

УДК 534.232, 534.26

## АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ВОГНУТОЙ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ УЧЕТЕ ДИФРАКЦИИ НА НЕЙ

© 2002 г. О. А. Сапожников, Т. В. Синоло

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

119899 Москва, Воробьевы горы

E-mail: oleg@acs366b.phys.msu.su

Поступила в редакцию 30.01.2002 г.

Сильно фокусированные ультразвуковые пучки широко используются в таких современных приложениях, как неразрушающий контроль и ультразвуковая диагностика и хирургия. Важной задачей при этом является теоретическое предсказание соответствующих акустических полей. Для достижения фокусировки обычно используются пьезокерамические вогнутые источники, состоящие из одного или нескольких излучающих элементов. Расчет полей таких источников обычно проводится на основе широко известного интеграла Рэлея, не учитывающего явление многократного перераспределения поля на неплоской излучающей поверхности. Однако при больших углах фокусировки роль этого эффекта может быть существенной. В настоящей работе представляются результаты численного моделирования акустического поля аксиально-симметричного вогнутого излучателя методом сращиваемых разложений, модифицированным для случая большого волнового размера источника и сильной фокусировки (почти вплоть до углов схождения  $180^\circ$ ). Проводится сравнение результатов с расчетами, выполненными на основе интеграла Рэлея. Рассматривается пространственная структура дополнительного акустического поля, обусловленного эффектом дифракции на краях и многократным переотражением на самой излучающей поверхности. Показано, что влияние вогнутости излучающей поверхности на акустическое поле фокусирующего источника может быть существенным не только вблизи источника, но и на оси пучка, вблизи фокуса, а также в области, куда после отражения от вогнутой поверхности попадают лучи, испущенные с края излучателя.

### ВВЕДЕНИЕ

Последнее время в медицинских приложениях ультразвука и неразрушающем контроле все чаще используются сильно фокусированные акустические пучки. В связи с этим большое внимание направлено на теоретическое описание акустического поля соответствующих источников, работающих как в непрерывном [1, 2], так и в импульсном режимах [3, 4, 5]. Обычно фокусировка достигается использованием пьезокерамических вогнутых преобразователей, реже – комбинацией плоского источника и акустической линзы. В последнее время стали использоваться также фазированные решетки [6]. При больших углах фокусировки теория сильно осложняется эффектом дифракции на искривленной поверхности излучателя или линзы. Однако в большинстве случаев для описания поля используют интеграл Рэлея, являющийся точным решением соответствующей дифракционной задачи в случае плоской излучающей поверхности [7]. Такое представление эквивалентно принципу Гюйгенса-Френеля, рассматривающему поле протяженного излучателя как интерференцию сферических волн, создаваемых элементарными точечными источниками, расположенными на излучающей поверхности. Такое представление не учитывает вторичные

волны, возникающие в результате многократных переотражений от искривленной поверхности излучателя. Для адекватного решения задачи с учетом дифракции на вогнутой поверхности можно использовать метод сращиваемых разложений, предложенный Кулувры [8]. Однако в своем первоначальном виде, описанном в вышеупомянутой работе [8], он имеет ограничения на величины максимального размера апертуры и угла фокусировки излучателя. В настоящей работе представляются модификации данного метода, позволяющие сильно расширить область его применения [9].

### ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим геометрию задачи, схематически представленную на рис. 1. Пусть осесимметричная сферическая чаша  $\Gamma_S$ , вмонтированная в бесконечный жесткий экран  $\Gamma_B$ , радиально колеблется по закону  $\exp(-i\omega t)$ . Обозначим буквами  $a$ ,  $f$  и  $F$  соответственно радиус апертуры, радиус кривизны и центр кривизны. Точку наблюдения  $M$  будем характеризовать сферическими координатами  $r$  и  $\theta$  с началом координат  $O$  в точке пересечения плоскости экрана и оси симметрии источника. Акустическое поле описывается уравнением Гельмгольца  $\Delta p + k^2 p = 0$  с учетом условия

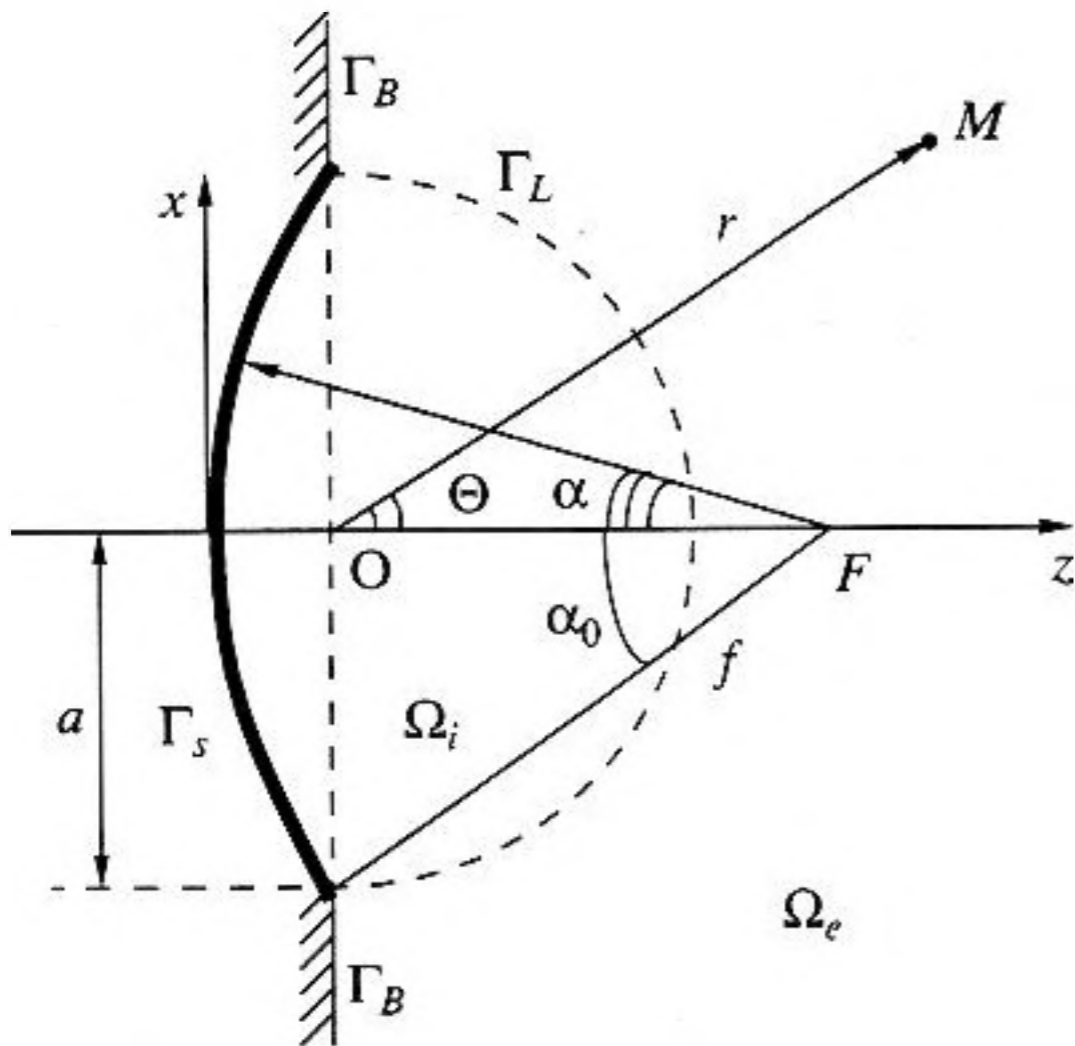


Рис. 1. Геометрия задачи.

излучения Зоммерфельда на бесконечности и граничных условий  $\partial p/\partial n = ik\rho_0 c_0 u$  на  $\Gamma_S$  и  $\partial p/\partial n = 0$  на  $\Gamma_B$ . Здесь  $p$  – амплитуда акустического давления,  $k = \omega/c_0$  – волновое число,  $\omega$  – круговая частота,  $\rho_0$  – плотность среды и  $c_0$  – скорость звука в среде,  $u$  – амплитуда нормальной компоненты скорости излучающей поверхности, нормаль направлена в сторону среды.

Введем дополнительную полусферу  $\Gamma_L$  радиуса  $a$  с центром в точке  $O$ . Эта поверхность отделяет внутреннюю область,  $\Omega_i$ , от внешней,  $\Omega_e$ . Теперь обозначим акустическое поле внутри полученных областей через  $p_i$  и  $p_e$  соответственно. Тогда исходная задача разбивается на две:

$$\Delta p_i + k^2 p_i = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_S} = ik\rho_0 c_0 u, \quad (1b)$$

$$\Delta p_e + k^2 p_e = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial n} \Big|_{\Gamma_B} = 0. \quad (2b)$$

Эти две задачи связаны между собой условиями непрерывности давления и нормальной скорости на разделяющей поверхности  $\Gamma_L$ :

$$p_i|_{\Gamma_L} = p_e|_{\Gamma_L}, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_L} = \frac{\partial p_e}{\partial n} \Big|_{\Gamma_L}. \quad (3b)$$

Следуя работе [8], представим общее решение уравнений (1) и (2) в виде разложений по сферическим функциям. Принимая во внимание конеч-

ность величины акустического давления в точке  $O$  и условия излучения Зоммерфельда, получаем:

$$p_i = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n P_n(\cos\theta) j_n(kr), \quad (4)$$

$$p_e = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n P_n(\cos\theta) h_n^{(1)}(kr), \quad (5)$$

где  $\xi_n$  и  $\eta_n$  – коэффициенты разложений, определяемые граничными условиями (1), (2), и условиями непрерывности (3),  $P_n$  – полиномы Лежандра,  $j_n, h_n^{(1)} = j_n + iy_n$  и  $y_n$  – сферические функции Бесселя, Ханкеля первого рода и Неймана порядка  $n$  соответственно.

Отметим, что правомочность использования во внутренней области  $\Omega_i$  разложения (4) неочевидна, поскольку ограничивающая поверхность не является сферой и решение вида (4), вообще говоря, может не удовлетворить граничному условию. Обнадеживающим является тот факт, что в предельном случае нулевой кривизны рассматриваемый подход дает прекрасное совпадение с имеющимся точным решением [8]. В более общем случае возможность использования решения в виде (4) требует специального теоретического исследования, что, само по себе, является непростой задачей [10]. Однако существует и прямой способ проверки: если при численном моделировании после нахождения коэффициентов  $\xi_n$  разложение (4) с высокой точностью восстанавливает граничное условие, то, согласно теореме существования и единственности для уравнения Гельмгольца, найденное разложение является искомым решением задачи. Забегая вперед, отметим, что в полученных нами решениях граничное условие действительно восстанавливалось с высокой точностью (см. рис. 4).

Из граничного условия (2b) следует, что все нечетные коэффициенты в (5) равны нулю, таким образом,

$$p_e = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n P_{2n}(\cos\theta) h_{2n}^{(1)}(kr). \quad (6)$$

Условия сшивки (3) дают связь между коэффициентами внешнего и внутреннего разложения, т.е. величины  $\eta_n$  выражаются через  $\xi_n$ . Кроме того, все четные коэффициенты внутреннего разложения  $\xi_{2n}$  представляются в виде бесконечной комбинации нечетных  $\xi_{2n+1}$ . После использования граничного условия в различных точках излучающей поверхности получается бесконечная система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения  $\xi_n$ . За более детальным описанием читатель может обратиться к оригинальной статье [8].

Чтобы получить конечную систему уравнений, при расчетах приходится ограничивать количество членов в разложениях (4) и (6), удерживая только первые  $NB$  членов внутреннего разложения и  $NA$  – внешнего, надеясь на достаточно быструю сходимость соответствующих рядов. При этом  $NA$  уравнений относительно  $NB$  неизвестных ( $NB > NA$ ) получаются из условий сшивки, а недостающие  $NP = NB - NA$  уравнений выписываются из граничного условия, дискретизированного в соответствующем количестве точек излучающей поверхности.

Требуемые функции Бесселя и Неймана могут быть рассчитаны с использованием рекуррентных соотношений (см. Приложение). Задача в итоге сводится к численному решению конечной системы линейных уравнений, что может быть сделано стандартными численными методами.

Известно, что функции Бесселя и Неймана высоких порядков имеют следующие асимптотики [11]:

$$j_n(\zeta) \sim [4\zeta(n + 1/2)]^{-1/2} [e\zeta/2(n + 1/2)]^{n+1/2}, \quad (7a)$$

$$y_n(\zeta) \sim -[\zeta(n + 1/2)]^{-1/2} [e\zeta/2(n + 1/2)]^{-(n+1/2)}. \quad (7b)$$

Как видно, по мере увеличения порядка  $n > e\zeta/2$ , особенно при больших  $\zeta$  (в рассматриваемой задаче  $\zeta \sim ka$ ), функции Бесселя становятся очень малыми, а функции Неймана – очень большими. В связи с этим снижается точность решения системы линейных уравнений, поскольку базисные функции оказываются существенно разных порядков по амплитуде, а следовательно, некоторая доля членов ряда имеет вид произведения очень большой величины на очень малую и, как следствие, рассчитывается недостаточно точно. Чем выше порядок используемых функций, тем сильнее по амплитуде они отличаются от примерно равной единице амплитуды функций низких порядков. Поэтому слишком большое значение величины  $NB$  приводит к значительным ошибкам и делает невозможным численное моделирование. С другой стороны, метод предполагает использование сферических функций Бесселя и Неймана вплоть до очень высоких порядков, чтобы ошибка вычислений, связанная с обрывом рядов (4)–(6), была мала. Таким образом, существует некоторое оптимальное значение  $NB$ . Расчеты показали, что неплохие результаты получаются при  $NB \approx (2-3)ka$ . Отсюда видно, что применимость метода затруднена для излучателей с большим волновым размером  $ka$ . Действительно, при этом увеличивается максимальный порядок используемых функций Бесселя и Неймана и, вследствие асимптотических свойств (7), значения функций достигают компьютерного нуля или бесконечности при номерах, меньших требуемого значения  $(2-3)ka$ .

Чтобы обойти указанную трудность, в разложениях (4) и (6) использовались специальным образом перенормированные функции Бесселя и Ханкеля, близкие по амплитуде к единице:

$$p_i = \sum_{n=0}^{NB} \xi_n P_n(\cos\theta) \bar{j}_n(kr), \quad (8)$$

$$p_e = \sum_{n=0}^{NA} \eta_n P_{2n}(\cos\theta) \bar{h}_{2n}^{(1)}(kr). \quad (9)$$

Здесь для упрощения записи для коэффициентов разложений снова употребляются обозначения  $\xi_n$  и  $\eta_n$ , хотя их значения отличаются от значений соответствующих коэффициентов в формулах (4) и (6). Новые базисные функции получаются в результате следующей нормировки исходных функций:

$$\bar{j}_n(\zeta) = j_n(\zeta) \exp(-\epsilon_n), \quad (10)$$

$$\bar{y}_n(\zeta) = y_n(\zeta) \exp(\epsilon_n), \quad (11)$$

$$\bar{h}_n^{(1)}(\zeta) = \bar{j}_n(\zeta) \exp(-2\epsilon_n) + i\bar{y}_n(\zeta). \quad (12)$$

Здесь нормировочные экспоненциальные показатели  $\epsilon_n$  не зависят от  $\zeta$ , а их величина заметно меньше компьютерной бесконечности. Расчет коэффициентов  $\epsilon_n$  и нормированных функций пояснен в Приложении Б.

Использование разложений (8) и (9) позволяет существенно расширить область задания значений радиуса апертуры ( $ka \sim 10^3$ ), не выходя за рамки машинного нуля или машинной бесконечности, существующих для выбранной точности вычислений.

Другое усовершенствование метода состояло в использовании неравномерного пространственного распределения точек, в которых задавалась нормальная скорость излучающей поверхности  $\Gamma_s$ . Как упоминалось выше, часть уравнений в решаемой системе определяется граничными условиями в  $NP$  точках поверхности  $\Gamma_s$ . Численное исследование показало, что характер распределения точек вдоль излучающей поверхности сильно влияет на точность восстановления граничных условий, а, следовательно, и на точность самого метода. Более точные результаты получились при использовании, вместо эквидистантного по углу распределения точек дискретизации (рис. 2а), распределения с более крупными шагами дискретизации вдали от края излучателя и мелкими – вблизи края (рис. 2б). Такое неравномерное распределение позволяет лучше описать резкое изменение акустического поля вблизи края источника.

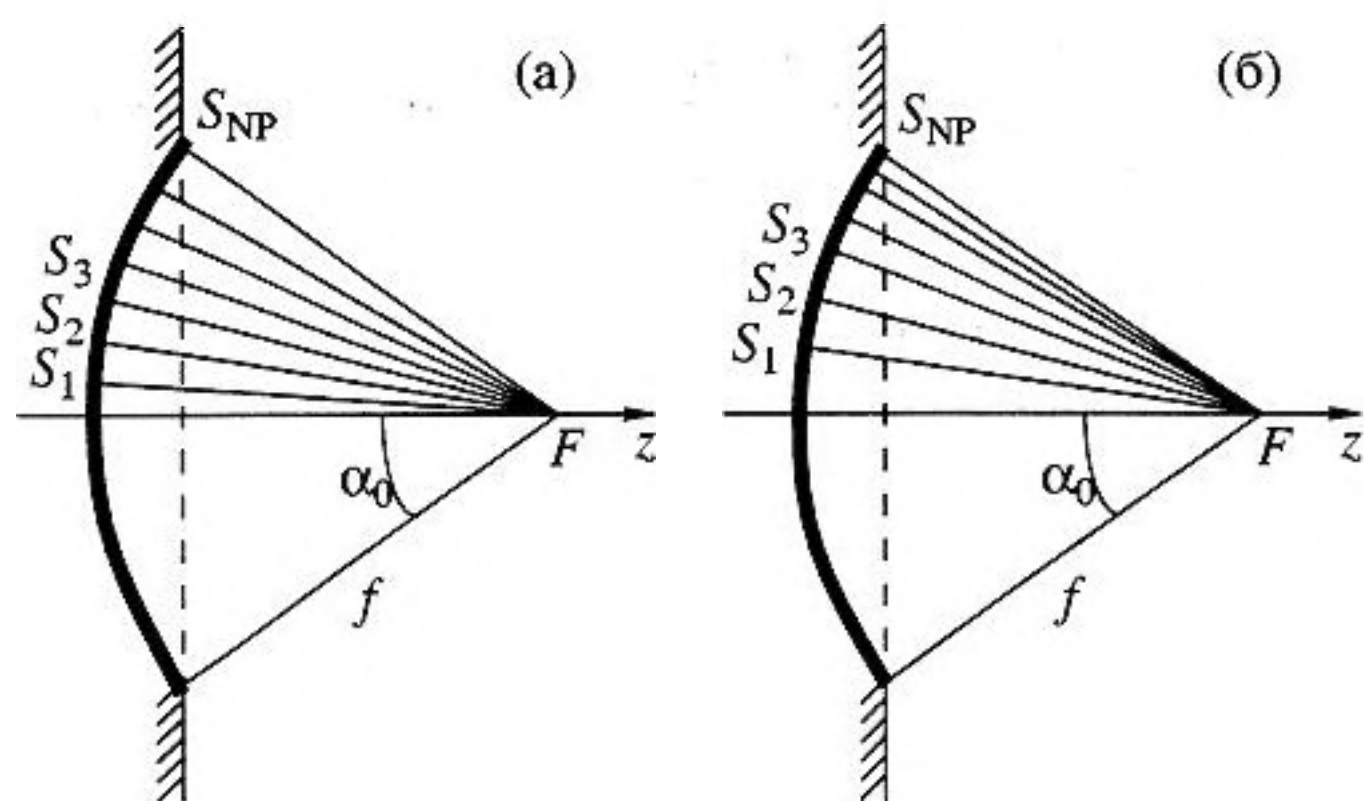


Рис. 2. Иллюстрация равномерного (а) и неравномерного (б) распределения точек, в которых задается амплитуда нормальной скорости излучающей поверхности.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В качестве примера расчета поля фокусирующего излучателя большой апертуры на рис. 3 представлена зависимость амплитуды акустического давления от расстояния вдоль оси пучка для излучателя апертуры  $ka = 1000$ , при угле фокусировки  $\alpha_0 = 60^\circ$  и равномерном распределении скорости вдоль излучающей поверхности:

$$\begin{cases} u = u_0, & \alpha < \alpha_0, \\ u = 0, & \alpha \geq \alpha_0. \end{cases} \quad (13)$$

Под углом фокусировки здесь и ниже понимается полуугол схождения (см. рис. 1). Сплошная линия на рис. 3 соответствует вычислениям, проведенным с помощью модифицированного метода сра-

щиваемых разложений, а пунктирная – расчетам, выполненным на основе интеграла Рэлея

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \int_{\Gamma_S} u(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'. \quad (14)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения,  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор элемента  $dS'$  излучающей поверхности  $\Gamma_S$ . Хорошо заметны значительные отличия между этими двумя теоретическими кривыми в области вблизи излучающей поверхности, которые можно объяснить дифракцией на поверхности источника или многократными переотражениями элементарных волн искривленной поверхностью излучателя.

Как уже отмечалось, критерием проверки правильности решения является точность восстановления граничных условий, поскольку использованный вид разложений по сферическим гармоникам (8)–(9), при любом количестве членов ряда и при любых значениях коэффициентов разложения  $\xi_n$  и  $\eta_n$ , является частным решением уравнения Гельмгольца. На рис. 4 представлены результаты, демонстрирующие высокую точность восстановления граничного условия (1б) и условия сшивки (3б) для нормальной компоненты колебательной скорости. В рассматриваемом случае граничное условие (1б) имело вид (13), радиус апертуры излучателя составлял  $ka = 200$ , а угол фокусировки  $\alpha_0 = 80^\circ$ . Распределение скорости приведено в виде её зависимости от угла сферической системы координат  $\theta$  (рис. 1), при этом на интервале  $[0^\circ, 90^\circ]$  кривая воспроизводит условие (3б), а на интервале  $(90^\circ, 180^\circ]$  – условие (1б). Отметим, что в приведенном случае нормальная компонента скорости излучающей поверхности восстанавливается с точностью не хуже 0.03%, а

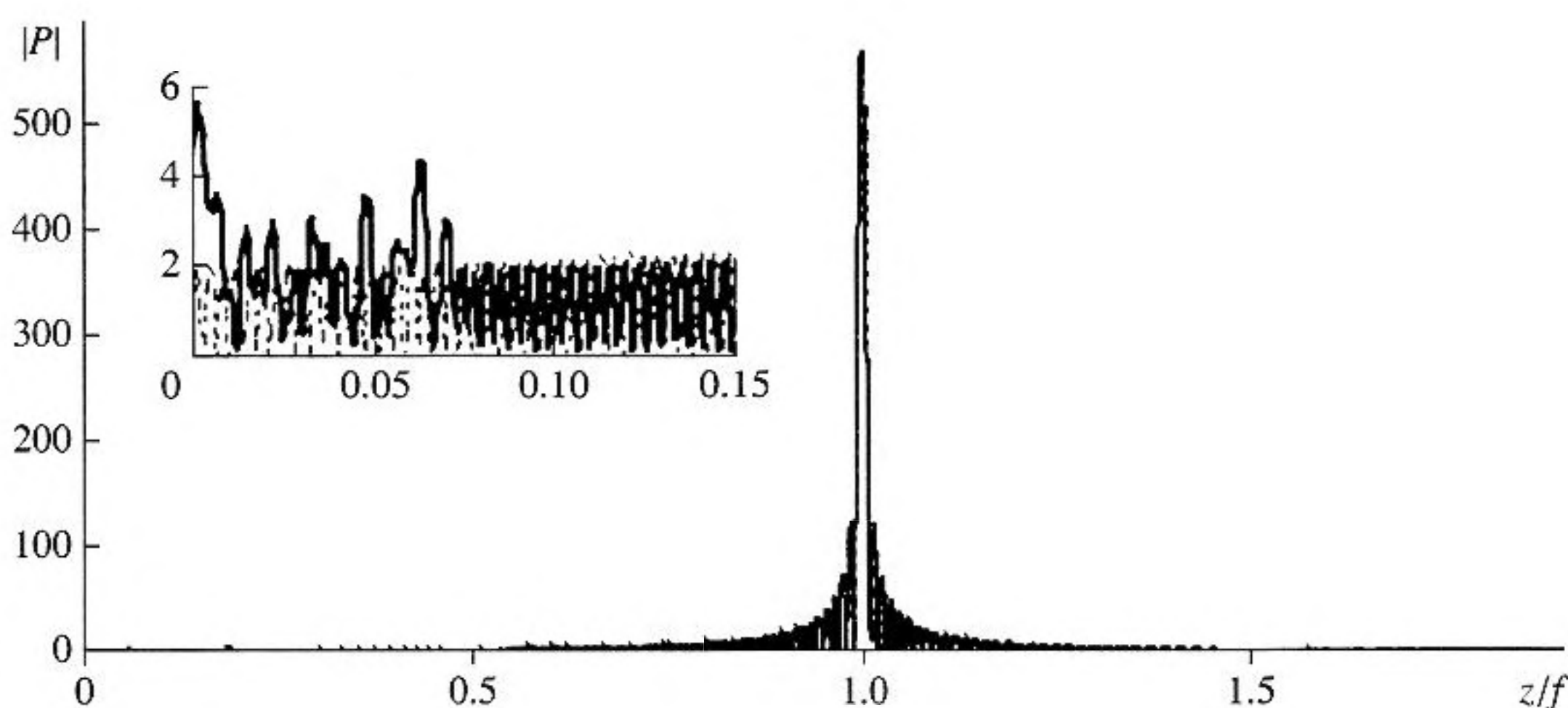


Рис. 3. Нормированная амплитуда акустического давления  $|P| = |p|/\rho_0 c_0 u_0$  вдоль оси пучка ( $ka = 1000$ ,  $\alpha_0 = 60^\circ$ , распределение скорости вдоль излучающей поверхности – равномерное). Сплошная линия соответствует результатам, полученным методом срациваемых разложений, пунктирная линия построена по расчетам на основе интеграла Рэлея.

непрерывность нормальной производной давления вдоль поверхности сшивки выполняется с точностью не хуже 3% относительно величины скорости на излучателе, при этом наибольшая погрешность в выполнении условия сшивки возникает на краю излучателя.

Использование неравномерного распределения точек дискретизации граничного условия на поверхности излучателя, как оказалось, позволяет во многих случаях повысить точность вычислений примерно в 10 раз при прочих равных условиях. В качестве иллюстрации на рис. 5 показаны результаты восстановления граничного условия (16) для случая  $ka = 150$ ,  $\alpha_0 = 60^\circ$  и равномерного распределения скорости на излучающей поверхности (13).

Оказалось также, что, помимо повышения точности, модифицирование метода приводит к существенному увеличению области допустимых для расчета значений угла фокусировки, вплоть до  $90^\circ$ . На рис. 6 показаны результаты вычислений акустического поля на оси излучателя радиуса апертуры  $ka = 200$  с углом фокусировки  $\alpha_0 = 88^\circ$ . Этот случай не удается обсчитать немодифицированным подходом [8]. Толстая линия получена с помощью модифицированного метода сращиваемых разложений, а тонкая – на основе интеграла Рэлея. Дополнительно, в увеличенном масштабе, показаны соответствующие распределения вблизи источника и за фокусом.

С точки зрения практических приложений представляет интерес расчет поправок, даваемых рассматриваемой здесь теорией по сравнению с предсказаниями интеграла Рэлея (14). Эти поправки и есть то перерассеянное поле, которое возникает из-за дифракции на вогнутой поверхности. На рис. 7 приведены примеры двумерного пространственного распределения амплитуды указанного перерассеянного поля в плоскости, проходящей через ось симметрии источника. Величина амплитуды поля рассчитывалась как  $|\Delta p| = |p_1 - p_2|$ , где  $p_1$  и  $p_2$  – комплексные амплитуды акустического давления, полученные, соответственно, методом сращиваемых разложений и методом интеграла Рэлея. Представлены случаи для  $ka = 200$  и достаточно больших углов фокусировки:  $\alpha_0 = 80^\circ$  (а) и  $88^\circ$  (б). Для наглядности введена неравномерная шкала градации серого, чтобы лучше была видна структура поля дифракции в дофокусальной области. Видно, что перерассеянное поле особенно заметно вблизи оси излучателя, особенно начиная с некоторого расстояния за геометрическим фокусом. Как было замечено в работе [8], концентрация дополнительного поля на оси за точкой фокуса имеет геометрическое объяснение: переотраженные от вогнутой поверхности лучи не могут пересечь ось ближе, чем на расстоянии  $z_{\min}/f = 1 - \cos \alpha_0 / \cos 2\alpha_0$ . На указанном рас-

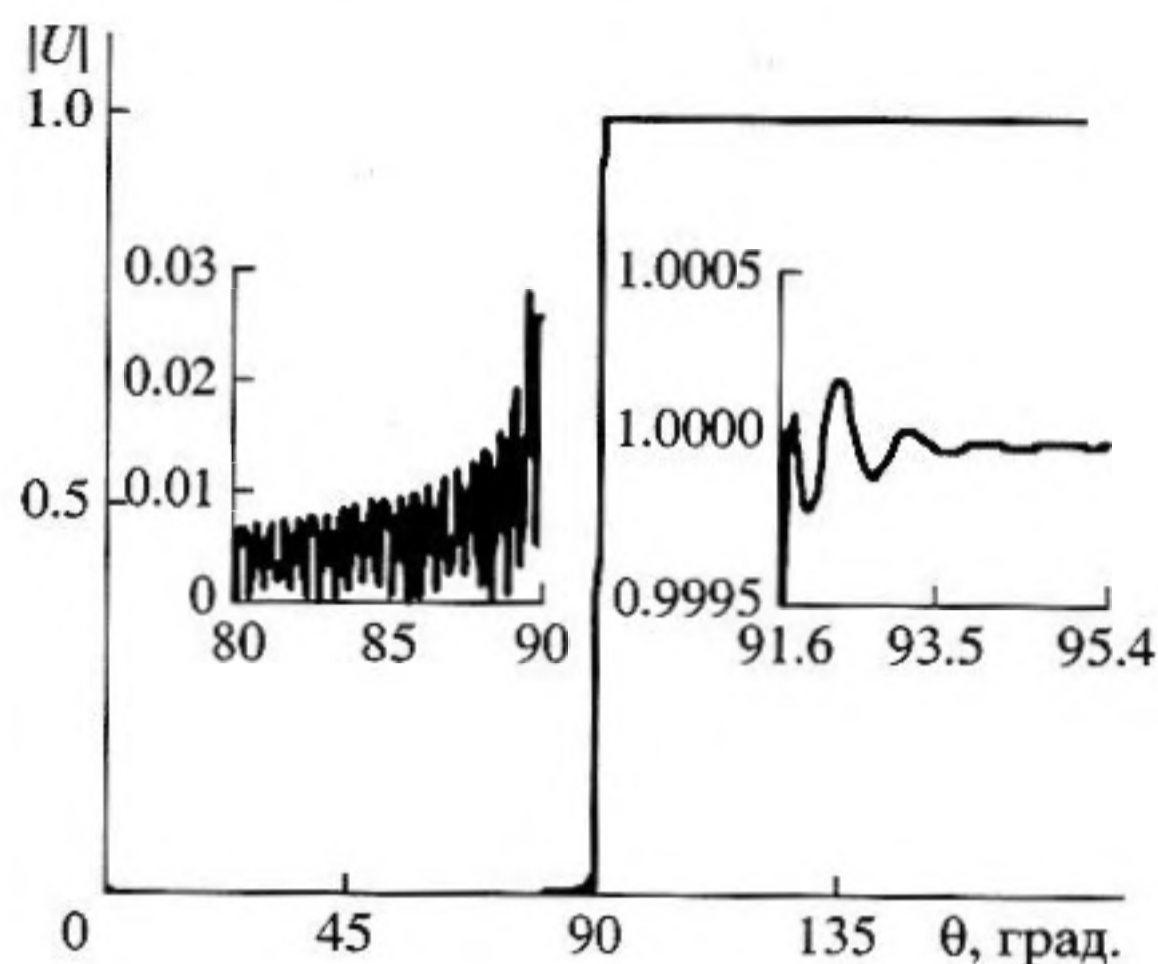


Рис. 4. Восстановление граничного условия и условия сшивки для нормальной компоненты колебательной скорости для случая  $ka = 200$ ,  $\alpha_0 = 80^\circ$ .  $|U| = \left| \frac{\partial(p_i - p_e)}{\partial n} \right| / k\rho_0 c_0 u_0$  – скачок безразмерной скорости на сшивающей поверхности при  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ,  $|U| = \left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| / k\rho_0 c_0 u_0$  – безразмерная скорость излучающей поверхности при  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ . При точном решении задачи должно быть  $|U| = 0$  при  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ , и  $|U| = 1$  при  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ .

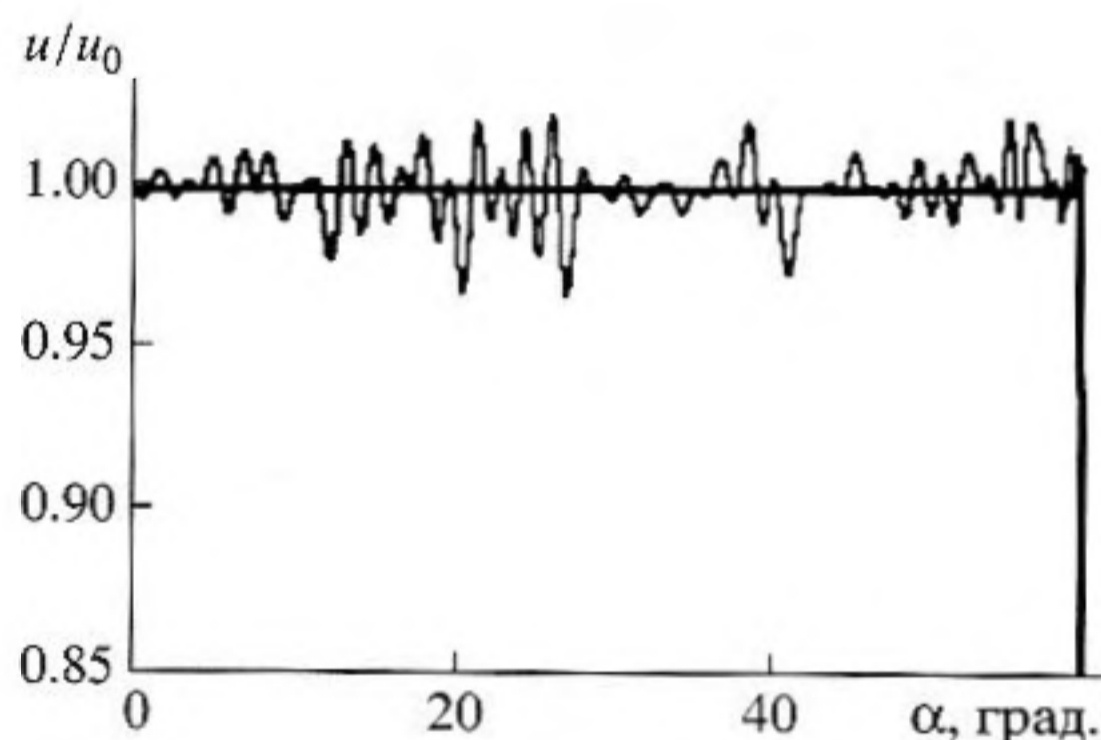


Рис. 5. Результаты восстановления граничного условия для случая  $ka = 150$ ,  $\alpha_0 = 60^\circ$  и равномерного распределения амплитуды нормальной скорости излучающей поверхности при равномерном (тонкая линия) и неравномерном (толстая линия) распределении точек вдоль поверхности.

стоянии ось пересекают лучи, испущенные точками края излучателя после зеркального отражения от диаметрально противоположных точек (штрих-пунктирная линия на рис. 8); все остальные переотраженные лучи пересекают акустическую ось при  $z > z_{\min}$ .

Вне оси симметрии перерассеянное поле имеет вполне определенную структуру (см. рис. 7). Видна овальная область между фокусом и излучателем, где перерассеянное поле очень мало (за ис-

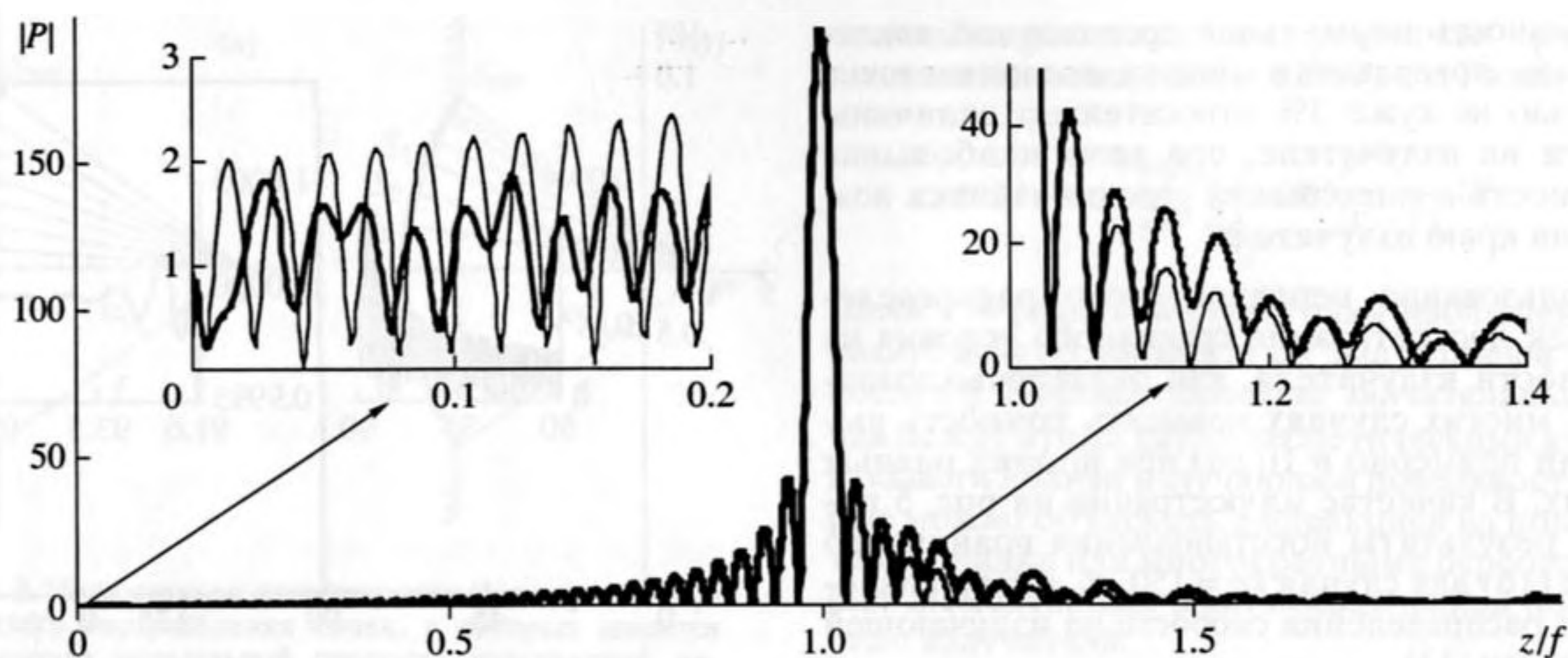


Рис. 6. Амплитуда акустического давления вдоль оси поля излучателя радиуса апертуры  $ka = 200$  с углом фокусировки  $\alpha_0 = 88^\circ$ . Толстая линия получена с помощью модифицированного метода сращиваемых разложений, а тонкая – на основе интеграла Рэлея.

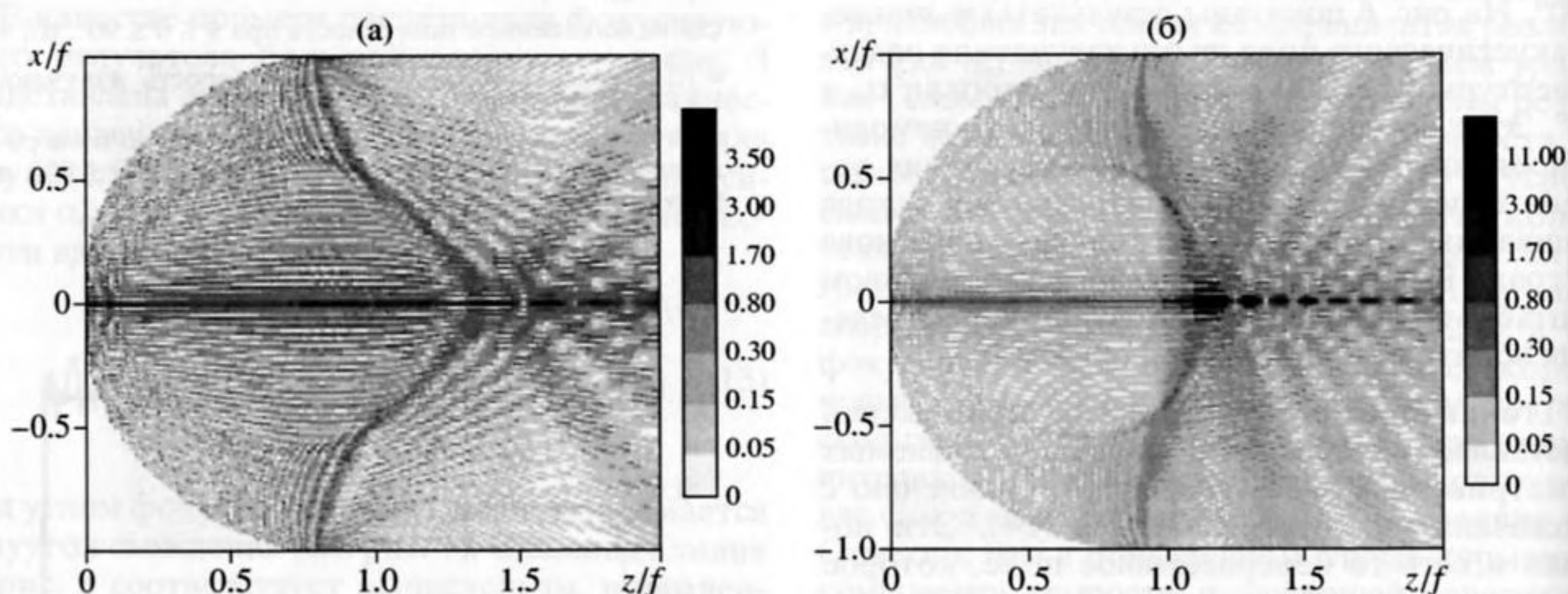


Рис. 7. Двумерные распределения амплитуды перерассеянного акустического поля в плоскости, проходящей через ось симметрии излучателя радиуса апертуры  $ka = 200$  с большим углом фокусировки: а)  $\alpha_0 = 80^\circ$ ; б)  $\alpha_0 = 88^\circ$ . Градацией серого цвета изображен модуль комплексной разности амплитуды акустического давления, рассчитанной методом сращиваемых разложений, и амплитуды, вычисленной на основе интеграла Рэлея.

ключением, может быть, точек вблизи оси). В этой области интеграл Рэлея позволяет довольно точно предсказывать акустическое поле. Существование указанной области также следует из геометрических соображений. Если рассмотреть положение всех возможных лучей, испущенных точками излучателя и отраженных от вогнутой поверхности, то нетрудно заметить, что после зеркального отражения дальше всего от поверхности отклоняются лучи, испущенные краем излучателя. Отметим, что край является к тому же и самым интенсивным источником, порождая так называемую краевую волну. На рис. 8 пунктирной линией показаны лучи, идущие от края к вогнутой поверхности (соответствующее акустическое поле учтено в интеграле Рэлея), а тонкими

сплошными прямыми изображен ход этих лучей после отражения (эти лучи уже не учитываются интегралом Рэлея). Огибающая всех лучей, испущенных краем и однократно отраженных от поверхности, образует характерную дугу, изображенную на рис. 8 жирной линией. Анализ показывает, что эта огибающая задается как кривая  $R(\beta)$  в следующем параметрическом виде:

$$R = f \frac{\operatorname{tg} \gamma \cos \varphi + \sin \varphi}{\operatorname{tg} \gamma \cos \beta + \sin \beta}, \quad (15)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\left( \operatorname{tg}^2 \gamma - \frac{3}{2 \cos^2 \gamma} \right) \sin \varphi - \operatorname{tg} \gamma \cos \varphi}{\left( 1 - \frac{3}{2 \cos^2 \gamma} \right) \cos \varphi - \operatorname{tg} \gamma \sin \varphi} \right), \quad (16)$$

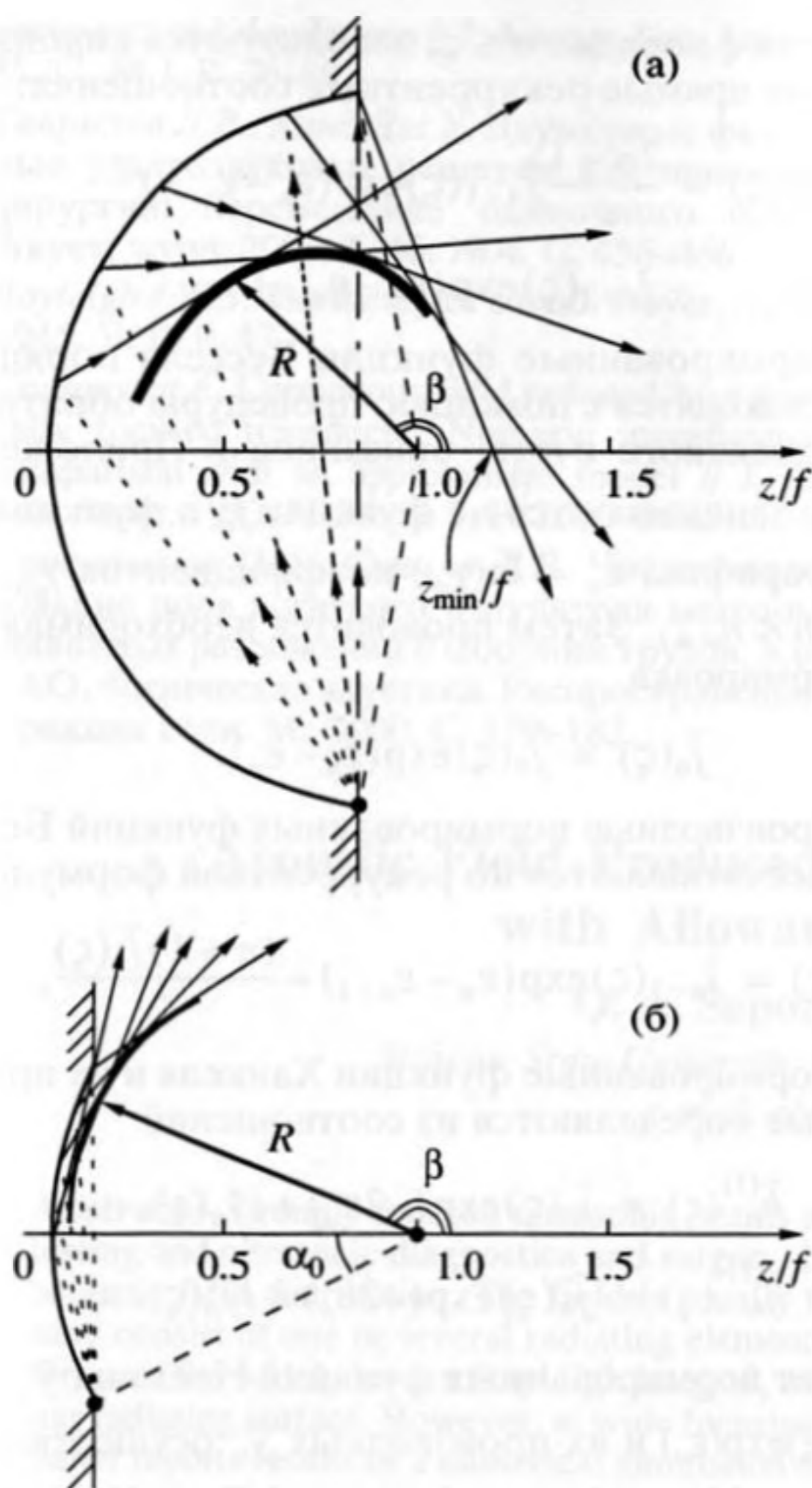


Рис. 8. Схематическое пояснение геометрической структуры перерассеянного поля.

где  $\gamma = \pi - (3\varphi \pm \alpha_0)/2$ , а угол  $\varphi$  меняется в пределах  $\pi - \alpha_0 < \varphi < \pi + \alpha_0$ . Поверхность вращения, образуемая указанной огибающей, как раз и формирует границу овальной области "тени", где поправки к интегралу Рэлея невелики. Вне области тени локализованы как однократно, так и многократно отраженные лучи. На первый взгляд из рис. 7 следует, что амплитуда перерассеянного поля там невелика по сравнению с осевыми значениями. Однако вне оси мала амплитуда и основного поля, т.е. относительный уровень перерассеянного поля велик. Так, вблизи излучающей поверхности многократно переотраженные лучи могут давать поправки, сравнимые с амплитудой поля.

В случае слабо и умеренно фокусирующих излучателей область тени (для перерассеянного поля) раскрывается и занимает почти все полупространство перед излучателем (рис. 8б). При этом интеграл Рэлея почти всюду адекватно описывает акустическое поле. Этот факт подтверждается экспериментально [12]. Использованное выше построение картины акустических лучей описы-

вает структуру дополнительного поля лишь качественно. Например, не объясняется наличие перерассеянного поля вблизи оси внутри области тени, наличие интерференционных полос и т.д. Ценность использованного в работе метода сращиваемых разложений заключается в том, что он позволяет с высокой точностью рассчитать полную дифракционную задачу.

Работа выполнена при поддержке грантов CRDF, "Университеты России" и РФФИ.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Сферические функции Бесселя и Неймана и их производные могут быть рассчитаны по известным рекуррентным соотношениям [13]:

$$s_n(\zeta) = \frac{2n-1}{\zeta} s_{n-1}(\zeta) - s_{n-2}(\zeta), \quad (A1)$$

$$s'_n(\zeta) = s_{n-1}(\zeta) - \frac{n+1}{\zeta} s_n(\zeta), \quad (A2)$$

где  $s_n(\zeta)$  – условное обозначение одного из видов сферических функций,  $\zeta$  – аргумент соответствующей функции. Рекуррентная процедура (A1) использует известные выражения для функций 0-го и 1-го порядков:

$$j_0(\zeta) = \frac{\sin \zeta}{\zeta}, \quad j_1(\zeta) = -j'_0(\zeta) = -\frac{\cos \zeta}{\zeta} + \frac{\sin \zeta}{\zeta^2},$$

$$y_0(\zeta) = -\frac{\cos \zeta}{\zeta}, \quad y_1(\zeta) = -y'_0(\zeta) = -\frac{\sin \zeta}{\zeta} - \frac{\cos \zeta}{\zeta^2}.$$

Процедура (A1) является устойчивой для функций Неймана любого порядка и функций Бесселя порядка  $n \leq \zeta$ . Функции Бесселя порядков  $n \geq \zeta$  находятся с помощью обратных рекуррентных соотношений [14]:

$$j_n(\zeta) = \frac{2n+3}{\zeta} j_{n+1}(\zeta) - j_{n+2}(\zeta). \quad (A3)$$

Для запуска процедуры (A3) с некоторого номера  $N$  необходимо иметь значения функций  $j_{N+2}(\zeta)$  и  $j_{N+1}(\zeta)$ , которые заранее неизвестны. Однако рекуррентный алгоритм (A3) довольно быстро выходит на ветвь, соответствующую функциям Бесселя, т.е. конкретные значения стартовых функций  $s_{N+2}(\zeta)$  и  $s_{N+1}(\zeta)$  не важны. Например, их можно выбрать равными 0 и 1 соответственно, а сам номер  $N$  выбрать существенно, на несколько сотен, превышающим наибольшее из требуемых значений номера  $n$ . Рекуррентная процедура (A3) при этом определяет функции Бесселя с точностью до некоторого неизвестного множителя:  $\tilde{j}_n(\zeta) = \chi j_n(\zeta)$ .

С уменьшением номера  $n$  значения функций  $\tilde{j}_n$  чрезвычайно быстро нарастают (см. асимпто-

тику (7а)) и, вообще говоря, могут приблизиться к величине компьютерной бесконечности. Поэтому целесообразно при некоторых значениях номера  $n = n_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) проводить их перенормировку. Для этого для функций  $\tilde{j}_n$  с номерами  $n_m \leq n < n_{m+1}$  вводится свой коэффициент  $\chi_m = \chi \mu_1 \mu_2 \dots \mu_m$ , т.е. функции переопределяются как  $\tilde{j}_n(\zeta) = \chi_m j_n(\zeta)$ . Множитель  $\mu_m$ , удерживаемый в памяти компьютера, выбирается таким, чтобы значение  $n_m$ -ой функции было равно единице:  $\tilde{j}_{n_m}(\zeta) = 1$ . Значение коэффициента  $\chi$  определяется из требования, чтобы прямая и обратная рекуррентные процедуры давали одно и то же значение функции Бесселя порядка  $n \approx \zeta$ . Окончательно, истинные значения функций Бесселя высоких порядков рассчитываются обратной перенормировкой найденных функций  $\tilde{j}_n$  с номерами  $n_m \leq n < n_{m+1}$ :

$$j_n(\zeta) = \tilde{j}_n(\zeta) / \chi_m = \tilde{j}_n(\zeta) / (\chi \mu_1 \mu_2 \dots \mu_m). \quad (\text{A4})$$

После этого находятся производные функций по рекуррентным соотношениям (А2). Таким образом, сферические функции Бесселя и Неймана всех необходимых порядков и их производные оказываются известными.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

В рассматриваемой задаче удобно проводить нормировку используемых сферических функций Бесселя и Ханкеля, исходя из функций Бесселя аргумента  $\zeta = ka$ , то есть на границе внутренней области  $r \approx a$ . В этом случае в требуемом диапазоне значений аргумента  $\zeta$  новые функции будут и не слишком малы, и не слишком велики. Для введения нормирующих множителей  $\epsilon_n$ :  $\epsilon_n = 0$  при  $n < ka$  и  $\epsilon_n = -\ln[j_n(ka)]$  при  $n \geq ka$ , можно использовать асимптотику (7), однако оказалось целесообразнее основываться на рекуррентных соотношениях, вытекающих из соответствующих соотношений для сферических функций Бесселя (см. Приложение А). При этом для расчета  $\epsilon_n = -\ln[j_n(ka)]$  функции  $j_n(ka)$  не вычисляются явно, а используются логарифмы введенных в Приложении А вспомогательных коэффициентов  $\chi$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , ...,  $\mu_m$  и функций  $\tilde{j}_n(ka)$ :

$$\epsilon_n = \ln(\chi) + \ln(\mu_1) + \ln(\mu_2) + \dots + \ln(\mu_m) - \ln(\tilde{j}_n(ka)). \quad (\text{B1})$$

Описанная процедура позволяет избежать использования больших чисел, т.е. обойти проблему машинной бесконечности.

Чтобы рассчитать значения нормированных сферических функций Бесселя произвольного ар-

гумента  $\zeta$  порядка  $n \leq \zeta$ , используются видоизмененные прямые рекуррентные соотношения:

$$\tilde{j}_n(\zeta) = \frac{2n-1}{\zeta} \tilde{j}_{n-1}(\zeta) \exp(\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) - \tilde{j}_{n-2}(\zeta) \exp(\epsilon_n - \epsilon_{n-2}). \quad (\text{B2})$$

Нормированные функции Бесселя порядков  $n \geq \zeta$  находятся с помощью процедуры обратного рекуррентного счета, описанной в Приложении А, но запоминаются не функции  $j_n$ , а функции  $\tilde{j}_n$  и логарифмы  $\tilde{\epsilon}_n = \ln(\chi_m)$  коэффициентов  $\chi_m$ , где  $n_m \leq n < n_{m+1}$ . Затем проводится необходимая перенормировка

$$\tilde{j}_n(\zeta) = \tilde{j}_n(\zeta) \exp(\tilde{\epsilon}_n - \epsilon_n). \quad (\text{B3})$$

Производные нормированных функций Бесселя рассчитываются по рекуррентной формуле:

$$\tilde{j}'_n(\zeta) = \tilde{j}'_{n-1}(\zeta) \exp(\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) - \frac{(n+1)\tilde{j}_n(\zeta)}{\zeta}. \quad (\text{B4})$$

Нормированные функции Ханкеля и их производные определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n^{(1)}(\zeta) &= \tilde{j}_n(\zeta) \exp(-2\epsilon_n) + i\tilde{y}_n(\zeta), \\ \tilde{h}_n^{(1)'}(\zeta) &= \tilde{j}'_n(\zeta) \exp(-2\epsilon_n) + i\tilde{y}'_n(\zeta). \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

Расчет нормированных функций Неймана  $\tilde{y}_n(\zeta) = y_n(\zeta) \exp(\epsilon_n)$  и их производных  $\tilde{y}'_n$  осуществляется по следующим видоизмененным рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n(\zeta) &= \frac{2n-1}{\zeta} \tilde{y}_{n-1}(\zeta) \exp(\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) - \tilde{y}_{n-2}(\zeta) \exp(\epsilon_{n-2} - \epsilon_n), \\ \tilde{y}'_n(\zeta) &= \tilde{y}'_{n-1}(\zeta) \exp(\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) - \frac{(n+1)\tilde{y}_n(\zeta)}{\zeta}. \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rudgers A.J.* Application of a Neumann-series method to two problems in acoustic radiation theory that are formulated in terms of Green's functions // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1986. V. 79. № 5. P. 1211–1222.
2. *Катиньоль Д., Сапожников О.А.* О применимости интеграла Рэлея к расчету поля вогнутого фокусирующего излучателя // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45. № 6. С. 816–824.
3. *Cobb W.N.* Frequency domain method for the prediction of the ultrasonic field patterns of pulsed, focused radiators // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1984. V. 75. № 1. P. 72–79.
4. *Guyomar D., Power J.* Transient fields radiated by curved surfaces – Application to focusing // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1984. V. 76. № 5. P. 1564–1572.
5. *Djelouah H., Baboux J.C., Perdrix M.* The transient field of a planar ultrasonic transducer coupled to a lens: Ex-



- periments and simulations // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1990. V. 87. № 1. P. 76–80.
6. Гаврилов Л.Р., Хэнд Дж.У. Двумерные фазированные ультразвуковые решетки для применения в хирургии: перемещение одиночного фокуса // *Акуст. журн.* 2000. Т. 46. № 4. С. 456–466
  7. Rayleigh J.W.S. *The theory of sound.* Dover, New York, 1945. V. II. P. 47.
  8. Coulouvrat F. Continuous field radiated by a geometrically focused transducer: Numeric investigation and comparison with an approximate model // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1993. V. 94. № 3. P. 1663–1675.
  9. Сапожников О.А., Синило Т.В. Численное исследование поля вогнутого излучателя методом сравнимых разложений // Сборник трудов. X сессия РАО. Физическая акустика. Распространение и дифракция волн. М., 2000. С. 179–182.
  10. Апельцин В.Ф., Кюркчан А.Г. Аналитические свойства волновых полей. М.: МГУ, 1990.
  11. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции, М.: Наука, 1990.
  12. Cathignol D., Sapozhnikov O.A., Theillere Y. Comparison of acoustic fields radiated from piezoceramic and piezocomposite focused radiator // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1999. V. 105. № 5. P. 2612–2617.
  13. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции (формулы, графики, таблицы), перев. с 6-го нем. изд. М.: Наука, 1968.
  14. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes in Fortran: the art of scientific computing.* 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge Univ. Press, 1994. P. 223–229.

## Acoustic Field Produced by a Concave Radiating Surface with Allowance for the Diffraction

O. A. Sapozhnikov and T. V. Sinilo

*Moscow State University, Vorob'evy gory, Moscow, 119899 Russia*

*e-mail: oleg@acs366b.phys.msu.su*

**Abstract**—Strongly focused ultrasonic beams are widely used in such modern applications as nondestructive testing and ultrasonic diagnostics and surgery. In these applications, it is important to theoretically predict the acoustic field distribution. The field is usually focused with the help of concave piezoelectric sources, which may consist of one or several radiating elements. The field produced by such sources is usually calculated in terms of the widely known Rayleigh integral, which neglects the multiple scattering of the field by the nonplanar radiating surface. However, at wide focusing angles, the contribution of this effect may be significant. This paper reports results of a numerical simulation of the acoustic field produced by an axially symmetric concave radiator by the method of matched expansions modified for sources whose size is large in terms of the wavelength and for a strong focusing (with convergence angles up to 180°). The results are compared with the calculations by the Rayleigh integral. The spatial structure of the additional acoustic field resulting from the diffraction by the edges and the multiple scattering from the radiating surface itself is considered. The effect of the concave shape of the radiating surface is shown to be significant not only near the source, but also at the beam axis, near the focal point, as well as in the region where the beams issued from the edge arrive after their reflection from the concave surface.