АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 6, с. 822–829

УДК 534.231

ШИРОКОУГОЛЬНЫЕ МОДОВЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

© 2002 г. М. Ю. Трофимов

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН
698041 Владивосток, Балтийская 43
E-mail: dominus@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 20.09.2000 г.

Обобщенным методом многих масштабов выведена система параболических уравнений для амплитуд акустической нормальной моды, описывающая широкоугольное по горизонтали распространение звука. В простейшем случае произведено сравнение этой системы с широкоугольным уравнением, полученным формальной факторизацией горизонтального оператора Гельмгольца с дробно-линейной аппроксимацией Паде операторных квадратных корней. Рассмотрен вопрос о сохранении потока энергии. Полученные формулы обобщаются на случай, когда плотность и показатель преломления могут терпеть разрывы на некоторых поверхностях раздела.

Метод многих масштабов применялся для вывода широкоугольных параболических уравнений в работах [1, 2]. В этих работах было выяснено, что для получения широкоугольных уравнений достаточно просто рассмотреть последующие приближения в методе многих масштабов, так что отсутствует необходимость полного или частичного суммирования асимптотических рядов.

В настоящей работе эта схема проводится для получения первой поправки к узкоугольному модовому параболическому уравнению [3], что как показано далее, приводит к широкоугольным уравнениям, соответствующим дробно-линейной аппроксимации корня квадратного из горизонтального оператора Гельмгольца в методе формальной факторизации [4]. При этом использованный метод приводит к некоторым уточнениям результатов, полученных применением метода факторизации, главное из которых связано с учетом излучения в другие моды (заметим, во избежание недоразумений, что в [5] рассматривается несколько другой вопрос). Из-за громоздкости выкладок вывод основных результатов приведен для простейшего случая, для общего случая в последующих разделах приведены в основном окончательные формулы. В частности, для простейшего случая рассмотрен вопрос о сохранении потока энергии.

Настоящая работа является продолжением работы [3], где дана постановка исходной физической задачи и кратко обсуждена история вопроса (см. также [4]). Отметим, что применимость адиабатического приближения при рассмотрении некоторых конкретных задач исследована в недавней работе [6].

Рассмотрим простейший случай, когда распространение звука описывается уравнением Гельмгольца

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} + n^2 P = 0, \qquad (1)$$

где P – акустическое давление, $n = 1/c$ – показатель преломления, c – скорость звука. Поглощение звука учитывается мнимой частью показателя преломления [4]. Переменные обезразмерены с использованием шкалы длины $\bar{h} = \bar{c}/\omega$ и шкалы времени ω^{-1} (где ω – круговая частота звука, $\bar{c}$ – типичное значение скорости звука).

Уравнение (1) рассматривается в области Ω, задаваемой условием $-H \le z \le 0$, где H – глубина фиктивной границы, лежащей в дне, с граничными условиями

$$P = 0 \ \text{ при } \ z = 0, \quad P_z = 0 \ \text{ при } \ z = -H. \qquad (2)$$

Кроме того, по горизонтальным переменным подразумевается выполнение на бесконечности подходящих условий излучения.

Введем малый параметр ϵ и медленные переменные $X = \epsilon x$, $Y = \epsilon^{1/2} y$. Такие масштабы являются характерными для параболического приближения и обсуждены в работе [7] (см. также п. 1 работы [8]). Постулируем разложение показателя преломления

$$n^2 = n_0^2(X, z) + \epsilon\nu(X, Y, z), \qquad (3)$$

где мы полагаем n_0 вещественным и относим мнимую часть показателя преломления, связанную с поглощением звука, к ν. Такое предположение о малости поглощения хорошо оправдывается при тех частотах звука, для которых применяются выводимые ниже уравнения. В медленных переменных уравнение Гельмгольца теперь принимает вид

$$\epsilon^2 P_{XX} + \epsilon P_{YY} + P_{zz} + (n_0^2 + \epsilon\nu)P = 0. \tag{4}$$

Обобщенный метод многих масштабов [9] в случае введения одной быстрой переменной приводит к разложению акустического давления вида

$$P = (u_0(X, Y, z) + \epsilon u_1(X, Y, z) + \\ + \epsilon^2 u_2(X, Y, z) + \ldots)\exp\left(\frac{i}{\epsilon}\theta(X, Y, z)\right), \tag{5}$$

подробно обсужденному в работе [3]. Подстановка этого разложения в уравнение (4) и граничные условия (2) дает индексированное порядками ϵ семейство краевых задач, которые мы рассмотрим вплоть до порядка $O(\epsilon^2)$.

Прежде всего заметим, что граничные условия (2) дают во всех порядках одинаковые граничные условия для u_l, $l = 0, 1, \ldots$:

$$u_l = 0 \text{ при } z = 0, \quad u_{lz} = 0 \text{ при } z = -H. \tag{6}$$

В порядках $O(\epsilon^{-2})$ и $O(\epsilon^{-1})$ получаются соотношения

$$(\theta_z)^2 u_0 = 0, \quad (\theta_Y)^2 u_0 = 0,$$

которые мы удовлетворим, положив, что θ не зависит от z и Y.

В порядке $O(\epsilon^0)$ получаем

$$u_{0zz} + n_0^2 u_0 - (\theta_X)^2 u_0 = 0, \tag{7}$$

с граничными условиями (6). Мы ограничимся рассмотрением решений этой задачи вида

$$u_0 = A(X, Y)\phi(z, X), \tag{8}$$

где ϕ есть решение задачи на собственные значения

$$\phi_{zz} + n_0^2\phi - k^2\phi = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi_z(-H) = 0, \tag{9}$$

со спектральным параметром $k^2 = (\theta_X)^2$. Решения задачи (9) (собственные функции) мы будем считать вещественными и нормировать соотношением

$$\int_{-H}^{0} \phi^2 dz = 1. \tag{10}$$

Известно, что имеется счетное число собственных функций, которые мы расположим в последовательность ϕ_l, $l = 0, 1, \ldots$ и таким же образом занумеруем соответствующие волновые числа k_l, $l = 0, 1, \ldots$. Для дальнейшего зафиксируем номер j и будем считать, что

$$u_0 = A(X, Y)\phi_j(z, X). \tag{11}$$

В порядке $O(\epsilon^1)$ получаем

$$u_{1zz} + n_0^2 u_1 - (\theta_X)^2 u_1 = \\ = -2\theta_X u_{0X} - i\theta_{XX} u_0 - u_{0YY} - \nu u_0 \tag{12}$$

с граничными условиями (6). Условие разрешимости этой задачи относительно u_1 есть

$$2ik_j A_X + ik_{jX} A + A_{YY} + \alpha A = 0, \tag{13}$$

где

$$\alpha = \int_{H}^{0} \nu\phi_j^2 dz. \tag{14}$$

Уравнение (13) есть весьма частный случай параболического уравнения, выведенного в [3], к этой работе мы отсылаем также за разъяснением понятия условий разрешимости.

С учетом (13) уравнение (12) имеет вид

$$u_{1zz} + n_0^2 u_1 - k_j^2 u_1 = \\ = A\left(\phi_j \int_{-H}^{0} \nu\phi_j^2 dz - 2ik\phi_{jX} - \nu\phi_j\right). \tag{15}$$

Будем искать решение (15) с граничными условиями (6) в виде

$$u_1 = \sum_{l=0}^{\infty} B_{jl}(X, Y)\phi_l(z, X), \tag{16}$$

коэффициент B_{jj} с учетом выделенности индекса j будем обозначать также просто через B. Подставляя (16) в (15) и интегрируя полученное равенство по z от $-H$ до 0, получаем после некоторых преобразований уравнение, верное при $l \neq j$:

$$(k_l^2 - k_j^2)B_{jl} = A\left(-2ik_j \int_{-H}^{0} \phi_{jX}\phi_l dz - D_{jl}\right), \tag{17}$$

где введено удобное для дальнейшего обозначение

$$D_{jl} = \int_{-H}^{0} \nu\phi_j\phi_l dz. \tag{18}$$

Уравнение (17) служит для нахождения коэффициентов B_{jl} при $j \neq l$, коэффициент B будет определяться из параболического уравнения, получаемого ниже из условия разрешимости задачи в порядке $O(\epsilon^2)$. Поскольку коэффициенты B_{jl} оказываются пропорциональными A, удобно ввести величины E_{jl} при $j \neq l$ равенством

$$AE_{jl} = B_{jl}. \tag{19}$$

Для определенности положим $E_{jj} = 0$.

Чтобы найти выражения для ϕ_{jX} и k_{jX}, входящих во многие выражения, продифференцируем по X задачу (9), записанную для ϕ_j, k_j:

$$\phi_{jXzz} + n_0^2\phi_{jX} - k_j^2\phi_{jX} = -(n_0^2)_X\phi_j + (k_j^2)_X\phi_j, \quad \phi_{jX}(0) = 0, \quad \phi_{jXz}(-H) = 0. \tag{20}$$

Условие разрешимости этой задачи есть

$$(k_j^2)_X = \int_{-H}^{0}(n_0^2)_X\phi_j^2dz, \tag{21}$$

из которого находится k_{jX}. Будем искать ϕ_{jX} в виде

$$\phi_{jX} = \sum_{l=0}^{\infty}C_{jl}\phi_l. \tag{22}$$

Аналогично тому, как это делалось для коэффициентов B_{jl}, найдем формулы для введенных коэффициентов C_{jl} при $j \neq l$:

$$(k_l^2 - k_j^2)C_{jl} = -\int_{-H}^{0}(n_0^2)_X\phi_j\phi_l dz. \tag{23}$$

Из продифференцированного по X условия нормировки (10) получаем также

$$C_{jj} = 0. \tag{24}$$

Теперь перейдем к рассмотрению соотношений в порядке $O(\epsilon^2)$. В этом порядке мы получаем уравнение

$$u_{2zz} + n_0^2u_2 - (\theta_X)^2u_2 = u_{0XX} - 2\theta_Xu_{1X} - i\theta_{XX}u_1 - u_{1YY} - \nu u_1 \tag{25}$$

с граничными условиями (6). Заменяя входящие в это уравнение u_0 и u_1 их выражениями из (8), (16), получаем, с использованием (22), условие разрешимости

$$2ik_jB_X + ik_{jX}B + B_{YY} + \alpha B + A_{XX} + \beta A = 0, \tag{26}$$

где

$$\beta = -\int_{-H}^{0}(\phi_{jX})^2dz + \sum_{l=0,\, l\neq j}^{\infty}B_{jl}\left(2ik_j\int_{-H}^{0}\phi_{lX}\phi_j dz + D_{lj}\right). \tag{27}$$

Для получения (27) мы воспользовались также формулой

$$\int_{-H}^{0}\phi_{jXX}\phi_j dz + \int_{-H}^{0}(\phi_{jX})^2dz = 0,$$

которая получается двукратным дифференцированием (10). Пользуясь равенством

$$C_{jl} + C_{lj} = 0, \tag{28}$$

которое получается дифференцированием по X условия ортогональности собственных функций

$$\int_{-H}^{0}\phi_j\phi_l dz = 0,$$

выражением для B_{jl} (17) и симметрией по индексам коэффициентов D_{jl}, после некоторых преобразований получаем удобные выражения для β:

$$\beta = -\sum_{l=0,\, l\neq j}^{\infty}\left(C_{jl}^2 + \frac{1}{k_l^2 - k_j^2}(D_{jl}^2 + 4k_j^2C_{jl}^2)\right) = -\sum_{l=0,\, l\neq j}^{\infty}(C_{jl}^2 + (k_l^2 - k_j^2)|E_{jl}|^2). \tag{29}$$

Система уравнений (13), (26) представляет в нашем подходе широкоугольные модовые параболические уравнения. При сравнении с результатами более традиционного подхода, этот тезис приобретет более конкретное содержание.

Рассмотрим случай, когда n_0 не зависит от X. Для того, чтобы сравнить систему уравнений (13), (26) с уравнением, даваемым методом формальной факторизации горизонтального оператора Гельмгольца, введем амплитуду

$$U = A + \epsilon B,$$

и прибавим к уравнению (13) уравнение (26), умноженное на ϵ. При этом A_{XX}, входящее в уравнение (26), выразим с помощью продифференцированного по X уравнения (13). Таким образом получается

$$2ik_jU_X + U_{YY} + \alpha U + \epsilon\left(\beta A + \frac{i}{2k_j}A_{YYX} + \frac{i}{2k_j}D_{jjX}A + \frac{i}{2k_j}D_{jj}A_X\right) = 0. \tag{30}$$

Поскольку мы будем рассматривать это уравнение с точностью $O(\epsilon^2)$, мы можем заменить его на

$$2ik_jU_X + U_{YY} + \alpha U + \epsilon\left(\beta U + \frac{i}{2k_j}U_{YYX} + \frac{i}{2k_j}D_{jjX}U + \frac{i}{2k_j}D_{jj}U_X\right) = 0. \tag{31}$$

Возвращаясь к исходным переменным $x = \epsilon^{-1}X$, $y = \epsilon^{-1/2}Y$ и вводя

$$\bar{\nu} = \epsilon\nu, \quad \bar{D}_{jl} = \epsilon D_{jl} = \int_{-H}^{0}\bar{\nu}\phi_j\phi_l dz,$$

окончательно получаем из (31)

$$\begin{gathered}2ik_jU_x + U_{yy} + \bar{\alpha}U + \\ + \bar{\beta}U + \frac{i}{2k_j}U_{yyx} + \frac{i}{2k_j}\bar{D}_{jjx}U + \frac{i}{2k_j}\bar{D}_{jj}U_x = 0.\end{gathered} \quad (32)$$

где, в данном случае,

$$\bar{\alpha} = \bar{D}_{jj}, \quad \bar{\beta} = -\sum_{l=0,\, l\neq j}^{\infty} \frac{1}{k_l^2 - k_j^2}\bar{D}_{jl}^2.$$

Применим теперь метод формальной факторизации (см. подробнее [8], [10], [11]) горизонтального оператора Гельмгольца к уравнению (4), записанному в исходных переменных следующим образом:

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} + (n_0^2 + \bar{\nu})P = 0. \quad (33)$$

Следуя алгоритму, изложенному в [4], представим акустическое давление P в виде

$$P = \tilde{A}(x, y)\phi_j(z),$$

где ϕ_j – собственная функция, и проинтегрируем (33) по z от $-H$ до 0. Учитывая условие нормировки (10) и спектральную задачу (9), получим уравнение для амплитуды $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}_{xx} + \tilde{A}_{yy} + k_j^2\tilde{A} + \bar{\alpha}\tilde{A} = 0. \quad (34)$$

Заменим это уравнение его факторизацией:

$$\begin{gathered}\left(i\frac{\partial}{\partial x} + k_j\sqrt{1 + \frac{1}{k_j^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{\alpha}\right)}\right)\times \\ \times\left(i\frac{\partial}{\partial x} - k_j\sqrt{1 + \frac{1}{k_j^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{\alpha}\right)}\right)\tilde{A} = 0.\end{gathered} \quad (35)$$

Напомним, что эта замена в случае переменных коэффициентов имеет приближенный характер.

Оставляя лишь первый сомножитель, приближаем далее операторный квадратный корень $\sqrt{1+Q}$, где

$$Q = \frac{1}{k_j^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{\alpha}\right),$$

дробно-линейной комбинацией $(1 + pQ)(1 + qQ)^{-1}$ с некоторыми числовыми множителями p и q. Вводя огибающую $\tilde{U}$ формулой $\tilde{A} = \tilde{U}\exp(k_jx)$, получаем уравнение для огибающей

$$i(1 + qQ)\tilde{U}_x + k_j(p - q)Q\tilde{U} = 0.$$

При $p = 3/4$, $q = 1/4$, что соответствует аппроксимации Паде P_1^1 [12], после некоторых преобразований окончательно получаем

$$2ik_j\tilde{U}_x + \tilde{U}_{yy} + \bar{\alpha}\tilde{U} + \frac{i}{2k_j}\tilde{U}_{yyx} + \frac{i}{2k_j}\bar{D}_{jj}\tilde{U}_x = 0. \quad (36)$$

Это уравнение отличается от (32) отсутствием некоторых членов: член

$$\frac{i}{2k_j}\bar{D}_{jjx}\tilde{U}$$

отсутствует вследствие упомянутых выше предположений о коммутируемости, а член $\bar{\beta}\tilde{U}$ – из-за выпадения из рассмотрения других мод.

Покажем даже, что в предположении отсутствия поглощения (показатель преломления вещественен), выведенные уравнения обеспечивают сохранение потока энергии с точностью $O(\epsilon^3)$.

Введем обозначение

$$\langle h, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-H}^{0} hg^* dzdy, \quad (37)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Умножим уравнение (1) на P^* и проинтегрируем по y от $-\infty$ до ∞ и по z от $-H$ до 0. После интегрирования по частям с использованием граничных условий, получаем равенство

$$\begin{gathered}\langle P_{xx}, P\rangle - \langle P_y, P_y\rangle - \langle P_z, P_z\rangle + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-H}^{0} n^2|P|^2 dzdy = 0,\end{gathered}$$

из которого следует

$$\mathrm{Im}\langle P_{xx}, P\rangle = 0.$$

Поток энергии через (y, z) – плоскость есть $\mathrm{Im}\langle P_x, P\rangle$. Это выражение, продифференцированное по x, дает $\mathrm{Im}\langle P_{xx}, P\rangle$, так что мы получили закон сохранения потока энергии для (1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\langle P_x, P\rangle = 0. \quad (38)$$

Перейдем к рассмотрению выполнения этого закона для параболических уравнений (13), (26). Напомним, что в этих уравнениях

$$\begin{gathered}P = A\phi_j\exp\frac{i}{\epsilon}\theta + \epsilon B\phi_j\exp\frac{i}{\epsilon}\theta + \\ + \epsilon\left(\sum_{l=0,\, l\neq j}^{\infty} B_{jl}\phi_l\right)\exp\frac{i}{\epsilon}\theta + O(\epsilon^2),\end{gathered}$$

где A, B, B_{jl} суть функции от медленных переменных $X = \epsilon x$, $Y = \epsilon^{1/2}y$, θ – функция от X, ϕ_j, ϕ_l – функции от X и z. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial}{\partial X},$$

мы имеем $k_j = \theta_X = (1/\epsilon)\theta_x$.

Непосредственные вычисления дают

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\langle P_x, P\rangle = \epsilon\left(k_j\int\limits_{-\infty}^{\infty}|A|^2dy\right)_X + \\ +\epsilon^2\left\{\frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(A_{XX}A^* - A^*_{XX}A)dy + \right.\\ +k_{jX}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(BA^* + AB^*)dy + \\ \left. +k_j\int\limits_{-\infty}^{\infty}(B_XA^* + BA_X + A_XB + AB^*_X)dy\right\}.\end{aligned} \tag{39}$$

Отметим, что закон сохранения (38) в порядке $O(\epsilon^0)$ уже следует из (39). Умножим (13) на A^* и проинтегрируем полученное равенство по Y от $-\infty$ до ∞, и затем вычтем из этого комплексно сопряженное уравнение (13), умноженное на A и проинтегрированное по Y в тех же пределах. В результате получим

$$\left(k_j\int\limits_{-\infty}^{\infty}|A|^2dy\right)_X = 0,$$

то есть закон сохранения (38) в порядке $O(\epsilon)$.

Чтобы получить закон сохранения в порядке $O(\epsilon^2)$, то есть равенство нулю множителя при ϵ^2 в (39), следует сложить два равенства. Первое из них получается вычитанием проинтегрированного по Y от $-\infty$ до ∞ комплексно сопряженного уравнения (13), умноженного на B, из проинтегрированного по Y от $-\infty$ до ∞ уравнения (13), умноженного на B^*. Второе – вычитанием проинтегрированного по Y от $-\infty$ до ∞ комплексно сопряженного уравнения (26), умноженного на A, из проинтегрированного по Y от $-\infty$ до ∞ уравнения (26), умноженного на A^*. Для однозначного понимания двух последних, немного слишком сложных фраз, специально отметим, что уравнения сначала умножаются, а потом интегрируются.

Приведем основные формулы для случая, когда распространение звука описывается уравнением

$$(\gamma P_x)_x + (\gamma P_y)_y + (\gamma P_z)_z + \gamma n^2 P = 0, \tag{40}$$

где $\gamma = 1/\rho$, ρ – плотность, обезразмеренная с использованием шкалы плотности $\bar{\rho}$ – типичное значение плотности.

Область, в которой рассматривается это уравнение и граничные условия – такие же, как и в рассмотренном выше простейшем случае.

Введем медленные переменные $X = \epsilon x$ и $Y = \epsilon^{1/2}y$ и постулируем разложения показателя преломления (3) и параметра γ

$$\gamma = \gamma_0(X, z) + \epsilon\gamma_1(X, Y, z).$$

Подставим эти разложения и выражение (5) в уравнение (40), записанное в медленных переменных, граничные условия (2), и рассмотрим краевые задачи в разных порядках ϵ.

Прежде всего так же, как и в простейшем случае, получаем, что θ не зависит от z и Y. Рассмотрение задачи в порядке $O(\epsilon^0)$ приводит к представлению

$$u_0 = A(X, Y)\phi_j(z, X),$$

где (ϕ_j, k_j) есть одно из решений задачи на собственные значения

$$\begin{gathered}(\gamma_0\phi_z)_z + \gamma_0 n_0^2\phi - \gamma_0 k^2\phi = 0,\\ \phi(0) = 0, \quad \phi_z(-H) = 0,\end{gathered} \tag{41}$$

со спектральным параметром $k^2 = (\theta_X)^2$ и нормировкой

$$\int\limits_{-H}^{0}\gamma_0\phi^2dz = 1. \tag{42}$$

Условие разрешимости задачи в порядке $O(\epsilon^1)$ есть параболическое уравнение для A

$$2ik_jA_X + ik_{jX}A + A_{YY} + \alpha A = 0, \tag{43}$$

где α теперь дается формулой

$$\alpha = \int\limits_{-H}^{0}\gamma_0\nu\phi_j^2dz + \int\limits_{-H}^{0}\gamma_1(n_0^2 - k_j^2)\phi_j^2dz - \int\limits_{-H}^{0}\gamma_1(\phi_{jz})^2dz. \tag{44}$$

Решение краевой задачи в порядке $O(\epsilon)$ представляется в виде

$$u_1 = \sum_{l=0}^{\infty}B_{jl}(X, Y)\phi_l(z, X), \tag{45}$$

коэффициент B_{jj} обозначается также через B. Так же, как и выше, коэффициенты B_{jl} при $j \neq l$ оказываются пропорциональными A и мы вводим коэффициенты E_{jl} при $j \neq l$ равенством

$$AE_{jl} = B_{jl}. \tag{46}$$

Эти коэффициенты при $j \neq l$ удовлетворяют уравнению

$$(k_l^2 - k_j^2)E_{jl} = -ik_j \int_{-H}^{0} \gamma_{0X}\phi_j\phi_l dz - 2ik_j \int_{-H}^{0} \gamma_0 \phi_{jX}\phi_l dz + \\ + k_j^2 \int_{-H}^{0} \gamma_1 \phi_j \phi_l dz - \int_{-H}^{0} (\gamma_1 \phi_{jz})_z \phi_l dz - \\ - \int_{-H}^{0} \gamma_1 n_0^2 \phi_j \phi_l dz - \int_{-H}^{0} \gamma_0 \nu \phi_j \phi_l dz. \quad (47)$$

Положим теперь

$$E_{jj} = -\frac{1}{2}\int_{-H}^{0} \gamma_1 \phi_j^2 dz. \quad (48)$$

Мы будем использовать представление производных собственных функций по X в виде

$$\phi_{jX} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{jl}\phi_l. \quad (49)$$

Уравнение для этих коэффициентов есть

$$(k_m^2 - k_j^2)C_{jm} = \int_{-H}^{0} \gamma_{0X}\phi_{jz}\phi_{mz} dz - \\ - \int_{-H}^{0} (\gamma_0 n_0^2)_X \phi_j \phi_m dz + (k_j^2)_X \delta_{jm} + k_j^2 \int_{-H}^{0} \gamma_{0X}\phi_j\phi_m dz, \quad (50)$$

где δ_{jm} – дельта Кронекера. Коэффициенты C_{jm} определяются из этого уравнения при $j \neq m$, а при $j = m$ получается формула для k_{jX}. Уравнение для C_{jj} получается дифференцированием по X условия нормировки (42) и имеет вид

$$\int_{-H}^{0} \gamma_{0X}\phi_j^2 dz + 2C_{jj} = 0. \quad (51)$$

В отличие от рассмотренного выше, коэффициенты C_{jm} уже не являются антисимметричными по индексам, вместо этого имеем соотношение

$$C_{jm} + C_{mj} = -\int_{-H}^{0} \gamma_{0X}\phi_j\phi_m dz. \quad (52)$$

Аналогичная формула для E_{jm} имеет вид

$$E_{jm} + E_{mj} = -\int_{-H}^{0} \gamma_1 \phi_j \phi_m dz + i\frac{1}{k_m - k_j}(C_{mj} - C_{jm}). \quad (53)$$

Условие разрешимости краевой задачи в порядке $O(\epsilon^2)$ дает параболическое уравнение для амплитуды B

$$2ik_jB_X + ik_{jX}B + B_{YY} + \alpha B + \\ + A_{XX} + 4ik_jE_{jj}A_X + 2(E_{jj}A_Y)_Y + \beta A = 0, \quad (54)$$

где

$$\beta = 2ik_j \sum_{l=0, l\neq j}^{\infty} E_{jl}(C_{lj} - C_{jl}) - \\ - \sum_{l=0, l\neq j}^{\infty} (k_l^2 - k_j^2)E_{jl}^2 + C_{jjX} - \\ - \sum_{l=0}^{\infty} C_{jl}^2 + 2ik_jE_{jjX} + 2ik_{jX}E_{jj} + \int_{-H}^{0} \gamma_1 \nu \phi_j^2 dz. \quad (55)$$

Предположим, что параметры γ_0 и n_0 терпят разрывы первого рода на границах

$$z = h^{(l)}(X, Y), \quad l = 1, \ldots, N,$$

где функции $h^{(l)}$ имеют разложения

$$h^{(l)}(X, Y) = h_0^{(l)}(X) + \epsilon h_1^{(l)}(X, Y).$$

Будем предполагать гладкость γ_0 и n_0 вне точек разрыва.

Заметим, что при $h_1^{(l)} = 0$ выведенные ранее формулы остаются справедливыми и при наличии разрывов, если решения краевых задач понимать в соответствующем обобщенном смысле (скажем, как принадлежащие соболевскому пространству H^1). В этом разделе мы покажем, что эти формулы формально охватывают и случай $h_1^{(l)} \neq 0$, если возмущения границ включать в возмущения γ и показателя преломления γ_1 и ν. При этом, однако, части γ_1 и ν, соответствующие возмущениям границ, должны быть порядка $O(1/\epsilon)$, чтобы, после умножения на ϵ, изменять значения γ и n на конечные величины. Поэтому малость этих возмущений должна пониматься не поточечно, а в некотором интегральном смысле. Упомянув это, мы не будем далее заниматься функционально-аналитическими вопросами и приведем формальный вывод формул, из которого при желании можно извлечь всю информацию, необходимую для более строгого рассмотрения.

Пусть возмущения γ_0 и n_0 при возмущении границы $z = h^{(l)}$ в данной точке (X, Y) описываются функцией $\chi(z)$ следующим образом:

$$\tilde{\gamma}_0(z) = \gamma_0(z - \chi(z)), \\ \tilde{n}_0(z) = n_0(z - \chi(z)), \quad (56)$$

где на функцию χ мы налагаем следующие условия:

$$\chi(h_0^{(l)}) = h_1^{(l)}, \quad |\chi(z)| < |h_1^{(l)}| \quad \text{при} \quad z \neq h_0^{(l)},$$

χ – гладкая функция и носитель χ имеет диаметр порядка $O(h_1^{(l)})$.

Разложим $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{n}_0^2$ в ряды Тейлора

$$\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 - \chi\gamma_{0z} + o(|h_1^{(l)}|),$$
$$\tilde{n}_0^2 = n_0^2 - \chi(n_0^2)_z + o(|h_1^{(l)}|).$$

Здесь, учитывая разрывный характер γ_0 и n_0^2, производные понимаются в смысле обобщенных функций, справедливость формулы Тейлора в этом случае показана, например, в [13, Часть 1, раздел 3.3]. В нашем случае мы имеем

$$\chi\gamma_{0z} = \chi(\gamma_{0+} - \gamma_{0-})\delta(z - h_0^{(l)}) +$$
$$+ \text{гладкая функция порядка } O(|h_1^{(l)}|),$$

и аналогичную формулу для n_0^2, где δ – δ-функция Дирака, $\gamma_{0+} = \lim\limits_{z \to h_0^{(l)},\, z > h_0^{(l)}} \gamma_0$ и $\gamma_{0-} = \lim\limits_{z \to h_0^{(l)},\, z < h_0^{(l)}} \gamma_0$.

Теперь, если положить

$$\gamma_1 = -\chi\gamma_{0z}, \quad \nu = -\chi(n_0^2)_z,$$

то интегралы, содержащие эти величины и входящие в выражения для коэффициентов α и β (14), (27) дают:

$$\int_{-H}^{0} \gamma_1 \phi_j^2 dz = -\int_{-H}^{0} \chi\gamma_{0z}\phi_j^2 dz = \tag{57}$$
$$= -(\gamma_{0+} - \gamma_{0-}) h_1^{(l)} \phi_l^2 \Big|_{z = h_0^{(l)}} + o(|h_1^{(l)}|),$$

$$\int_{-H}^{0} \gamma_0 \nu \phi_j^2 dz + \int_{-H}^{0} \gamma_1 n_0^2 \phi_j^2 dz = -\int_{-H}^{0} \chi(n_0^2\gamma_0)_z \phi_j^2 dz = \tag{58}$$
$$= -((n_0^2\gamma_0)_+ - (n_0^2\gamma_0)_-) h_1^{(l)} \phi_l^2 \Big|_{z = h_0^{(l)}} + o(|h_1^{(l)}|),$$

$$\int_{-H}^{0} \gamma_1 (\phi_{jz})^2 dz = \int_{-H}^{0} \chi\gamma_{0z}(\phi_{jz})^2 dz =$$
$$= \int_{-H}^{0} \chi\left(\frac{1}{\gamma_0}\right)_z (\gamma_0\phi_{jz})^2 dz = \tag{59}$$
$$= \left(\left(\frac{1}{\gamma_0}\right)_+ - \left(\frac{1}{\gamma_0}\right)_-\right) h_1^{(l)} (\gamma_0\phi_{jz})^2 \Big|_{z = h_0^{(l)}} + o(|h_1^{(l)}|),$$

и

$$\int_{-H}^{0} \gamma_1 \nu \phi_j^2 dz = \int_{-H}^{0} \chi^2 \gamma_{0z} (n_0^2)_z \phi_j^2 dz = \tag{60}$$
$$= (\gamma_{0+} - \gamma_{0-})((n_0^2)_+ - (n_0^2)_-) h_1^{(l)} \phi_j^2 \Big|_{z = h_0^{(l)}} + o(|h_1^{(l)}|^2).$$

Остается заметить, что порядки ошибок в формулах (57)–(60) соответствуют порядкам ϵ, в которых эти интегралы входят в коэффициенты α и β, если вернуться к исходным переменным подобно тому, как это было сделано при сравнении с методом факторизации.

Нетрудно проверить, что приведенные формулы согласуются с формулами из работы [3][1].

В заключении отметим, что в настоящей работе обобщенным методом многих масштабов выведена система параболических уравнений (43) и (54) для амплитуд акустической нормальной моды, описывающая широкоугольное по горизонтали распространение звука. В простейшем случае произведено сравнение этой системы с широкоугольным уравнением, полученным формальной факторизацией горизонтального оператора Гельмгольца с дробно-линейной аппроксимацией Паде операторных квадратных корней. Рассмотрен вопрос о сохранении потока энергии. В работе развит подход, позволяющий с использованием теории обобщенных функций обобщить формулы, полученные для гладких плотности и показателя преломления на случай, когда они могут терпеть разрывы на некоторых поверхностях раздела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Siegmann, W.L., Kreigsmann, G.A., and Lee, D.* A wide-angle three-dimensional parabolic wave equation // J. Acoust. Soc. Amer. 1985. Vol. 78. № 2. P. 659–664.
2. *Orchard, B.J., Siegmann, W.L., and Jacobson M.J.* Three-dimensional time-domain paraxial approximations for ocean acoustic wave propagation // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. Vol. 91. № 2. P. 788–801.
3. *Трофимов М.Ю.* Узкоугольные параболические уравнения адиабатического распространения зву-

[1] За исключением члена, содержащего $h_{0X}^{(l)}$, который попал в итоговые формулы вследствие ошибки, заключающейся в принятии $\left(\int_{-H}^{0} \frac{1}{\rho_0}\phi^2 dz\right)_X = \int_{-H}^{0}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)_X \phi^2 dz + 2\int_{-H}^{0}\frac{1}{\rho_0}\phi_X\phi dz$ (см. [3, Приложение]). На самом деле такие интегралы следует дифференцировать так (мы рассмотрим случай одной границы): $\left(\int_{-H}^{0} \frac{1}{\rho_0}\phi^2 dz\right)_X = \left(\int_{-H}^{h_0^{(l)}} \frac{1}{\rho_0}\phi^2 dz + \int_{h_0^{(l)}}^{0} \frac{1}{\rho_0}\phi^2 dz\right)_X = h_{0X}^{(l)}\left(\left(\frac{1}{\rho_0}\right)_- - \left(\frac{1}{\rho_0}\right)_+\right)\phi^2$ + ранее приведенные члены. В итоге члены с $h_{0X}^{(l)}$ сокращаются.

ка одной моды в горизонтально-неоднородном мелком море // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 647–652.

4. *Collins, M.D.* The adiabatic mode parabolic equation // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. Vol. 94. № 4. P. 2269–2278.
5. *Abawi, A.T., Kuperman, W.A., Collins, M.D.* The coupled mode parabolic equation // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. Vol. 102. № 1. P. 233–238.
6. *Shang, E.C., Wang, Y.Y., Gao, T.F.* On the adiabaticity of acoustic propagation through nongradual structures // J. Coumput. Acoustics. 2001. V. 9. № 2. P. 359–366.
7. *Леонтович М.А., Фок В.А.* Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения. В сб. Исследования по распространению радиоволн. Вып. II. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 13–39.
8. *Tappert, F.D.* The parabolic approximation method. In "Wave propagation and underwater acoustics" / Eds J.B. Keller and J.S. Papadakis. Lecture Notes in Physics. Vol. 70. N. Y. et al.: Springer-Verlag, 1977.
9. *Nayfeh, A.H.*, Perturbation methods. N. Y.: John Wiley & Sons, 1973.
10. *Авилов К.В., Мальцев Н.Е.* К вычислению звуковых полей в океане методом параболического уравнения // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 3. С. 335–340.
11. *Авилов К.В.* Псевдодифференциальные параболические уравнения распространения звука в океане, плавно неоднородном по горизонтали, и их численное решение // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 1. С. 5–12.
12. *Bender, C.M., Orszag, S.A.* Advanced mathematical methods for scientists and engineers. N.-Y. et al.: McGraw-Hill, 1978. xiv+593 pp.
13. *Antosik, P., Mikusiński, J., Sikorski, R.* Theory of distributions. Amsterdam: Elsevier, 1973.

Wide-Angle Mode Parabolic Equations

M. Yu. Trofimov

Pacific Oceanological Institute, Far East Division, Russian Academy of Sciences, ul. Baltiiskaya 43, Vladivostok, 690041 Russia

e-mail: dominus@poi.dvo.ru

Abstract—Using the generalized multiscale method, a system of parabolic equations for the normal mode amplitudes is derived to describe the wide-angle sound propagation in the horizontal direction. For the simplest case, this system is compared with the wide-angle equation obtained by the formal factorization of the horizontal Helmholtz operator and the linear-fractional Padé approximation for the square roots of operators. The problem of the energy flux conservation is considered. The formulas obtained are extended to the case when both density and refractive index may have discontinuities at some interfaces.