АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 6, с. 830–835

УДК 534.23

# ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ПРОТЯЖЕННОГО ИСТОЧНИКА В ДВУМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

© 2002 г. Б. П. Шарфарец

196128 Санкт-Петербург, ул. Кубинская 14-70

E-mail:sharg@mail.rcom.ru

Поступила в редакцию 3.12.2001 г.

Рассматривается асимптотическое решение двумерного неоднородного уравнения Гельмгольца в пространстве $R^2$ с переменным показателем преломления. Объемная плотность источника отлична от нуля в конечной области $D$. С помощью специального конформного преобразования исходного пространства показано, что это асимптотическое решение может быть представлено в виде геометрооптического ряда. Приводятся алгоритмы расчета всех характеристик этого ряда. Результаты могут быть использованы для случая реального трехмерного океанического волновода.

Задача расчета полей и откликов протяженных антенн в океанических волноводах привлекает в последнее время достаточно большое внимание [1–8 и др.]. При этом свойства среды на апертуре антенны считаются либо постоянными [2–4, 8 и др.], либо их изменения полагаются пренебрежимо малыми [6], либо расчеты проводятся простым суммированием по всем элементам (интегрированием по апертуре) антенны, не заботясь при этом о вариации свойств среды на раскрыве антенны [1, 5, 7]. В первом и втором случаях авторы совершенно правомерно продолжают пользоваться такой характеристикой антенны, как диаграмма направленности в свободном однородном пространстве, что, однако неправомерно в общем случае, когда вариациями свойств среды на раскрыве антенны пренебречь нельзя. Третий подход оказывается в этом случае малоэффективным и физически непрозрачным.

В настоящей работе рассматривается поле антенны в двумерной неоднородной среде. Учитывается изменение свойств среды на апертуре антенны. При этом сохраняется эффективность и физическая прозрачность, присущая первым двум подходам.

Одним из наиболее эффективных способов решения задач для уравнения Гельмгольца с переменным показателем преломления является метод канонического оператора (см., например, [9] и другие работы В.П. Маслова и других авторов). Отметим, что решается в этих работах, как правило, однородное уравнение с некими неоднородными краевыми условиями. Полученное таким образом решение называется формальным асимптотическим (ФАР), либо квазиклассической асимптотикой. В [10] и ряде других работ получено ФАР для фундаментального решения (функции Грина) уравнения Гельмгольца с переменным показателем преломления в пространстве произвольной размерности. В случае произвольной функции источника решение формально может быть получено в виде свертки соответствующей функции Грина и объемной плотности источника. При этом остается открытым вопрос о возможности представления полученного решения в виде геометрооптического ряда. В работе [11] для уравнения Гельмгольца произвольной размерности с постоянным показателем преломления этот вопрос решен положительно – решение соответствующих краевых задач представимо в виде геометрооптического ряда.

В настоящей работе показана возможность представления ФАР неоднородного двумерного уравнения Гельмгольца с переменным показателем преломления в виде геометрооптического ряда.

Поставим задачу математически

$$L(x, y, -j\partial/\partial x, -j\partial/\partial y)u(x, y) = \\ = [\Delta_2 + k^2 n^2(x, y)]u(x, y) = -f(x, y), \tag{1}$$

$$u(x, y) = O(|\mathbf{r}|^{-1/2}); \\ (\partial/\partial|\mathbf{r}| - jk)u(x, y) = o(|\mathbf{r}|^{-1/2}); \quad \mathbf{r} = (x, y) \in R^2; \tag{2}$$

$$n(x, y) \in C^\infty; \quad n(x, y) > 0; \\ n(x, y) \longrightarrow 1, \quad |\mathbf{r}| \longrightarrow \infty. \tag{3}$$

Скорость спада функции на бесконечности для любого мультииндекса $\alpha$ удовлетворяет условию

$$D_x^\alpha(n(\mathbf{r})) \le c_\alpha(1 + |\mathbf{r}|)^{-|\alpha| - 2}, \quad c_\alpha = \text{const}. \tag{3a}$$

Кроме того, к системе Гамильтона, порождаемой уравнением (1) предъявляется требование отсутствия финитных движений, т.е. все выходящие из точки лучи уходят на бесконечность [10].

Здесь $\Delta_2 = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2$ – оператор Лапласа, $u(x, y)$ – поле звукового давления, $k$ – волновое число, $f(x, y)$ – объемная плотность источника, сосредоточенного в ограниченной области $D = \mathrm{supp} f$; $f(x, y)$ в общем случае может быть обобщенной функцией, тогда речь должна идти об обобщенном решении.

При выполнении приведенных выше условий решение задачи (1)–(3а) существует, единственно и ФАР асимптотически сходится к точному решению [10].

Рассмотрим уравнение для фундаментального решения уравнения Гельмгольца

$$[\Delta_2 + k^2 n^2(x, y)]G(x, x_0, y, y_0) = \\ = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \tag{4}$$

Получение ФАР задачи (4) основано на построении лагранжева многообразия, ассоциированного с нулевым уровнем гамильтониана

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -p_x^2 - p_y^2 + n^2(x, y), \tag{5}$$

соответствующего оператору $L = \Delta_2 + k^2n^2(x, y)$ [9, 10]. Лагранжево многообразие соткано из бихарактеристик, являющихся решениями системы Гамильтона

$$d\mathbf{r}/dt = \partial H/\partial \mathbf{p}; \quad d\mathbf{p}/dt = -\partial H/\partial \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0); \quad \mathbf{p}|_{t=0} = \mathbf{p}_0 = \\ = (p_{0x}, p_{0y}) = (n(x_0, y_0)\cos\varphi, n(x_0, y_0)\sin\varphi). \tag{6}$$

Здесь $(t, \varphi)$ – координаты на лагранжевом многообразии; $\varphi$ – полярный угол на окружности начальных импульсов $|\mathbf{p}_0|^2 = n^2(x_0, y_0)$; $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ – вектор импульсов.

Сделаем следующее допущение. Пусть существует область $D^1$, включающая в себя область $D$, такая, что при ®$\mathbf{r}_0 \in D$ и $\forall \mathbf{r} \in D^1$ получающиеся лагранжевы многообразия однозначно проектируются на $R^2$ и лучи, соединяющие точки $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$, нигде не пересекаются, т.е. лежат на неособой карте.

Известно [10], что на неособой карте ФАР задачи (4) имеет вид

$$G_N(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, k) = \frac{-j}{2\sqrt{\pi k}} \times \\ \times \frac{\exp(j(kS - j\pi/2\gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) - \pi/4))}{|J(\mathbf{r}_0, t, \varphi)|^{1/2}} \sum_{n=0}^{N+2} \frac{\varphi_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{(jk)^n}. \tag{7}$$

Здесь $S(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}(t, \varphi))$ – эйконал по лучу, соединяющему точки $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$; $\varphi_n$ – амплитуды переноса, $\varphi_0 = 1$ а остальные определяются рекурсией [10]; $J(\mathbf{r}_0, t, \varphi) = D(x, y, \mathbf{r}_0)/D(t, \varphi)$ – якобиан перехода от координат $(x, y)$ к координатам $(t, \varphi)$; $\gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ равно числу нулей якобиана с учетом их кратности на интервале $(0, t)$. Неособость карты говорит о том, что по всей траектории луча от $\mathbf{r}_0$ до $\mathbf{r}$ якобиан отличен от нуля, а эти точки соединяет единственный луч. Величина $\gamma$ в этом случае равна нулю.

ФАР $G_N$ удовлетворяет уравнению

$$LG_N(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) + o(k^{-N-1}).$$

Зная $G_N$, решение уравнения (1) можно формально найти из свертки

$$u_N = -\int_D f(\mathbf{r}_0)G_N(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})d r_0 = \\ = \beta\int_D f(\mathbf{r}_0)\frac{\exp(jkS(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}))}{|J(\mathbf{r}_0, t, \varphi)|^{1/2}} \sum_{n=0}^{N} \frac{\varphi_n(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{(jk)^n} d r_0, \tag{8}$$

где $u_N$ – ФАР уравнения (1) и удовлетворяет уравнению $Lu_N = -f(x, y) + o(k^{-N-1})$; $\beta = \dfrac{j}{2\sqrt{\pi k}}\exp(-j\pi/4)$.

Как видно из (8), ФАР $u_N$ не представлен в виде геометрооптического ряда типа (7), для которого характерны следующие признаки [9]: ряд должен иметь форму (7); эйконал, амплитуды переноса и якобиан должны соответствовать лагранжеву многообразию, отвечающему системе Гамильтона (6); амплитуда переноса нулевого приближения $\varphi_0$ должна сохранять постоянное значение на траектории луча, а остальные амплитуды переноса находятся с помощью $\varphi_0$ из рекурсии. Поэтому алгоритм вычисления ФАР методом функций Грина (МФГ) (8) показывает его практическую малопригодность вследствие того, что для каждой точки $\mathbf{r}$ всю трудоемкую процедуру вычисления ФАР в виде (8) необходимо каждый раз проделывать от начала и до конца для каждой точки $\mathbf{r}_0 \in D$.

Отметим, что применение метода стационарной фазы не позволяет получить геометрооптического ряда из ФАР в виде (8) для двумерного случая, либо в виде подобного ему интеграла в $n$-мерном случае, так как эйконал $S(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ не имеет точки стационарной фазы в силу того, что $\nabla_{\mathbf{r}_0} S(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \mathbf{p}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \neq 0$, что следует из (3) и равенства нулю гамильтониана (5). Здесь $\mathbf{p}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ – вектор импульса в точке $\mathbf{r}_0$ на луче, соединяющем точки $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$. Но даже если бы стационарная точка существовала, то ее положение зависело бы от текущей точки $\mathbf{r}$, входящей в качестве параметра в фазовую функцию $S(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$.

Покажем, тем не менее, что при сделанных допущениях ФАР $u_N$ допускает представление в виде геометрооптического ряда. Для этого проведем конформное отображение в (1), перейдя от координат $(x, y)$ к координатам $(\xi_1, \xi_2)$. Пусть $\omega = \omega(z) = \xi_1 + j\xi_2$ – конформное отображение комплексной переменной $z = x + jy$. Тогда лапласиан преобразуется к виду [12, с. 334, 474]

$$\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 =$$
$$= 4\partial^2/\partial z\partial\bar{z} = (\partial^2/\partial\xi_1^2 + \partial^2/\partial\xi_2^2)|d\omega/dz|^2.$$

С учетом этого (1) преобразуется к виду

$$\{|d\omega/dz|^2(\partial^2/\partial\xi_1^2 + \partial^2/\partial\xi_2^2) +$$
$$+ k^2n^2[x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)]\}u[x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)] = \quad (9)$$
$$= -f[x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)].$$

Согласно [12], $|dz/d\omega| = [(\partial x/d\xi_1)^2 + (\partial y/d\xi_1)^2]^{1/2} = [(\partial x/d\xi_2)^2 + (\partial y/d\xi_2)^2]^{1/2} = h_1 = h_2$, где $h_{1,2}$ – коэффициенты Ламе, которые равны между собой для случая конформного отображения. Справедливо равенство [13] $J_{z\to\omega}(\xi_1, \xi_2) = D(x, y)/D(\xi_1, \xi_2) = h_1h_2$. Здесь $J_{z\to\omega}$ – якобиан перехода $(x, y) \longrightarrow (\xi_1, \xi_2)$. Следовательно $J_{z\to\omega}(\xi_1, \xi_2) = |dz/d\omega|^2$.

Пусть существует аналитическая функция $\omega(z)$ такая, что в области $D^1$ имеет место равенство

$$|d\omega/dz|^2 = n^2(x, y), \quad (10)$$

а, следовательно $|d\omega/dz|^2 \neq 0$ (см. (3)), то (9) преобразуется к виду (алгоритм восстановления аналитической функции по ее модулю приведен в приложении)

$$(\partial^2/\partial\xi_1^2 + \partial^2/\partial\xi_2^2 + k^2)u(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) =$$
$$= -J_{z\to\omega}(\xi_1, \xi_2)f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)). \quad (11)$$

Как видно из (11), получено неоднородное уравнение Гельмгольца с постоянным показателем преломления. Очевидно, что при таком преобразовании лучи спрямляются, а волновые фронты, перпендикулярные лучам, в случае точечного источника представляют собой окружности.

Зафиксируем некую точку $\mathbf{r}^0 = (x^0, y^0) \in D$. Точка $\mathbf{r}^0$ может быть, например геометрическим центром антенны, либо выбираться из каких-либо других соображений, о чем будет сказано ниже. Введем обозначение $\rho = [(\xi_1 + \xi_1^0)^0 + (\xi_2 + \xi_2^0)^2]^{1/2}$, где $(\xi_1^0, \xi_2^0) \in \overline{D}$; точка $(\xi_1^0, \xi_2^0)$ на плоскости $\omega$ соответствует точке $(x^0, y^0)$ на плоскости $z$, а $\overline{D}$ – область на плоскости $\omega$, соответствующая области $D^1$ на плоскости $z$. При отсутствии обратного рассеяния на границе $\partial\overline{D}^1$ между областями $\overline{D}^1$ и $R_\omega^2\backslash\overline{D}^1$, что легко достигается гладким продолжением показателя преломления на область $R^2\backslash\overline{D}^1$, решение уравнения (11) может быть представлено в виде следующего геометрооптического ряда [11]:

$$\bar{u}(\rho, \varphi') \approx \frac{j}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\exp(-j\pi/4)\frac{\exp(jk\rho)}{\rho^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n(\varphi')}{(k\rho)^n}. \quad (12)$$

Здесь $(\rho, \varphi')$ – полярные координаты на $\omega$-плоскости относительно точки $(\xi_1^0, \xi_2^0)$; $\bar{u}(\rho, \varphi') = u(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2))$; функция $D_0(\varphi')$ определяется из выражения

$$D_0(\varphi) = \int\limits_{\overline{D}}\bar{f}(\boldsymbol{\xi})J_{z\to\omega}(\boldsymbol{\xi})\exp(-j\mathbf{k}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0))d^2\xi. \quad (13)$$

Здесь $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, $\boldsymbol{\xi}^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0)$, $\bar{f}(\boldsymbol{\xi}) = f[x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)]$, $\mathbf{k} = (k, \varphi)$. Высшие амплитуды переноса определяются рекурсией [11]

$$D_{n+1}(\varphi') = \frac{[\partial^2/\partial\varphi'^2 + n(n+1) + 1/4]}{2j(n+1)}D_n(\varphi'). \quad (14)$$

Теперь, чтобы получить геометрооптическое представление поля в исходном пространстве $(x, y)$, необходимо вернуться к нему в выражении (12), произведя соответствующие замены переменных. Однако, проще это сделать, сравнивая ФАР фундаментальных решений в обоих конфигурационных пространствах.

Отметим, что при переходе от уравнения (1), к уравнениям (9) и (11) меняется конфигурационное пространство (в случае (1) это плоскость $(x, y)$, в случае (9) и (11) это плоскость $(\xi_1, \xi_2)$). Для уравнения (9) исходный гамильтониан (5) просто записывается в новых переменных и равен

$$H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) = \left|\frac{d\omega}{dz}\right|^2(-p_{\xi_1}^2 - p_{\xi_2}^2) + n^2(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)),$$
$$\mathbf{p} = (p_{\xi_1}, p_{\xi_2}). \quad (5a)$$

В случае уравнения (11) изменяется гамильтониан, который в данном случае равен

$$H_1(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) = -p_{\xi_1}^2 - p_{\xi_2}^2 + 1. \quad (15)$$

Поэтому для уравнения (11) и соответственно гамильтониана (15) лагранжево многообразие, сотканное из соответствующих бихарактеристик, будет отличаться от лагранжева многообразия, соответствующего уравнениям (1) и (9) и гамильтонианам (5) и (5а). Отметим, однако, что в случае выполнения условий (3) и (10), решения уравнений (1), (9) и (11) совпадают. Поэтому, вследствие гладкой замены переменных карт существует взаимно однозначное соответствие (диффеоморфизм) между точками соответствующих бихарактеристик на обоих лагранжевых многообразиях, т.е. многообразиях, соответствующих гамильтонианам (5), (5а) и (15), а, следовательно, и взаимно однозначное соответствие между параметрами $t$ и $t'$, соответствующих этим многообразиям (см. систему (6)).

Решение системы Гамильтона (6) для гамильтониана (15) с начальным условием $\boldsymbol{\xi}|_{t'=0} = \boldsymbol{\xi}^0$ дает $J(\boldsymbol{\xi}^0, t'\ \varphi') = D(\xi_1, \xi_2, \boldsymbol{\xi}^0)/D(t', \varphi') = 4t'$, $\rho = 2t'$, $S(\boldsymbol{\xi}^0, \varphi', t') = 2t'$. Здесь $(\varphi', t')$ – координаты на лагранжевом многообразии, соответствующем гамильтониану (15). Поскольку преобразование $(x, y) \longrightarrow (\xi_1, \xi_2)$ конформно, то углы $\varphi$ на окружности начальных импульсов $p_{0x}^2 + p_{0y}^2 = n^2(x^0, y^0)$ и углы $\varphi'$ на окружности начальных импульсов $p_{\xi_1^0}^2 + p_{\xi_2^0}^2 = 1$ отличаются на константу $\alpha$: $\varphi = \varphi' + \alpha$. Примем для простоты, что после соответствующего смещения имеет место равенство $\varphi = \varphi'$. Тогда в силу описанного выше диффеоморфизма существует гладкая зависимость между параметрами $t$ и $t'$ на соответствующих бихарактеристиках. Пусть имеет место зависимость $t' = \psi(\varphi, t)$. Найдем ее. Выпишем выражение для фундаментального решения в области $\overline{D}^1$ плоскости $\omega$, т.е. в (11) функция источника равна $f(x, y) = -\delta(x - x^0)\delta(y - y^0)$. Тогда, учитывая равенство [12, с. 769] $\delta(x - x^0)\delta(y - y^0) = \dfrac{\delta(\xi_1 - \xi_1^0)\delta(\xi_2 - \xi_2^0)}{|dz/d\omega|^2}$, получаем уравнение для фундаментального решения

$$(\partial^2/\partial\xi_1^2 + \partial^2/\partial\xi_2^2 + k^2)G(x(\boldsymbol{\xi}), y(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}^0, k) =$$
$$= \delta(\xi_1 - \xi_1^0)\delta(\xi_2 - \xi_2^0), \quad \boldsymbol{\xi} \in \overline{D}^1, \quad \boldsymbol{\xi}^0 \in \overline{D},$$

которое известно [12]: $G = \frac{-j}{4}H_0^{(1)}(k\rho)$ или, если воспользоваться разложениями (12)–(14), в геометрооптическом виде

$$G \approx \frac{-j}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\exp(-j\pi/4)\frac{\exp(jk\rho)}{\rho^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{(k\rho)^n}, \quad d_0 = 1. \tag{16}$$

Естественно, что (16) с точностью до константы описывает асимптотику функции Ханкеля. Если теперь в выражение (16) подставить соответствующие значения $J(\boldsymbol{\xi}^0, t'\, \varphi') = 4t'$, $\rho = 2t'$, $S = 2t'$, и сравнить его с эквивалентным ему выражением (7) то получим следующие соотношения:

$$t' = |J(\boldsymbol{\xi}^0, t, \varphi)|/4, \quad d_0 = \varphi_0 \equiv 1,$$
$$\varphi_n = d_n\frac{j^n}{(|J(\boldsymbol{\xi}^0, t, \varphi)|/2)^n}. \tag{17}$$

С учетом (17) можно теперь записать решение (12) в исходном пространстве $(x, y)$

$$u(x, y) \approx \frac{j}{2\sqrt{\pi k}} \times$$
$$\times \frac{\exp\left(j\left(kS(\mathbf{r}^0, \varphi, t) - \frac{\pi}{2}\gamma(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}) - \pi/4\right)\right)}{|J(\mathbf{r}^0, \varphi, t)|^{1/2}} \times \tag{18}$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi_n(\mathbf{r}^0, \varphi, t)}{(jk)^n},$$

где

$$\Phi_0 = D_0 = \int_{\overline{D}}\bar{f}(\boldsymbol{\xi})J_{z\to\omega}(\boldsymbol{\xi})\exp(-j\mathbf{k}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0))d^2\xi, \tag{19}$$

а $D_n$ и $\Phi_n$ связаны соотношением (17):

$$\Phi_n = D_n\frac{j^n}{(|J(\mathbf{r}^0, t, \varphi)|/2)^n}.$$

Проведенные рассуждения показали, что ФАР задачи (1) может быть представлено в виде геометрооптического ряда, для чего кроме обычных характеристик ФАР, не зависящих от свойств источника (эйконал, фазовые траектории, якобиан) необходимо вычислять значение амплитуды переноса нулевого приближения (19), характеризующей собственно свойства источника. Выражение (19) необходимо вычислять в пространстве $(\xi_1, \xi_2)$, для чего необходимо проводить соответствующее конформное преобразование, что не всегда может быть удобным. Опишем, каким образом эта трудность может быть преодолена. Для этого выясним, чему в исходном пространстве $(x, y)$ соответствуют плоские волны $\exp(j\mathbf{k}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0))$ в области $\overline{D}^1$.

Плоский фронт в $\overline{D}^1$ есть предел, к которому стремится фронт цилиндрической волны при неограниченном росте расстояния между точками $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\xi}^0$. Следовательно, плоский фронт в области $\overline{D}^1$ соответствует предельному фронту в области $D^1$ при неограниченном росте $\mathbf{r}$. В силу условий стабилизации (3) при $|\mathbf{r}| \longrightarrow \infty$ этот предельный фронт также стремится к плоскому.

Ключевым обстоятельством в дальнейших рассуждениях является тот факт, что, если на пути фазовой траектории гладко варьировать показатель преломления в рамках условий (3) (4), то значение амплитуды переноса нулевого приближения остается неизменным в отличие от остальных характеристик ФАР. Таким образом, амплитуда переноса нулевого приближения является неким инвариантом ФАР, не реагирующим на гладкие возмущения на пути фазовой траектории. Отсюда возникает возможность такого варьирования показателя преломления на пути фазовых траекторий, которое максимально облегчает вычисление значений амплитуд переноса нулевого приближения.

Такой вариацией, очевидно, является гладкое приведение показателя преломления к стационарному значению $n(x, y) \equiv 1$ за пределами $D_1 = D \cup D_\varepsilon$, $D_1 \subset D^1$, где $D_\varepsilon$ – некая малая окрестность $D$ при условии гладкого продолжения показателя преломления $n(x, y)$ и его производных до константы, что необходимо для избежания отражений и ложных каустик. Тогда плоская волна $\exp(j\mathbf{k}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0))$ в области $\overline{D}^1$ будет соответствовать рефрагирующей на области $D_1$ плоской волне в деформированным описанным образом пространстве $(x, y)$. Таким образом, эйконал $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0)$ в области $\omega$ преобразуется к эйконалу $\bar{S}(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}_0, \varphi) = \bar{S}(\mathbf{r}_0, \varphi) - \bar{S}(\mathbf{r}^0, \varphi)$; $\mathbf{r}^0, \mathbf{r}_0 \in D_1$. Здесь $\bar{S}(\mathbf{r}_0, \varphi)$ – значение эйконала на фронте рефрагирующей волны в точке $\mathbf{r}_0$ при падении на область $D_1$ плоской волны $\exp(j\mathbf{kr})$, приходящей из бесконечности с такого направления, чтобы при рассеянии ее на области $D_1$ луч прошел через точку $\mathbf{r}^0$ под искомым углом $\varphi$. Тогда, если вернутся в интеграле (13) к переменным $(x, y)$, то получим

$$\Phi_0(\varphi) = D_0(\varphi) =$$

$$= \int_D f(\mathbf{r}_0)\exp(-jk\bar{S}(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}_0, \varphi))dx_0dy_0.$$

После нахождения величины $\Phi_0(\varphi)$ можно вернуться в первоначальное конфигурационное пространство $(x, y)$ и воспользоваться выражением (18) для нахождения ФАР уравнения (1). Отметим, что в случае постоянного показателя преломления $\Phi_0(\varphi)$ представляет собой диаграмму направленности антенны.

Рассмотрим пример применения описанного алгоритма. Пусть показатель преломления удовлетворяет условиям существования конформного отображения (см. приложение) и является функцией только одной координаты $n(x, y) = n(y)$. Выберем $\mathbf{r}^0 \in D$ и найдем ФАР на луче, выходящем из $\mathbf{r}^0$ под углом $\pi/2$ к оси $x$. Очевидно, в силу геометрии луч будет прямым, параллельным оси $y$. Именно к этому случаю после квазиразделения переменных сводится расчет ФАР в сечении $x = \text{const}$ в трехмерном волноводе, показатель преломления и глубина в котором зависят только от переменной $y$.

Очевидно, что фронт $\bar{S}(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}_0) = \text{const}$ будет плоским, перпендикулярным выбранному лучу, а сам эйконал равен $\bar{S}(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}_0) = \int_{y^0}^{y_0} n(y)dy = \bar{S}(y^0, y_0)$. Здесь $\mathbf{r}^0 = (x^0, y^0)$; $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$. Вычисления дают $\Phi_0(\mathbf{r}^0, \pi/2) = \int_D f(\mathbf{r}^0)\exp(-jk\int_{y^0}^{y_0} n(y)\,dy)dx_0dy_0$.

Таким образом, в работе показана возможность представления ФАР задачи (1) для распределенного источника в виде геометрооптического ряда, "привязанного" к точке $\mathbf{r}^0$.

При выборе точки $\mathbf{r}^0 \in D$ был допущен произвол, поэтому при таком выборе необходимо исходить из некоего критерия, например минимизации невязки между усеченным рядом ФАР (18) и точным решением задачи (1), что, впрочем, представляет собой тему для отдельной публикации.

Полученные результаты могут быть использованы для расчета полей протяженных источников в реальных трехмерных океанических волноводах, как регулярных для вертикальной линейной антенны, так и нерегулярных для произвольных антенн, когда именно к рассмотренному случаю редуцируется трехмерная задача при квазиразделении в ней переменных [14].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть задан модуль аналитической функции $f(z) = d\omega(z)/dz$: $\rho(x, y) = |f(z)|$. Необходимо восстановить по модулю функцию $f(z)$, а затем и $\omega(z)$. Запишем $f(z)$ в показательной форме $f(z) = \rho(x, y)\exp(j\theta(x, y))$. Тогда действительная и мнимая составляющие выражаются в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \rho(x, y)\cos[\theta(x, y)]; \\ v(x, y) &= \rho(x, y)\sin[\theta(x, y)]. \end{aligned} \tag{а}$$

Рассмотрение аналитической функции $\ln f(z)$ приводит к выводу о том, что $\ln[\rho(x, y)]$, а значит и $\ln[n(x, y)]$ (см. (10)) должна быть гармонической функцией.

После подстановки (а) в условия Коши-Римана приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial x}\cos\theta - \rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta &= \frac{\partial\rho}{\partial y}\sin\theta + \rho\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta; \\ \frac{\partial\rho}{\partial y}\cos\theta - \rho\frac{\partial\theta}{\partial y}\sin\theta &= -\frac{\partial\rho}{\partial x}\sin\theta - \rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\theta. \end{aligned} \tag{б}$$

Выражая в (б) $\operatorname{tg}\theta$, получаем $\frac{\rho'_x - \rho\theta'_y}{\rho'_y + \rho\theta'_x} = \frac{\rho'_y - \rho\theta'_x}{-(\rho'_x + \rho\theta'_y)}$ или

$$-(\rho'_x - \rho\theta'_y)^2 = (\rho'_y + \rho\theta'_x)^2. \tag{в}$$

Равенство (в) может быть удовлетворено только при равенстве нулю обеих его частей вследствие того, что в нем фигурируют только действительные функции. Отсюда получаем выражения для вычисления $\theta$: $\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}$. Окончательно для $\theta$ имеем

$$\theta = \int\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}dy\right) = \int\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}dx + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}dy\right). \tag{г}$$

Заметим, что в последнем интеграле фактически фигурируют производные действительной составляющей функции $\ln[f(z)]$.

Таким образом, однозначно восстановлена исходная аналитическая функция $f(z) =$

$= \rho(x, y)\exp[j\theta(x, y)]$. При этом предполагается, что $\ln[n(x, y)]$, $(x, y) \in D^1$ – гармоническая функция. В противном случае необходимо аппроксимировать $n(x, y)$ модулем некой аналитической функции при условии, что возмущение поля $u(x, y)$ будет невелико.

Исходная функция $\omega(z)$ легко может быть восстановлена по функции $f(z)$ в ее области аналитичности по алгоритму, описанному в [12, с. 346, 347]. Функция $\omega(z)$ при этом также остается аналитической.

Приведем пример. Пусть в области $D$ показатель преломления описывается следующим образом $n(x, y) = \rho(x, y) = \exp(\alpha_1 x + \alpha_2 y)$. Тогда $\ln[\rho(x, y)] = \alpha_1 x + \alpha_2 y$ – гармоническая функция. Вычисление по (г) дает $\theta(x, y) = \int -\alpha_2 dx + \alpha_1 dy = -\alpha_2 x + \alpha_1 y + C$. Тогда с точностью до константы имеем $\ln[f(z)] = (\alpha_1 - j\alpha_2)z$. Откуда $f(z) = \exp[(\alpha_1 - j\alpha_2)z]$ и, следовательно $\omega(z) = \dfrac{1}{\alpha_1 - j\alpha_2}\exp[(\alpha_1 - j\alpha_2)z]$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Белогорцев А.С., Шоркина Е.В.* К оценке направленности излучения протяженного источника в волноводе // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 3. С. 435–438.
2. *Елисеевнин В.А.* Коэффициент концентрации плоской прямоугольной вертикальной антенны в волноводе // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 4. С. 427–431.
3. *Степанов А.Н.* Модовое представление поля направленного излучателя в волноводе // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 2. С. 291–292.
4. *Степанов А.Н.* Поле направленного гидроакустического излучателя в волноводе Пекериса // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 2. С. 278–280.
5. *Кудряшов В.М.* Антенная решетка в звуковом поле волновода арктического типа // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 5. С. 662–670.
6. *Кузькин В.М.* Об излучении и рассеянии звуковых волн в океанических волноводах // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 5. С. 678–684.
7. *Злобина Н.В., Касаткин Б.А.* Акустическое поле вертикальной цилиндрической гидроакустической антенны в неоднородном волноводе с импедансной нижней границей // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 802–808.
8. *Злобина Н.В., Касаткин Б.А.* Излучатель поршневого типа в мягком экране волновода Пекериса // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 1. С. 61–69.
9. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 292 с.
10. *Кучеренко В.В.* Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера // Теоретическая математическая физика. 1969. Т. 1. № 3. С. 384–406.
11. *Косырев Б.А., Шарфарец Б.П.* Поле протяженного источника в нерегулярных океанических волноводах. Препринт. Владивосток: ТОИ ДВО АН СССР, 1991. 46 с.
12. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 930 с.
13. *Арфкен Г.А.* Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
14. *Шарфарец Б.П.* Поле протяженного излучателя в нерегулярном океаническом волноводе // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 2. С. 345–349.


# Geometrooptical Representation of the Field Produced by an Extended Source in a Two-Dimensional Inhomogeneous Medium


**B. P. Sharfarets**

*ul. Kubinskaya 14–70, St. Petersburg, 196128 Russia*

*e-mail: sharg@mail.rcom.ru*



**Abstract**—An asymptotic solution to the two-dimensional inhomogeneous Helmholtz equation in the $R^2$ space with a variable refractive index is considered. The volume density of the source is nonzero in a finite region $D$. A special conformal transformation of the original space is used to show that this asymptotic solution can be represented as a geometrooptical series. Algorithms for calculating all characteristics of this series are presented. The results can be applied to a real three-dimensional oceanic waveguide.