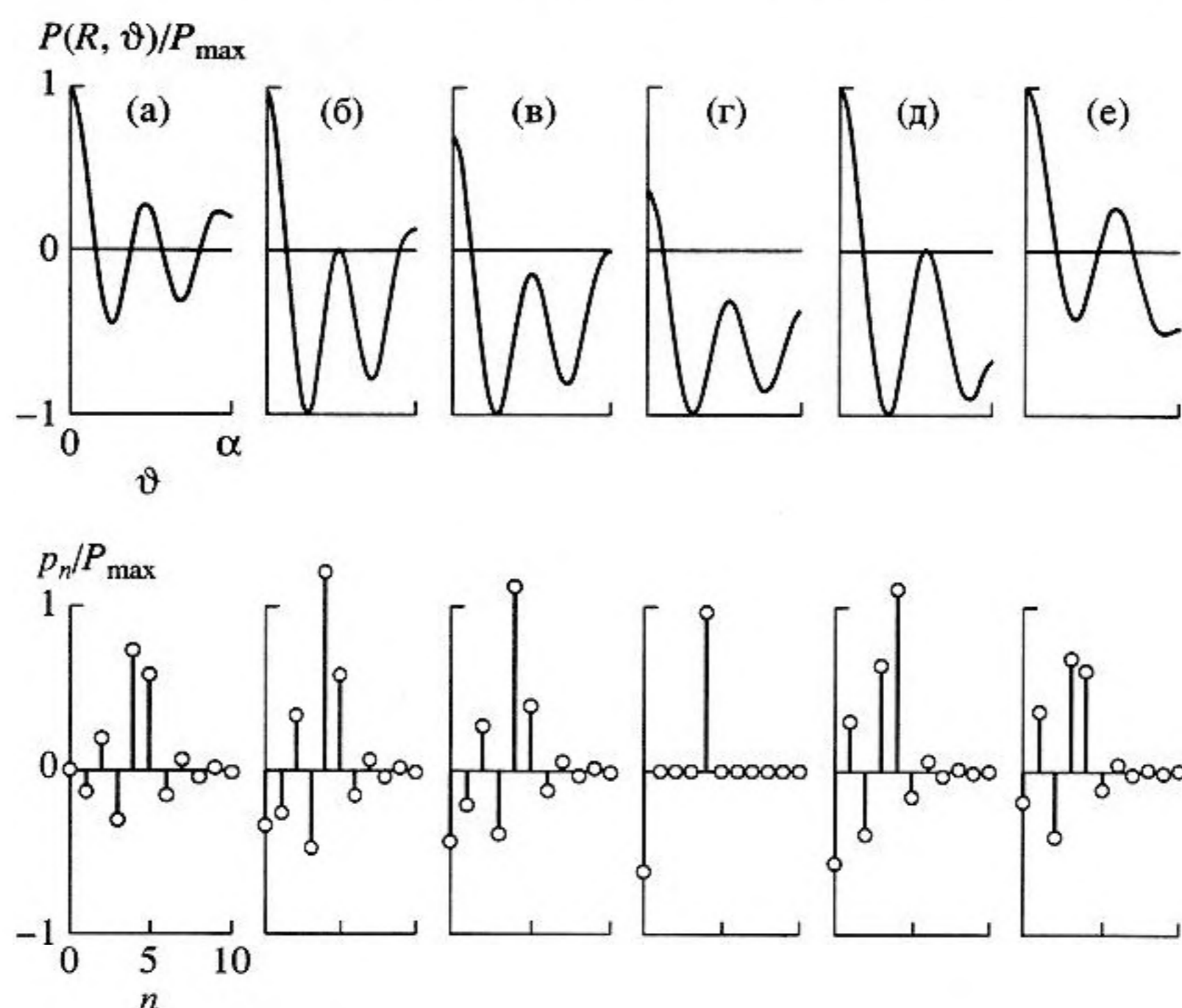


Рис. 4. Эволюция форм колебаний давления и пакета стоячих волн при смещении вдоль линии четвертой собственной частоты.  $\alpha = 60^\circ$ . Части (а)–(е), а с ними и значения  $h/R$ , соответствуют точкам  $C, D, E, F, G, H$  на рис. 2.

При выводе соотношения (17), также, как и в [14] учтено, что  $\sum_{n=1}^{\infty} j_{0n}^{-4} = 1/192$ .

Если  $\alpha \rightarrow 0$  при постоянных  $R, h$ , жесткость оболочки нарастает с уменьшением ее диаметра, что способствует сближению искомых частот с корнями (13) (рис. 1).

Внимания заслуживает также особый случай малых  $\alpha$ , когда постоянной является величина  $R_c = R\alpha$ . В таком случае при  $\alpha \rightarrow 0$ , а значит, при  $R \rightarrow \infty$ , сферическая оболочка становится все более полой, колебания ее уподобляются колебаниям круглой плоской пластины постоянного радиуса  $R_c$ . Частоты свободных колебаний изучаемого резонатора уместно сравнить с собственными частотами цилиндрического резонатора радиуса  $R_c$  и высотой  $H_c = R$ . Собственные частоты такого резонатора, имеющего идеально жесткую цилиндрическую поверхность, мягкую поверхность на одном из торцов и упругую пластину на другом, можно найти из уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( q_n^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} - \frac{\rho_0 \omega^2 \operatorname{tg}(H_c \sqrt{k^2 - q_n^2})}{D \sqrt{k^2 - q_n^2}} \right)^{-1} = 0, \quad (18)$$

$q_n = j_{0n}/R_c$ ,  $D = Eh^3/(12(1 - \sigma^2))$ . Уравнение (18) является частным случаем результата работы [14].

Ожидаемое сближение корней уравнений (12) и (18) подтверждает рис. 5. Важно отметить, что в обсуждаемом особом случае на низших частотах

оболочка ведет себя, в отличие от рис. 1, не как жесткая, а, напротив, как мягкая. Размеры и форма оболочки изменяются несущественно, жесткость ее не нарастает, а влияние инерционности, напротив, ослабляется с падением частоты колебаний. Так же, как в [13–15], где наблю-

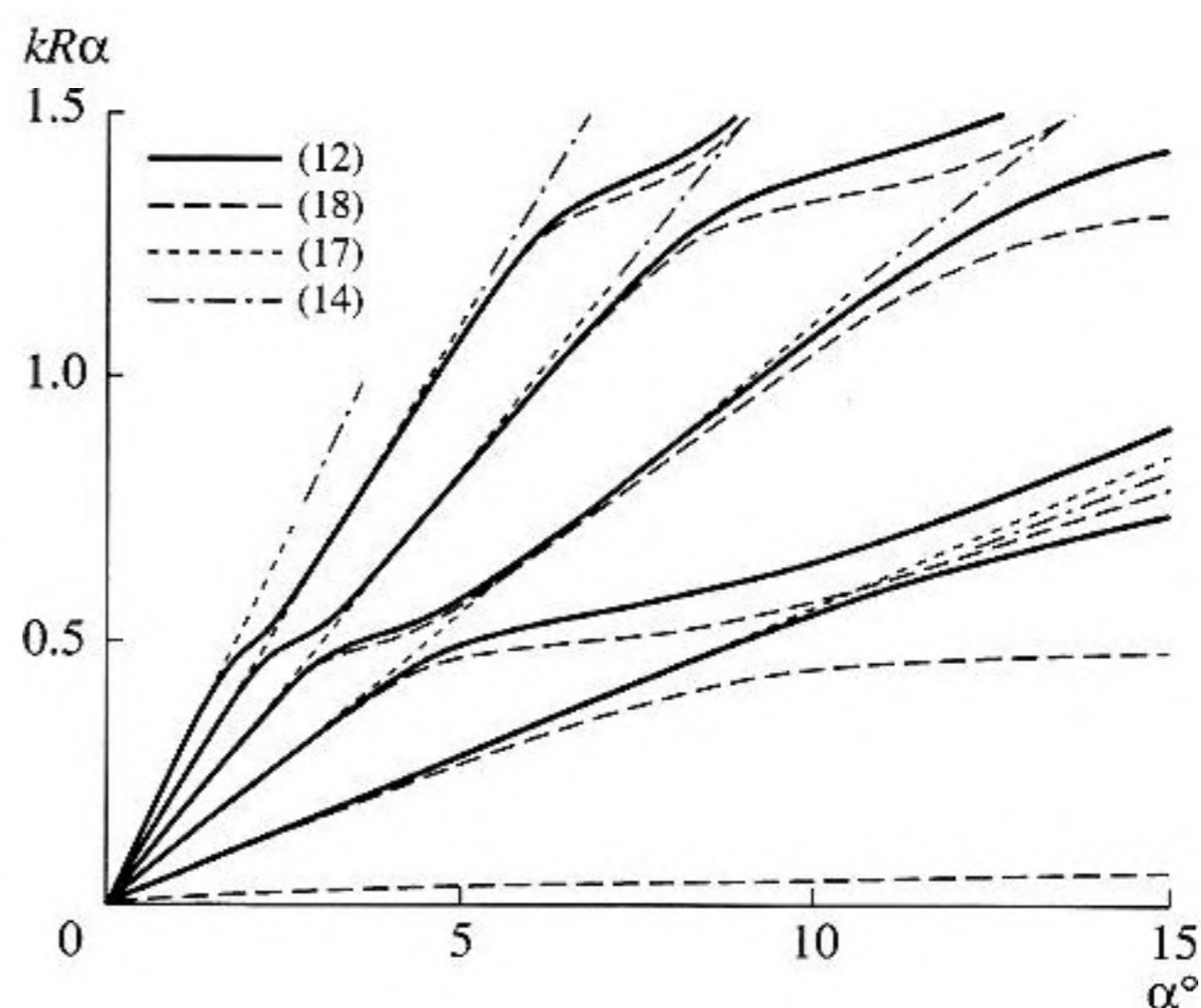


Рис. 5. Зависимости низших собственных частот от угла раскрытия сектора при фиксированном  $R\alpha$  (сплошные линии).  $h/(R\alpha) = 0.02$ . Действие уравнений (18), (17), (14) показано соответственно пунктирными, короткопунктирными, штрих-пунктирными линиями.

дается аналогичный эффект, при росте  $R$  растет и перекрываемый оболочкой акустический объем, а значит, большую роль играет сжимаемость среды.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобычкин В.С., Шмаков В.П. Исследование частот колебаний сферической оболочки, заполненной жидкостью // Строительная механика и расчет сооружений. 1969. № 2. С. 49–54.
2. Ali E. Engin. Vibrations of fluid-filled spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 46. № 1. Pt. 2. P. 186–190.
3. Mingsian R. Bai., Kuorong Wu. Free vibrations of a thin spherical shell containing a compressible fluid // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 95. № 6. P. 3300–3310.
4. Самойлов Е.А., Павлов Б.С. Колебания полусферической оболочки, заполненной жидкостью // Известия ВУЗов. Авиационная техника. 1964. Т. 7. № 3. С. 73–86.
5. Chintsum Hwang. Longitudinal sloshing of liquid in a flexible hemispherical tank // Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 3. P. 665–670.
6. Clyde Scandrett. Scattering and active acoustic control from a submerged spherical shell // J. Acoust. Soc. Amer. 2002. V. 11. № 2. P. 893–907.
7. Kohsetsu Yuji. Simplified method of axisymmetric fluid-structure coupled vibrations analysis for pressurized tank of rocket // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. Nihon kikai gakkai ronbunshu. 1999. V. 65. № 636. P. 50–57.
8. Власов В.З. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 528 с.
9. Muntpra P., Lu C. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 324 с.
10. Naghdi P.M., Kalnins A. On vibrations of elastic spherical shells // Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. № 1. P. 65–72.
11. Sabih I. Hayek. Vibration in vacuo hemispherical shells // 142nd Meeting. Acoust. Soc. Amer. 3–7 december 2001. P. 2772–2773.
12. Utsumi M. Low-gravity sloshing in an axisymmetrical container excited in the axial direction // Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. J. Appl. Mech. 2000. V. 67. № 2. P. 344–354.
13. Лавров Ю.А., Лукьянов В.Д., Никитин Г.Л. О собственных частотах прямоугольного акустического резонатора с упругими стенками // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 2. С. 302–307.
14. Лавров Ю.А. О собственных частотах цилиндрического акустического резонатора с упругими торцевыми стенками // Прикладная механика. 1991. Т. 27 (37). № 4. С. 53–59.
15. Лавров Ю.А. О собственных частотах цилиндрического акустического резонатора с упругой цилиндрической и жесткими торцевыми стенками // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 3. С. 425–428.
16. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. литературы, 1952. 476 с.

## Natural Oscillations of a Fluid-Filled Vessel Shaped Like a Spherical Cone

Yu. A. Lavrov\* and V. D. Luk'yanov\*\*

\* St. Petersburg State University of Transport,  
Moskovskii pr. 9, St. Petersburg, 190031 Russia

\*\* St. Petersburg Military Engineering University,  
Zakhar'evskaya ul. 22, St. Petersburg, 191194 Russia  
e-mail: lvv@vl2771.spb.edu

**Abstract**—An analytical solution to the problem of determining the frequencies and modes of free axisymmetric oscillations of a spherical cone is obtained and studied. The spherical cone is filled with an ideal compressible liquid. The spherical surface of the cone is represented by a thin elastic shell rigidly fixed along its boundary to the perfectly rigid radial wall of the cone. Approximate equations for the eigenfrequencies are presented. The dependences of the frequencies on the mechanical properties of the shell and on the geometric dimensions of the resonator are analyzed.