

УДК 534.222

СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЯ РЭЛЕЯ И АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ

© 2002 г. А. О. Максимов

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН
690041 Владивосток, ул. Балтийская 43

E-mail: pacific@online.marine.su

Поступила в редакцию 20.06.2000 г.

Представлены результаты группового анализа уравнения Рэлея, описывающего нелинейные пульсации газового пузырька в жидкости. Вычислена группа масштабных преобразований и на ее основе построены решения уравнения Рэлея. Возможность аналитического описания существенно нелинейной динамики пузырька позволяет использовать найденный класс решений в качестве модели при анализе кавитационных явлений, распространения ударных волн в жидкостях с фазовыми включениями, сонолюминесценции.

Применение теории непрерывных групп для анализа симметрии уравнений нелинейной акустики [1–2], позволило найти новые интегралы движения и построить точные аналитические решения.

В настоящей работе исследуется симметрия уравнения Рэлея, описывающего нелинейные пульсации газового пузырька в акустическом поле.

Уравнение Рэлея имеет следующий вид

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{P_i(R) - P(t)}{\rho_0}, \quad (1)$$

$$P_i(R) = P_0(R_0/R)^{3\gamma},$$

здесь R , R_0 – текущий и равновесный радиусы пузырька, P_i – давление газа в пузырьке, P_0 – равновесное значение давления, $P(t)$ – внешнее давление, ρ_0 – плотность жидкости.

В уравнении (1) опущены малые (вне области коллапса) слагаемые, описывающие диссипативные процессы. Вклад этих членов может быть учтен либо по теории возмущений, либо как адиабатическое возмущение вдоль траекторий гамильтоновой системы (1) [3, 4], либо при численных расчетах.

Анализ свойств симметрии уравнения (1) начнем с построения инфинитезимальных образующих искомым непрерывных групп. Запишем (1) в нормированных переменных: $u = R/R_0$, $\dot{u} = du/d\tau$,

$$\tau = t\Omega_0, \quad \Omega_0^2 = (3\gamma P_0/\rho_0 R_0^2), \quad u_1 = P(t)/P_0;$$

$$\ddot{u} = \frac{1}{u} \left[-\frac{3}{2}\dot{u} + \frac{1}{3\gamma} \left(\frac{1}{u^{3\gamma}} - u_1 \right) \right]. \quad (2)$$

Методика нахождения касательного векторного поля группы симметрии $\mathbf{V} = \xi(\tau, u)\partial_\tau + \eta(\tau, u)\partial_u$ изложена в [5–7], и состоит в построении продол-

жений первого и второго рода в пространство $\{\tau, u, \dot{u}, \ddot{u}\}$

$$pr^{(1)}\mathbf{V} = \mathbf{V} + \zeta_1(\tau, u, \dot{u})\partial_{\dot{u}},$$

$$\zeta_1 = D_1(\eta) - \dot{u}D_1(\xi), \quad D_1 = \partial_\tau + \dot{u}\partial_u;$$

$$pr^{(2)}\mathbf{V} = \mathbf{V} + \zeta_1(\tau, u, \dot{u})\partial_{\dot{u}} + \zeta_2(\tau, u, \dot{u}, \ddot{u})\partial_{\ddot{u}},$$

$$\zeta_2 = D_2(\zeta_1) - \ddot{u}D_2(\xi), \quad D_2 = \partial_\tau + \dot{u}\partial_u + \ddot{u}\partial_{\dot{u}};$$

и решении уравнения группы:

$$pr^{(2)}\mathbf{V} \left\{ \ddot{u} - \frac{1}{u} \left[-\frac{3}{2}\dot{u} + \frac{1}{3\gamma} \left(\frac{1}{u^{3\gamma}} - u_1 \right) \right] \right\} = 0, \quad (3)$$

$$\text{при условии } \ddot{u} = \frac{1}{u} \left[-\frac{3}{2}\dot{u} + \frac{1}{3\gamma} \left(\frac{1}{u^{3\gamma}} - u_1 \right) \right].$$

Расписывая уравнение (3) в явном виде и группируя члены перед одинаковыми степенями \dot{u} , получаем:

$$C_0 + C_1\dot{u} + C_2\dot{u}^2 + C_3\dot{u}^3 = 0,$$

$$C_0 = \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right) \frac{1}{3\gamma u} \left(\frac{1}{u^{3\gamma}} - u_1(\tau) \right) - \left(\xi \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \right) \frac{1}{3\gamma u} \left(\frac{1}{u^{3\gamma}} - u_1(\tau) \right) \right], \quad (4)$$

$$C_1 = \left[\left(2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} \right) - \frac{2}{\gamma u} \frac{\partial \xi}{\partial u} \left(\frac{1}{u^{3\gamma}} - u_1(\tau) \right) + \frac{3 \partial \eta}{u \partial \tau} \right],$$

$$C_2 = \left[\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + \frac{3}{2u} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \frac{3}{2u^2} \eta \right) - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} \right],$$

$$C_3 = \left[-\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \frac{3}{2u} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right].$$

Поскольку u является независимой переменной, следует приравнять нулю каждый из коэффициентов. Равенство нулю C_3 дает: $\xi(\tau, u) = \alpha(\tau) + u^{5/2} \beta(\tau)$. Условие $C_2 = 0$ можно представить в виде

$$\frac{1}{u^{3/2}} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{u^{3/2}} \frac{\partial}{\partial u} u^{3/2} \eta \right] = 2 \frac{1}{u^{3/2}} \frac{\partial \partial \xi}{\partial u \partial \tau}, \quad (5)$$

$$\text{откуда } \eta(\tau, u) = \frac{\sigma(\tau)}{u^{3/2}} + v(\tau)u + \beta(\tau)u^{7/2}.$$

Подставляя полученные выражения для η и ξ в уравнения $C_1 = 0$ и $C_0 = 0$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях u , получаем следующие соотношения, накладываемые на неизвестные функции $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\sigma(\tau)$, $v(\tau)$:

$$\beta = 0, \quad 5 \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tau^2} \quad \text{из условия } C_1 = 0; \quad (6a)$$

$$\sigma = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{(2+3\gamma)v}{2} = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}, \quad (6b)$$

$$\frac{1}{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = \frac{2}{\alpha} \left[v - \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \right] = -\frac{6\gamma}{(2+3\gamma)\alpha} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \quad \text{из } C_0 = 0.$$

Из соотношений (6a, б) следует, что

$$\xi = c_0 + c_1 \tau, \quad \eta = c_1 \frac{2}{(2+3\gamma)} u$$

$$\text{и } u_1(\tau) = u_1(0) \left(\frac{c_0}{c_0 + c_1 \tau} \right)^{6\gamma/(2+3\gamma)}. \quad (7)$$

Для постоянного внешнего давления $\partial u_1 / \partial \tau = 0$, $u_1 = \text{const}$, $c_1 = 0$, и образующая группы равна

$$V_1 = \partial_\tau. \quad (8)$$

Эта группа сдвигов во времени $G_1: (u, \tau + \varepsilon)$. Ее наличие приводит к тому, что уравнение Рэлея имеет интеграл движения – гамильтониан [3, 4]

$$H = \frac{u^3 \dot{u}^2}{2} + \frac{1}{3\gamma} \left(\frac{1}{3(\gamma-1)u^{3(\gamma-1)}} - \frac{u^3 u_1}{3} \right) = \text{const}. \quad (9)$$

Второе нетривиальное решение (7) возникает при

$$u_1(\tau) = u_1(0) \left(\frac{\tau_0}{\tau + \tau_0} \right)^{6\gamma/(2+3\gamma)}, \quad c_0/c_1 \equiv \tau_0;$$

или, используя замену переменной $\tilde{\tau} = (\tau + \tau_0)$, $u_1(\tilde{\tau}) = U \tilde{\tau}^{-6\gamma/(2+3\gamma)}$; $U = u_1(0) \tau_0^{6\gamma/(2+3\gamma)}$. Этот вид внешнего возмущения отвечает ударной волне $P(t) = P_m [t_0/(t+t_0)]^{6\gamma/(2+3\gamma)}$, со скачком на переднем фронте равном P_m и характерным временем спада t_0 ($\tau_0 \equiv t_0 \Omega_0$).

Образующая группы в этом случае имеет вид

$$V_2 = \tilde{\tau} \partial_{\tilde{\tau}} + \frac{2}{2+3\gamma} u \partial_u. \quad (10)$$

Эта группа масштабных преобразований

$$G_2: u' = \lambda^{2/(2+3\gamma)} u(\tilde{\tau}), \quad \tilde{\tau}' = \lambda \tilde{\tau},$$

которая переводит решение уравнения Рэлея опять в решение, т.е. u' , рассматриваемая как функция новой переменной $\tilde{\tau}'$: $u'(\tilde{\tau}') = \lambda^{2/(2+3\gamma)} u(\lambda^{-1} \tilde{\tau}')$, также является решением уравнения (2).

Таким образом, у уравнения Рэлея может существовать только две группы симметрии: сдвиг во времени и масштабных преобразований.

Исследуем характер решений при наличии группы масштабных преобразований. Инвариантное решение $u'(\tilde{\tau}') = \lambda^{2/(2+3\gamma)} u(\lambda^{-1} \tilde{\tau}') = u(\tilde{\tau}')$, имеет вид:

$$u(\tilde{\tau}) = z \tilde{\tau}^{-2/(2+3\gamma)}, \quad U = \frac{18(\gamma-1)\gamma z^2}{(2+3\gamma)^2} + \frac{1}{z^{3\gamma}}. \quad (11)$$

При нахождении общего решения воспользуемся тем обстоятельством, что наличие определенной непрерывной группы симметрии позволяет, как правило, понизить порядок соответствующего дифференциального уравнения. А именно, оказывается возможным ввести новые координаты (w, z) , так что векторное поле V_2 и его продолжения $pr^{(1)}V_2$, $pr^{(2)}V_2$ являются сдвигом: $V_2 = \partial/\partial w$ [7]. Таким образом, чтобы быть инвариантным в новой системе координат, дифференциальное уравнение (2) должно не зависеть от w .

Замена переменных строится с помощью нахождения групповых инвариантов, и в нашем случае сводится к подстановке $z(w) = u(\tilde{\tau}) \tilde{\tau}^{-2/(2+3\gamma)}$, $w = \ln \tilde{\tau}$. Кроме того, удобно перейти от уравнения второго порядка к системе двух уравнений первого порядка, вводя новую переменную $z_1(\tilde{\tau}) = \tilde{\tau}^{3\gamma/(2+3\gamma)} \dot{u}(\tilde{\tau})$. В результате преобразованное уравнение (2) не зависит явным образом от переменной w .

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{2}{2+3\gamma} z + z_1, \quad (12)$$

$$\frac{dz_1}{dw} = \frac{3\gamma}{2+3\gamma} z_1 + \frac{1}{z} \left[-\frac{3}{2} z_1^2 + \frac{1}{3\gamma} \left(\frac{1}{z^{3\gamma}} - U \right) \right].$$

Откуда

$$\frac{dz_1}{dz} = \left\{ \frac{3\gamma}{2+3\gamma} z z_1 + \left[-\frac{3}{2} z_1^2 + \frac{1}{3\gamma} \left(\frac{1}{z^{3\gamma}} - U \right) \right] \right\} \times z^{-1} \left(z_1 - \frac{2}{2+3\gamma} z \right)^{-1} \quad (13)$$

Действительно, уравнение (13) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка.

Проанализируем фазовый портрет динамической системы (12). Стационарные состояния определяются из условия обращения в нуль правых частей (12).

$$\frac{18\gamma(\gamma-1)}{(2+3\gamma)^2} z^2 + \frac{1}{z^{3\gamma}} = U, \quad z_1 = \frac{2}{(2+3\gamma)} z. \quad (14)$$

Это уравнение не имеет корней при $U < U_c$

$$U_c = \frac{1}{2} \frac{[12(\gamma-1)]^{3\gamma/(2+3\gamma)}}{(2+3\gamma)^{(3\gamma-2)/(2+3\gamma)}}, \quad (15)$$

имеет один корень при $U > U_c$ и $\gamma = 1$ и два корня при $U > U_c, \gamma > 1$. Явные выражения для этих стационарных точек можно найти, воспользовавшись малостью отличия показателя политропы от единицы $(\gamma - 1) \ll 1$, либо ограничившись рассмотрением $\gamma = 4/3$. В последнем случае (14) является кубическим уравнением $z^6 - 9/2 U z^4 + 9/2 = 0$, а его решения описываются следующими формулами, имеющими смысл при $U \geq U_c = 3^{-1/3} (0.694)$.

$$z_s^2 = 3^{2/3} U/U_c \times [1/2 + \cos(\alpha/3)], \quad (16)$$

$$z_n^2 = 3^{2/3} U/U_c \times [1/2 + \cos(\alpha/3 - 2\pi/3)];$$

$\cos \alpha = 1 - 2U_c^3/U^3$ (при $U = U_c \cos \alpha = -1, z_s^2 = z_n^2 = 3^{2/3}$).

Тип этих особых точек определяется из анализа линейной устойчивости и вычисления соответствующих показателей Ляпунова λ , которые выражаются в явном виде через $z_{s,n}$ – решения уравнения (14).

$$\lambda_{1,2} =$$

$$= -\frac{(8-3\gamma)}{2(2+3\gamma)} \pm \sqrt{\frac{(8-3\gamma)^2}{4(2+3\gamma)^2} + \frac{12(\gamma-1)}{(2+3\gamma)^2} - \frac{1}{z_{2s,2n}^{(2+3\gamma)}}} \quad (17)$$

Стационарные состояния появляются при $U = U_c$ (15) в точке с координатами $z_c = [(2+3\gamma)^2/12(\gamma-1)]^{1/(2+3\gamma)}, z_{1c} = 2/(2+3\gamma)z_c$ (для $\gamma = 4/3, z_{2c} = 3^{1/3}$). Показатели Ляпунова в этой точке равны $\lambda_{1,2} = (0, -(8-3\gamma)/(2+3\gamma))$. При $U > U_c$ уравнение (14) имеет два корня $z_n < z_c$ и $z_s > z_c$. Как следует из (17), стационарному состоянию z_n соответствует узел,

поскольку $\lambda_{1n,2n} < 0$, а стационарному состоянию z_c – седло, поскольку $\lambda_{1s} < 0$, а $\lambda_{2s} > 0$. При дальнейшем увеличении U узловая точка превращается в

фокус при $z_n = \left[\frac{25 + 18(\gamma-1) + 9(\gamma-1)^2}{4(2+3\gamma)^2} \right]^{-1/(2+3\gamma)}$

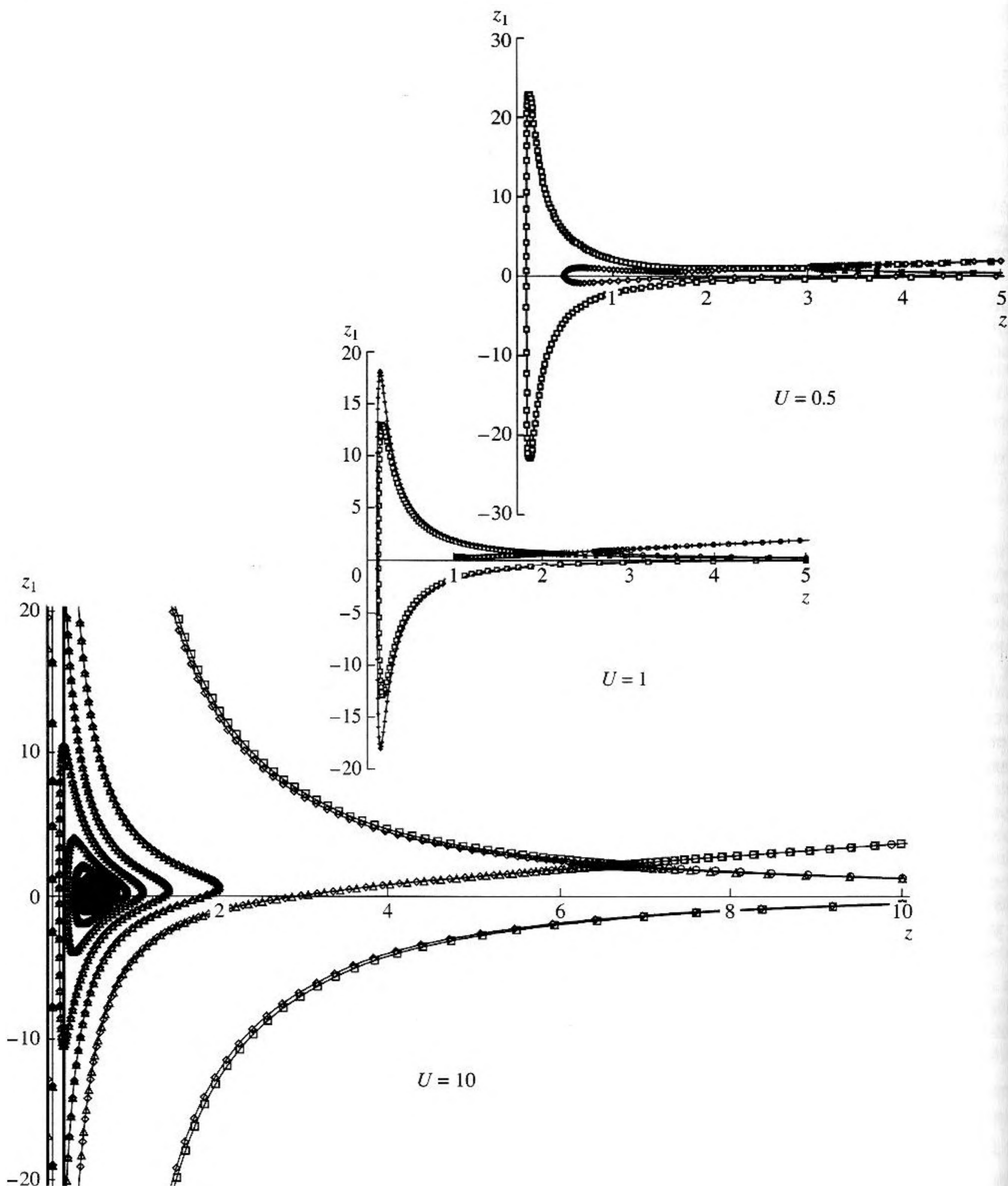
(для $\gamma = 4/3$ это происходит при $U = U_f \approx 1$). При $\gamma \rightarrow 1$, точка бифуркации, в которой происходит слияние узловой и седловой особенностей, стремится к бесконечности $z_c \rightarrow \infty, (U_c \rightarrow 0, z_n \rightarrow U^{1/3})$.

Для исследования поведения траекторий при удалении в ∞ используем отображение фазовой плоскости на сферу Пуанкаре (т.е. на сферу единичного радиуса, касающуюся плоскости (z, z_1) в начале координат) [8]. Каждой точке (z, z_1) плоскости ставится в соответствие две точки сферы, лежащие на прямой, проходящей через центр сферы и эту точку плоскости. На экватор отображается бесконечно удаленная точка плоскости. Интегральные кривые плоскости перейдут при этом в соответствующие кривые сферы, причем седла, узлы и фокусы сохраняют свой вид. Однако на сфере появятся новые особые точки, лежащие на экваторе. Преобразование $z = (1/s); z_1 = (m/s)$ позволяет изучать особые точки, лежащие на экваторе сферы Пуанкаре, за исключением точек, которые соответствуют “концам” оси z_1 (однако, как показывает анализ, у рассматриваемой системы в этой области фазового пространства особых точек нет).

На экваторе располагаются две особые точки: неустойчивый ($s = 0, m = 0$) и устойчивый ($s = 0, m = 5/2$) узлы. Все удаленные от начала координат траектории стремятся к этому состоянию равновесия в определенных направлениях, и этими направлениями являются ось m , вдоль которой стремятся только две траектории, и ось s , вдоль которой к узлу стремится бесконечное множество полутраекторий. На исходной фазовой плоскости (z, z_1) угловой коэффициент направления, в котором траектории стремятся к простому состоянию равновесия, равен $(2/5)$. При обращении времени, траектории будут стремиться к неустойчивому узлу вдоль направления, совпадающего с осью z .

Для иллюстрации представленного выше анализа на рисунке приведены результаты расчета поведения траекторий для характерных значений амплитудного параметра $U = 0.5, 1$ и 10 и показателя политропы $\gamma = 4/3$. Выбор именно этих значений призван охарактеризовать поведение траекторий в типичных ситуациях:

а) при малом амплитудном параметре $U < 1$, но в то же время достаточно близко к порогу $U_c = 0.694$, чтобы показать каким образом возникают особенности ($U = 0.5$);



Фазовые портреты динамической системы (12) для различных значений определяющего параметра U : 0.5, 1, 10.

б) при средних значениях $U \sim 1$, но так чтобы проиллюстрировать изменение характера устойчивой особой точки (узел-фокус) ($U=1$);

в) при больших значениях U ($U=10$).

При $U=0.5$ у системы нет особых точек в конечной области фазового пространства. Траектории приходят из бесконечно удаленной неустойчивой узловой точки вдоль направления, соответствующего оси z , и уходят на ∞ при $w \rightarrow \infty$

($\bar{\tau} \rightarrow \infty$) вдоль направления $z_1/z = 2/5$. На графике изображены три траектории для различных начальных условий, выбранных так, чтобы проиллюстрировать зарождение особой точки. Движение вдоль направления $z_1/z = 2/5$ отвечает известному закону Рэлея (2/5) расширения пустого пузырька.

Заметим, что при $U \ll 1$ решение уравнения Рэлея может быть получено в явном виде. Действительно, поскольку в ударной волне $P_m \geq P_0$ ($u_1(0) \geq 1$), условие $U \ll 1$ ($u_1(0)\tau_0^{6\gamma/(2+3\gamma)} \ll 1$) может выполняться только для коротких импульсов $t_0\Omega_0 \ll 1$ ($\tau_0 \ll 1$) и для не очень интенсивной волны, изменяющаяся внешняя сила может компенсироваться только инерционным членом. Изменение радиуса, так же как и величина скорости в течение действия импульса будут малы. Для покоящегося в момент вступления импульса пузырька $\dot{u}(\tau=0) = 0$, $u(\tau=0) = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{1}{3\gamma} \left[1 - \frac{U}{(\tau + \tau_0)^{6\gamma/(2+3\gamma)}} \right], \\ \dot{u}(\tau) &= \tau/3\gamma - \frac{U(2+3\gamma)}{3\gamma(3\gamma-2)} \times \\ &\times \left[\left(\frac{1}{\tau_0} \right)^{(3\gamma-2)/(3\gamma+2)} - \left(\frac{1}{\tau + \tau_0} \right)^{(3\gamma-2)/(3\gamma+2)} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Скорость сжатия пузырька достигает максимального значения u_{\max} в момент времени $\tau_* = U^{(2+3\gamma)/6\gamma} - \tau_0 = \tau_0[u_1(0)^{(2+3\gamma)/6\gamma} - 1]$ при $\gamma = 4/3$ $\tau_* = \tau_0[u_1(0)^{3/4} - 1]$ и равняется

$$\begin{aligned} \dot{u}_{\max} &= \frac{\tau_0}{3\gamma} \left[u_1(0)^{(2+3\gamma)/6\gamma} - 1 - \right. \\ &\left. - \frac{(2+3\gamma)}{(3\gamma-2)} \left(1 - \frac{1}{u_1(0)^{(3\gamma-2)/6\gamma}} \right) \right]; \end{aligned} \quad (19)$$

при $u_1(0) \sim 1$ $u_{\max} \sim -\tau_0$, а при $u_1(0) \gg 1$ $u_{\max} \sim -\tau_0 u_1(0)$.

Область применимости данного приближенного описания уже, чем следует из условия $U \ll 1$, а именно скорость стенки пузырька мала при $1 \leq u_1(0) \ll (1/\tau_0)$, но имеется еще подобласть $(1/\tau_0) \leq u_1(0) \ll (1/\tau_0)^{6\gamma/(2+3\gamma)}$, где скорость велика.

В момент времени $\tau = \tau_{**}$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{**}}{3\gamma} &= \\ &= \frac{U(2+3\gamma)}{3\gamma(3\gamma-2)} \left(\frac{1}{\tau_0^{(3\gamma-2)/(2+3\gamma)}} - \frac{1}{(\tau_{**} + \tau_0)^{(3\gamma-2)/(2+3\gamma)}} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

($\tau_{**} \sim \tau_0$ при $u_1(0) \sim 1$ и $\tau_{**} \approx \tau_0 u_1(0) (2+3\gamma)/(3\gamma-2)$ при $u_1(0) \gg 1$) пузырек достигает минимального радиуса u_{\min}

$$\begin{aligned} u_{\min} - 1 &= \frac{\tau_{**}^2}{6\gamma} - \frac{U(2+3\gamma)}{3\gamma(3\gamma-2)} \left[\frac{\tau_{**}}{\tau_0^{(3\gamma-2)/(2+3\gamma)}} - \right. \\ &\left. - \frac{(3\gamma+2)}{4} \left((\tau_{**} + \tau_0)^{4/(2+3\gamma)} - \tau_0^{4/(2+3\gamma)} \right) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

равного $u_{\min} \approx 1 - \tau_0^2 u_0^2(0) 2/3\gamma[(2+3\gamma)/(3\gamma-2)^2]$ при $u_1(0) \gg 1$ и $u_{\min} \sim (1 - \tau_0^2)$ при $u_1(0) \sim 1$.

На временах значительно превышающих характерное время спадания импульса $\tau \gg \tau_0$ поведение траекторий будет определяться интегралом энергии (9) вычисленным при $u_1 = 0$. Наконец при $\tau \gg 1$, когда $u \gg 1$ и сжимаемостью газа можно пренебречь пузырек будет расширяться по Рэлеевскому закону $u \sim \tau^{2/5}$, чему, как уже отмечалось, соответствует движение по прямой $z_1 = (2/5)z$ на рисунке.

Отметим, что зависимость максимальной скорости \dot{u}_{\max} , минимального радиуса $u_{\min} = R_{\min}/R_0$ и времени схлопывания τ_{**} от параметров акустического импульса такая же как и для детально изученного случая экспоненциального закона спадания $P(t) = P_m \exp(-t/t_0)$ [9, 10], что не удивительно, поскольку для коротких импульсов эффект определяется интегральными характеристиками ударной волны.

На фазовом портрете, полученном при $U = 1$, появляются две особые точки: узел и седло, расположенные недалеко друг от друга. Начальные значения трех рассчитанных траекторий выбирались таким образом, чтобы декорировать сепаратрисы седловой точки и выделить область "притяжения" узловой точки. В этой области начальных значений интенсивность ударной волны и ее длительности оказывается достаточными, чтобы "захватить" пузырек и управлять его динамикой.

Пульсации пузырька под действием интенсивной ударной волны ($U \gg 1$) иллюстрирует фазовый портрет на рисунке при $U = 10$. Отметим, что в этом случае особенности достаточно разнесены. Три расчетные траектории декорируют сепаратрисы седловой точки и область притяжения фокуса. В этой области значений параметра U схлопывание пузырька ($z \ll 1$) происходит столь интенсивно ($|z_1| \gg 1$), что траектории не помещаются в масштабе рисунка и отслеживать ветви одной траектории следует с помощью маркеров.

Этот случай также допускает аналитическое описание. При $\tau_0 \gg 1$ внешнее воздействие на пузырек меняется медленно, что приводит к существованию адиабатического инварианта [11, 4].

Отметим, что исходное уравнение Рэля (2) может быть записано в гамильтоновой форме

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u}, \quad p = u^3 \dot{u},$$

$$H = \frac{u^3 \dot{u}^2}{2} + \frac{1}{3\gamma} \left[\frac{1}{3(\gamma-1)u^{3(\gamma-1)}} + \frac{u^3 u_1(\tau)}{3} \right]. \quad (22)$$

Однако более удобными для анализа являются введенные выше переменные $z(w) = u(\tilde{\tau}) \tilde{\tau}^{-2/(2+3\gamma)}$, $w = \ln \tilde{\tau}$. Совершая каноническое преобразование с производящей функцией $\Phi(u, P, \tilde{\tau}) = z(u)P$,

$$p = u^3 \dot{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad z = \frac{\partial \Phi}{\partial P}, \quad H'(\tilde{\tau}) = H(\tilde{\tau}) + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\tau}}, \quad (23)$$

находим выражения для канонического импульса P и функции Гамильтона H' в новых переменных

$$P = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)_{P=\text{const}} \right]^{-1} p = \tilde{\tau}^{2/(2+3\gamma)} p,$$

$$\tilde{H}(\tilde{\tau}) = H(\tilde{\tau}) - \frac{2}{2+3\gamma} \frac{Pz}{\tilde{\tau}}.$$

Переходя к новой временной переменной w , получаем окончательно

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dw} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z},$$

$$\lambda_{ad}(w) \equiv \exp[4w/(2+3\gamma)]$$

$$\tilde{H}(z, P, w) = H\tilde{\tau} = \frac{P^2}{2z^3 \lambda_{ad}(w)} + \quad (24)$$

$$+ \frac{\lambda_{ad}(w)}{3\gamma} \left[\frac{1}{3(\gamma-1)z} + \frac{z^3 U}{3} \right] - \frac{2}{2+3\gamma} Pz.$$

Поскольку явная зависимость гамильтониана \tilde{H} от "времени" w является медленной по сравнению с периодом собственных пульсаций, существует адиабатический инвариант [11]

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint P dz,$$

описываемый интегралом вдоль траектории динамической системы (24) при заданных значениях "энергии" $\tilde{E} = \tilde{H}(z, P, \lambda_{ad})$ и адиабатического параметра λ_{ad} . Подчеркнем, что прямой физический смысл энергии имеет только фиксированное значение гамильтониана (22). При совершении канонического преобразования (23) гамильтониан меняется, и его фиксированное значение уже не будет иметь прямого смысла энергии, однако мы сохраним этот термин, помещая его в кавыч-

ки, и используя его для обозначения фиксированного значения гамильтониана.

Чтобы избежать громоздких показателей степеней, выполним вычисления для $\gamma = 4/3$. В этом случае

$$I = \frac{\lambda_{ad}}{\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sqrt{\frac{z^2}{9} + \frac{2\tilde{E}}{\lambda_{ad}z^3} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z^4} + \frac{U}{3} \right]} z^3 dz, \quad (25)$$

где z_{\max} и z_{\min} отвечают точкам остановки $dz/dw = 0$. При этих значениях z обращается в нуль подкоренное выражение в формуле (25). Период перемещения по данной траектории описывается выражением

$$W = 2 \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{z^2}{9} + \frac{2\tilde{E}}{\lambda_{ad}z^3} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z^4} + \frac{U}{3} \right]}}. \quad (26)$$

В том случае, когда пузырек возбуждается ударной волной в момент времени $\tau = 0$ $w_0 = \ln \tau_0$ из положения равновесия $u = 1$, $\dot{u} = 0$ $z(w_0) = \tau_0^{-1/3} = \lambda_{ad}(w_0)^{-1/2}$, $P = 0$, его "энергия" будет равна $\tilde{E}(w_0) = \frac{\lambda_{ad}(w_0)}{4} \left[1 + \frac{u_1(0)}{3} \right]$, а адиабатический инвариант (25), вычисленный в главном порядке по $u_1 \gg 1$ равен

$$I = \frac{\sqrt{u_1(0)}}{\pi\sqrt{6}} \int_0^1 du u \sqrt{u(1-u^3)} \approx 0.036 \sqrt{u_1(0)}. \quad (27)$$

Поскольку величина адиабатического инварианта не меняется со "временем" w , приравняв левую часть выражения (25) к его начальному значению (27), получаем уравнение, задающее в неявном виде зависимость "энергии" $\tilde{E} = \tilde{E}(w)$ от "времени" w .

Вычисление интеграла (25) существенно упрощается в асимптотическом пределе $w \gg w_0$ $z(w) \rightarrow z_n + \Delta z(w)$, $|\Delta z(w)| \ll z_n$, когда динамическая траектория пузырька приближается к фокусу системы (12). При этом $z = z_n + \Delta z$, $|\Delta z| \ll z_n$, $P = P_n(w) + \Delta P$, где P_n определяется из условия

$$\frac{dz}{dw} = \frac{P}{\lambda(w)z^3} - \frac{z}{3} = 0, \quad P_n(w) = \lambda(w) \frac{z_n^4}{3},$$

а ΔP удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Delta P}{dw} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} - \frac{d\lambda(w)}{dw} \frac{z_n^4}{3} = -\frac{\partial}{\partial \Delta z} \left(\tilde{H} + \frac{2}{9} \lambda(w) z_n^4 \Delta z \right).$$

Переход от переменной P к ΔP есть по существу каноническое преобразование с производящей функцией

$$\Phi_1(z, \Delta P, w) = P(z - z_n) = P_n(w) + \Delta P \Delta z, \quad (28a)$$

$$P = \partial \Phi_1 / \partial z, \quad \Delta z = \partial \Phi_1 / \partial \Delta P,$$

под действием которого преобразуется и функция Гамильтона

$$\tilde{H}' = \tilde{H} + \partial \Phi_1 / \partial w = \tilde{H} + \Delta z \partial P_n(w) / \partial w = \quad (28b)$$

$$= \tilde{H} + 2/9 \lambda(w) z_n^4 \Delta z.$$

Линеаризованному вблизи фокуса уравнению (12) отвечает гамильтониан \tilde{H}' , разложенный с точностью до квадратичных членов по Δz и ΔP .

$$\tilde{H}' = \lambda(w) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{z_n} - \frac{z_n^5}{9} \right) + \frac{\Delta P^2}{2 \lambda^2(w) z_n^3} - \right. \quad (29)$$

$$\left. - \frac{4 \Delta P \Delta z}{3 \pi(w)} + \left(\frac{7}{9} z_n^3 + \frac{1}{2} \frac{1}{z_n^3} \right) \frac{\Delta z^2}{2} \right].$$

В этом выражении возможны упрощения. Поскольку $U \gg 1$ и $z_n \ll 1$, то в главном порядке

$$\left(\frac{\tilde{H}'}{\lambda(w)} \right) = \frac{1}{3 z_n} + \frac{\Delta P^2}{2 \lambda(w) z_n^3} + \frac{\Delta z^2}{4 z_n^3}. \quad (30)$$

Вычисление адиабатического инварианта теперь осуществляется элементарно. Выражая из формулы (30) ΔP как функцию Δz при постоянных значениях энергии \tilde{E}' и адиабатического параметра λ

$$\Delta P = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda \sqrt{4 z_n^3 \left(\frac{\tilde{E}' - \tilde{E}_n}{\lambda} \right) - \Delta z^2}, \quad \tilde{E}_n \equiv \lambda \frac{1}{3 z_n}, \quad (31)$$

находим

$$I = \frac{1}{\pi} \oint (P_n + \Delta P) d(\Delta z) =$$

$$= \frac{2}{\pi \sqrt{2}} \lambda \int_{\Delta z_{\min}}^{\Delta z_{\max}} \sqrt{4 z_n^3 \left(\frac{\tilde{E}' - \tilde{E}_n}{\lambda} \right) - \Delta z^2} d(\Delta z) = \quad (32)$$

$$= 4 \sqrt{2} z_n^3 (\tilde{E}' - \tilde{E}_n).$$

Воспользовавшись инвариантностью адиабатического инварианта, и приравнявая (32) значению I в начальный момент времени, определяемому выражением (27), находим эволюцию во времени

“энергии” \tilde{E}' и ее зависимость от амплитуды $u_1(0)$ и времени спада τ_0 ударной волны

$$\tilde{E}' = \tilde{E}_n(w) + \frac{I}{4 \sqrt{2} z_n^3} = \frac{\exp(2w/3)}{3} U^{1/4} + \frac{I}{4 \sqrt{2}} U^{3/4} = \quad (33)$$

$$= \frac{\tau_0 u_1(0)^{1/4}}{3} \left[\left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{2/3} + 0.019 u_1(0) \right].$$

Истинная энергия пульсаций пузырька (22), усредненная по периоду $2\pi / (\text{Im} \lambda)$, где λ определяется выражением (17), получается из (33) делением \tilde{E}' на $\bar{\tau}$, что следует из формул канонических преобразований (23), (28a), (28b).

В установившемся режиме, описываемом уравнением (33), изменение радиуса пузырька происходит в виде наложения двух движений

$$R(t) = R_0 \left(\frac{P_0}{P_m} \right)^{1/4} \left(\frac{t + t_0}{t_0} \right)^{1/3} + \quad (34)$$

$$+ 0.01 R_0 \left(\frac{P_m}{P_0} \right) (t_0 \Omega_0)^{1/3} \times$$

$$\times \sin \left\{ \left(\frac{P_m}{P_0} \right)^{3/4} t_0 \Omega_0 \ln[\Omega_0 t + t_0] + \alpha \right\},$$

одно из которых является степенным ростом с показателем, существенно отличающимся от рэлеевского закона. Второе движение – осцилляции с постоянной амплитудой и логарифмически растущим периодом. Постоянная фаза α не может быть вычислена в явном виде в рамках данного подхода.

Таким образом, оказывается возможным осуществить достаточно полное аналитическое описание нелинейной динамики пузырька под действием внешнего возмущения в условиях, обеспечивающих масштабную инвариантность уравнения Рэлея.

Данное обстоятельство позволяет использовать найденный класс решений в качестве модели при описании кавитационных явлений, распространения ударных волн в жидкостях с фазовыми включениями, сонолюминесценции.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-02-9690).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А. Симметрия обобщенного уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 5. С. 628–633.
2. Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А. Некоторые свойства интенсивных звуковых пучков, описываемых обобщенным уравнением Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 6. С. 808–813.

3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. II. М.: Наука, 1976. 576 с.
4. *Smereka S., Binir B., Banerjee S.* Regular and chaotic bubble oscillations in periodically driven pressure fields // *Phys. Fluids*. 1987. V. 30. № 11. P. 3342–3350.
5. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
6. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
7. *Олвер П.* Приложения группы Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
8. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.
9. *Солоухин Р.И.* О пульсации пузырьков газа в несжимаемой жидкости // *Тр. Учен. совета по народнохозяйственному использованию взрыва*. Новосибирск, 1961. Т. 18. С. 27–29.
10. *Кедринский В.К.* Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: СО РАН, 2000. 435 с.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.

Symmetry of the Rayleigh Equation and the Analysis of Nonlinear Gas Bubble Fluctuations in Liquid

A. O. Maksimov

*Pacific Oceanological Institute, Far East Division, Russian Academy of Sciences,
ul. Baltiiskaya 43, Vladivostok, 690041 Russia
e-mail: pacific@online.marine.su*

Abstract—The Rayleigh equation describing nonlinear fluctuations of a gas bubble in a liquid is analyzed using the theory of groups. The group of scale transformations is calculated and then used as the basis for constructing the solutions to the Rayleigh equation. The analytical description of the essentially nonlinear dynamics of a bubble allows one to use the aforementioned solutions as a model for analyzing such phenomena as cavitation, shock wave propagation in liquids with phase inclusions, and sonoluminescence.