АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 1, с. 110–122

УДК 534

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ФИЗИКЕ, ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ И ИСКУССТВЕ[1]

© 2003 г. М. Р. Шредер

Геттингенский университет, Третий физический институт
Геттинген, Германия, и Белл Лабораториз АТТ, США
E-mail: mrs@physik3.gwdg.de

Поступила 27.08.2002 г.

В этой статье обсуждается числовые последовательности, которые могут представлять интерес для физиков, инженеров и деятелей искусства. Наиболее важными из них являются последовательности Галуа максимальной длины, основанные на простом числе 2 и больших простых числах, которые широко используются в физике, включая акустику, и в технических науках: (1) при измерении импульсных откликов в концертных залах, радиолокационных сигналов, отраженных от планет (для проверки общей теории относительности), и времен распространения в глубоководном звуковом канале (для мониторинга температуры воды и глобального потепления); (2) в исследованиях пространственного рассеяния звуковых волн, когерентного (лазерного) света и электромагнитных волн; (3) в алгебраических кодах исправления ошибок (симплекс-коде и коде Хемминга); (4) для минимизации амплитудных коэффициентов в радио- и гидролокации, в синтезированной речи и компьютерной музыке; (5) для создания рентгеновских изображений с использованием двумерных масок (в рентгеновской астрономии). Другие последовательности включают в себя (1) квадратично-вычетные последовательности для конструирования широкополосных рассеивающих отражательных фазовых решеток в одном или двух измерениях; (2) последовательности Морзе-Ту и Фибоначчи, "кроличьи" последовательности и их возможности в музыке; (3) некоторые самоподобные числовые последовательности, порождающие привлекательные изображения, ритмы и мелодии.

ВВЕДЕНИЕ

Теория чисел с незапамятных времен рассматривалась как ярчайший пример чистой (некоторые сказали бы – бесполезной) математики. По мнению Карла Фридриха Гаусса, всю жизнь бывшего кудесником в арифметике, теория чисел – королева математики. Что может быть более прекрасным, чем приносящие глубокое удовлетворение соотношения между целыми числами? (Так и хочется сказать – цельными числами.) В самом деле, трудно придумать определение более подходящее, чем их ученое название – "интегеры", что значит "нетронутые". Насколько выше они стоят в царстве чистой мысли и эстетики, чем их меньшие братья – действительные и комплексные числа!

Да, как мы увидим далее, теория чисел может давать совершенно неожиданные ответы на вопросы, поставленные реальным миром. В частности, мы сосредоточимся на последовательностях чисел, которые нашли широкое применение в акустике концертных залов, глубоководном океанском мониторинге глобального потепления, точном радиолокационном измерении расстояний между планетами для проверки общей теории относительности Эйнштейна, кодах исправления ошибок для Интернета, рентгеновской астрономии, синтезе речи и создании музыкальных ритмов и мелодий.

ПОЛЯ ГАЛУА

Чистая, непрерывная синусоидальная волна имеет спектр мощности с единственным частотным компонентом, однако его огибающая постоянна во времени. В отличие от этого, острый импульс имеет спектр мощности, состоящий из многих частотных компонент, однако, конечно же, его огибающая ограничена коротким временным интервалом. Таким образом, при заданной максимальной амплитуде острый импульс не несет много энергии. Существуют ли формы сигналов, содержащие много частот, т.е. широкополосные сигналы, чья энергия распределена более равномерно во времени, что позволяло бы передавать больше энергии (например, при помощи активного радио- или гидролокатора дальнего действия)? Это – один из наиболее фундаментальных и распространенных вопросов в современных методах формирования сигналов. Ответ на этот вопрос – твердое "да". Действительно, существуют периодические широкополосные сигналы, дискретные спектральные компоненты которых имеют постоянную величину и их амплитуды также имеют

[1] Статья написана на основе работы автора "Number theory in science and communication", 3-е изд., 1997, Шпрингер.

постоянную во времени величину, скажем, ±1. Это звучит слишком хорошо, чтобы быть правдой. Тем не менее, теория чисел показывает, что это возможно.

Раздел теории чисел, из которого следует этот удивительный результат, называется теорией конечных полей. (В некоторых языках слово "поле" часто заменяется словом, происходящим от латинского слова "corpus" ("тело"), как, например, в немецком языке – "Zahlkorper".) Конечные поля, называемые также полями Галуа (по имени французского математика Эвариста Галуа (1811–1832 гг.)) и представляющие для нас интерес, основаны на простых числах p и их степенях p^m. Например, конечное поле, основанное на простом числе 5, имеет 5 элементов – 0, 1, 2, 3, 4, и все арифметические операции выполняются по модулю 5, т.е., рассматриваются только остатки по модулю 5. Таким образом, 3 + 4 не равняется 7, как в обычной арифметике, а 3 + 4 равно 2, т.е. остатку при делении 7 на 5. Подобным же образом, при умножении 2 × 4 равно 3 по модулю 5, а при делении – 2/4 также равно 3 (т.к. 4 × 3 равно 2 по модулю 5). Приведем список обратных величин в поле Галуа (5): $\frac{1}{2} = 3$, $\frac{1}{3} = 2$, $\frac{1}{4} = 4$. Конечные поля, основанные на степенях p^m, обычно представляют "векторами" в m измерениях, причем каждый векторный компонент является одним из элементов 0, …, $p - 1$. Таким образом, конечное поле Галуа (2^2) состоит из следующих двумерных двоичных векторов: 00, 01, 10, 11. Сложение выполняется по месту (без переносов) по модулю p. Так, например, 01 + 11 = 10.

При умножении векторы представляются полиномами. Так, полином $x + 1$ соответствует вектору 10 и т.д. При перемножении двух векторов перемножаются их полиномы по модулю примитивного полинома, который, таким образом, играет роль простого числа. Для поля Галуа (2^2) примитивным полиномом является $x^2 + x + 1$. Приравнивание его нулю ($x^2 + x + 1 = 0$ или $x^2 = x + 1$) означает отождествление x^2 с $x + 1$.

Например, 10 × 11, записанное как произведение двух полиномов, становится $x \times (x + 1) = x^2 + x = x + 1 + x = 2x + 1 = 1$ (заметим, что в полях, основанных на простом числе 2, 2 = 0 и –1 = +1). "Полином" 1 соответствует вектору 01. Следовательно, окончательно 10 × 11 = 01. Это выглядит забавно, но является правильным и непротиворечивым!

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГАЛУА

Примитивные полиномы используются в конечных полях Галуа (p^m) прежде всего для генерации последовательностей Галуа, известных также как последовательности максимальной длины, т.е. периодических последовательностей с длиной периода $p^m - 1$, таких, что их ДПФ (дискретное преобразование Фурье) имеет постоянную величину (является "плоским"), в то время как в случае $p = 2$ значения амплитуды этих последовательностей ограничены двумя значениями {0, 1} или, после простого преобразования, {+1, –1} [1].

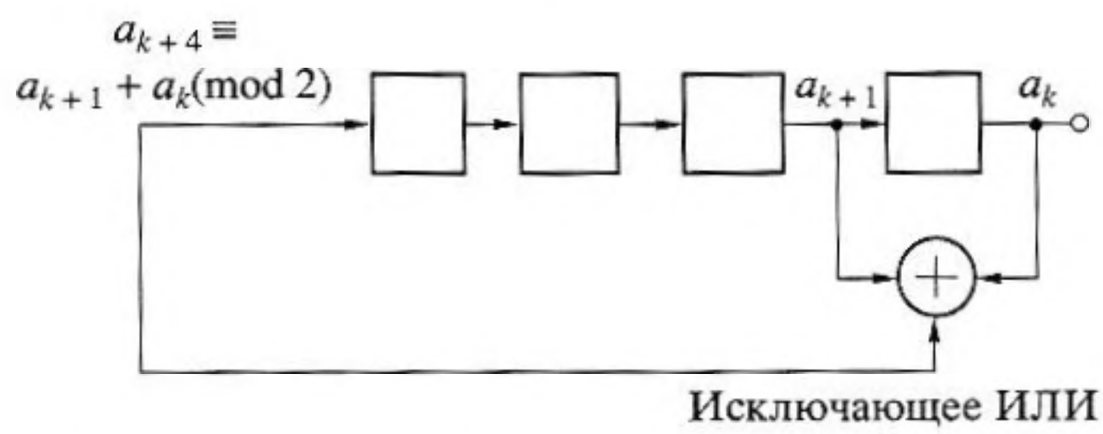

Рис. 1. Четырехступенчатый линейный сдвиговый регистр с обратной связью, использующий схему функции "исключающее ИЛИ".

Исследуем генерацию последовательности Галуа и ее свойства для случая $p = 2$ и $m = 3$, т.е. в случае поля Галуа (2^3). Примитивный полином для поля Галуа (2^3) $p(x) = x^3 + x + 1$. Теперь рассмотрим величину, обратную $p(x)$, т.к. обычный метод генерации последовательностей Галуа, а именно, с помощью линейной рекурсии, соответствует определению обратных величин:

$$\frac{1}{p(x)} = (x^4 + x^2 + x + 1)(1 + x^7 + x^{14} + \ldots).$$

Первый множитель, записанный в виде двоичной последовательности, представляет собой 0010111. (Заметим, что в поле Галуа (2^3) вектора имеют $2^3 - 1 = 7$ измерений. Следовательно, два нуля слева от 10111 отражают тот факт, что члены x^5 и x^6 в первом сомножителе отсутствуют, т.е. имеют нулевые коэффициенты.) Второй сомножитель ($1 + x^7 + x^{14} + \ldots$) значит, что последовательность 0010111 повторяется с периодом 7:

$$a_k = 0010111, 0010111, 001\ldots. \quad (1)$$

Необходимо отметить, что a_k подчиняется следующей рекурсии:

$$a_{k+3} = a_{k+1} + a_k \quad (2)$$

что следует непосредственно из "генерирующего" полинома $p(x)$, приравненного нулю:

$$x^3 + x + 1 = 0,$$

$$x^3 = x + 1$$

(еще раз заметим, что –1 равняется +1 для $p = 2$).

Рекурсивная формула (2) для последовательности Галуа (1) может быть реализована непосредственно электронным образом с помощью сдвигового регистра с линейной обратной связью (рис. 1). Поэтому последовательности Галуа на-

зывают также "последовательностями сдвигового регистра" [2].

Генерацию последовательности Галуа с помощью компьютерной программы мы начнем с некоторых начальных условий (не со всех нулей), например, с 001, и сгенерируем следующий член путем прибавления (по модулю 2) двух самых левых членов (0 0), что в результате дает

0 0 1 0.

После этого мы прибавляем следующие два члена (0 1) и получаем

0 0 1 0 1.

Повторяя этот процесс прибавления (по модулю 2) последовательных пар членов, мы получаем

0 0 1 0 1 1

0 0 1 0 1 1 1

0 0 1 0 1 1 1 0

0 0 1 0 1 1 1 0 0

0 0 1 0 1 1 1 0 0 1

и т.д.

Результирующая последовательность повторяется после $2^3 - 1 = 7$ шагов, как она и должна: трехступенчатый сдвиговый регистр может содержать максимум $2^3 = 8$ разных двоичных триплетов, все из которых, кроме триплета {0, 0, 0}, имеют место только один раз (если полином $p(x)$ – примитивный!). Как следствие, количество единиц за период составляет 2^{m-1}, т.е. в случае $m = 3$ оно равно 4. (Количество нулей равно $2^{m-1} - 1$, т.е. 3 для $m = 3$.)

Вместо первичного кода, состоящего из {0, 1}, часто предпочитают использовать первичный код из {+1, –1}. Таким образом, вместо генерации импульса (1) или отсутствия его генерации (0) используются положительный (+1) и отрицательный (–1) импульсы. Общая формула для преобразования асимметричного первичного кода $a = \{0, \ldots, p-1\}$ в симметричный первичный код b

$$b = \exp\left(\frac{2\pi i a}{p}\right).$$

Таким образом, в случае двоичного первичного кода ($p = 2$) $a = 0$ отображается в +1, а $a = 1$ – в $\exp(\pi i) = -1$. (Коды b известны в математике как корни единицы степени p. Они расположены на единичной окружности в комплексной плоскости.)

Таким образом, приведенная выше последовательность $a_k = 0010111, 001\ldots$ преобразуется в $b_k = + + - + - - -, + + -\ldots$, где "+" стоит вместо +1, а "–" – вместо –1.

Для b_k сложение в рекурсивной формуле (2) превращается в умножение:

$$b_{k+3} = b_{k+1} b_k,$$

или, эквивалентно,

$$b_k = b_{k-2} b_{k-3}. \tag{3}$$

Заметим, что количество чисел +1 за период на одно меньше, чем количество чисел –1.

Теперь рассмотрим последовательность круговой корреляции b_k, определяемую как

$$c_n = \sum_{k=0}^{2^m-2} b_k b_{k+n}. \tag{4}$$

Для $n = 0$ мы получаем просто $c_0 = 2^m - 1$. В случае $n \neq 0$ легко показать, что произведение $b_k b_{k+1}$ равно простому сдвигу b_k, скажем, на s:

$$b_k b_{k+n} = b_{k+s}.$$

Таким образом, корреляции определяются суммированием b_k по одному периоду:

$$c_n = \sum_{k=0}^{2^m-2} b_{k+s},$$

или, учитывая, что период для b_k составляет $2^m - 1$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{2^m-2} b_k,$$

что равняется –1. Таким образом, автокорреляционная последовательность c_n для b_k имеет только два значения:

$$c_0 = 2^m - 1,$$

$$c_n = -1$$

для $n = 1, \ldots, 2^m - 2$.

ДПФ такой последовательности из двух значений тоже имеет только два значения. Действительно, спектр мощности $|B_n|^2$ – "плоский":

$$|B_0|^2 = 1$$

и

$$|B_n|^2 = 2^m$$

для $n = 1, \ldots, 2^m - 2$. Таким образом, за исключением "выпрямленного" компонента $|B_0|^2$, все "переменные" спектральные линии для $2^m - 2$ имеют одну и ту же мощность: 2^m.

КОНЦЕРТНЫЕ ЗАЛЫ, ОКЕАНЫ И ВЕНЕРА

Последовательности Галуа использовались для точных измерений импульсных откликов самых разнообразных "линейных систем" для самых различных целей, включая определение акустических свойств залов во время реального исполнения музыки. Таким образом, проверка акустических свойств помещений в присутствии "живой" аудитории стало по-настоящему возможной!

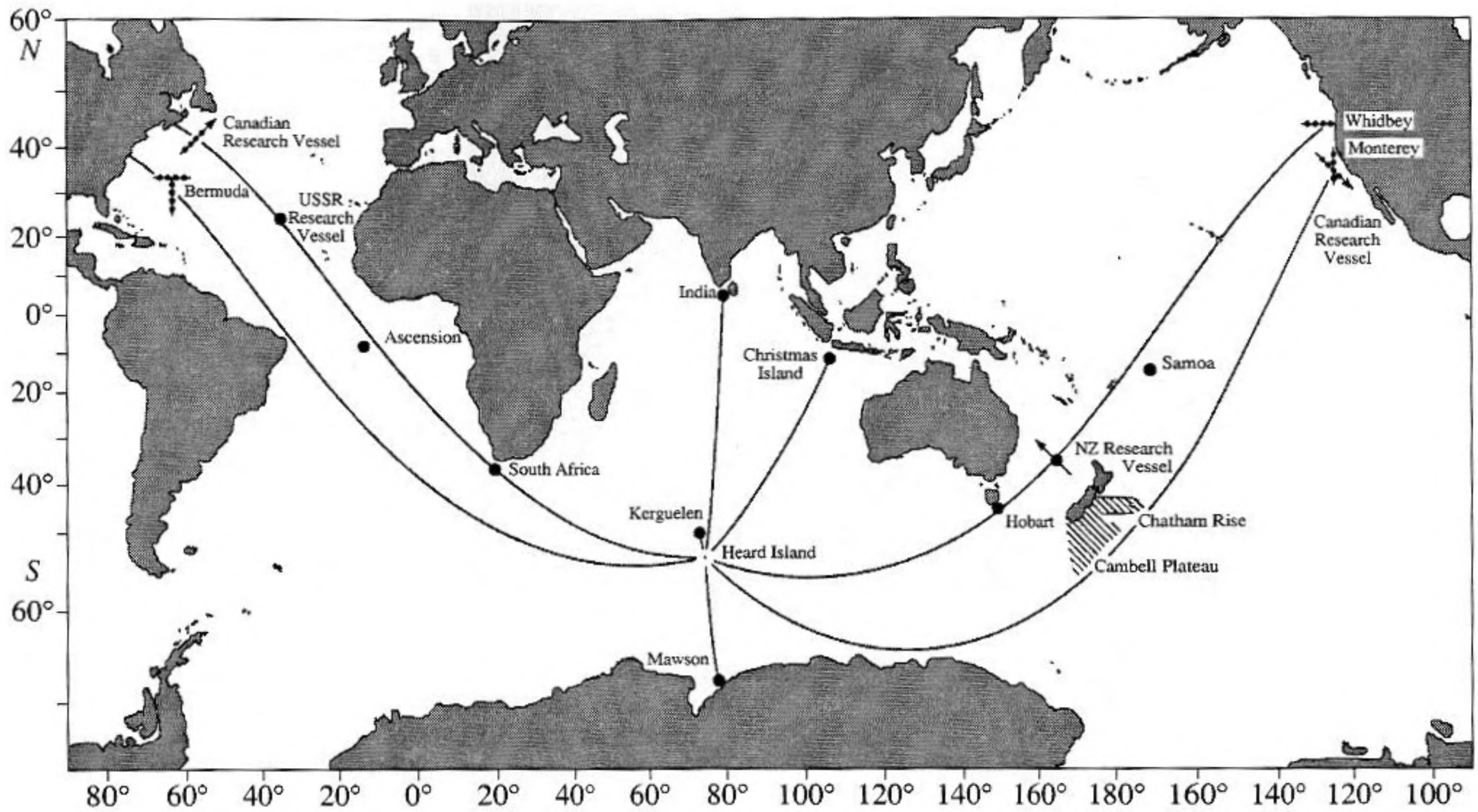

Рис. 2. Мониторинг океана на больших расстояниях (с разрешения Манка).

Одним из замечательных применений последовательностей Галуа является измерение температуры океана (для мониторинга глобального потепления) путем измерения задержки в прохождении звука между островом Херд в Индийском океане и Гренландией по трассе длиной более 10000 км (рис. 2) [3]. Звуковые волны могут преодолевать такие большие расстояния благодаря тому, что звуковая энергия не может выйти за пределы канала волноводного распространения, находящегося на глубине (умеренной), соответствующей минимуму скорости звука. На рис. 3 представлена компьютерная модель на основе лучевой теории [4].

Возможно, наиболее впечатляющим применением последовательностей Галуа стало измерение расстояния между планетами, например, между Землей и Венерой, когда последняя находилась за Солнцем ("верхнее соединение"). В этом случае последовательность Галуа используется для коммутации фазы гармонического радиолокационного сигнала на 180° при переходе через нуль. На рис. 4 изображена последовательность + + + − − + −. Такой радиолокационный сигнал имеет широкий спектр с центром на несущей частоте, который хорошо подходит для точного измерения времени с использованием принципа неопределенности. Учитывая ограниченную максимальную мощность радиолокационного сигнала, в космос можно излучить сигнал до 300 кВт средней мощности. Однако при нахождении Венеры в "верхнем соединении" только 10^{-27} излученной энергии или менее 10^{-21} Вт отраженной мощности возвращается на Землю. Результаты таких измерений, проведенных И. Шапиро [5], показаны на рис. 5. Они указывают на наличие дополнительной задержки, равной приблизительно 180 мкс, сверх той задержки, которая должна была бы быть в случае, если бы скорость света была постоянной на всем пути радиолокационного сигнала. Однако в случае, когда Венера находится в

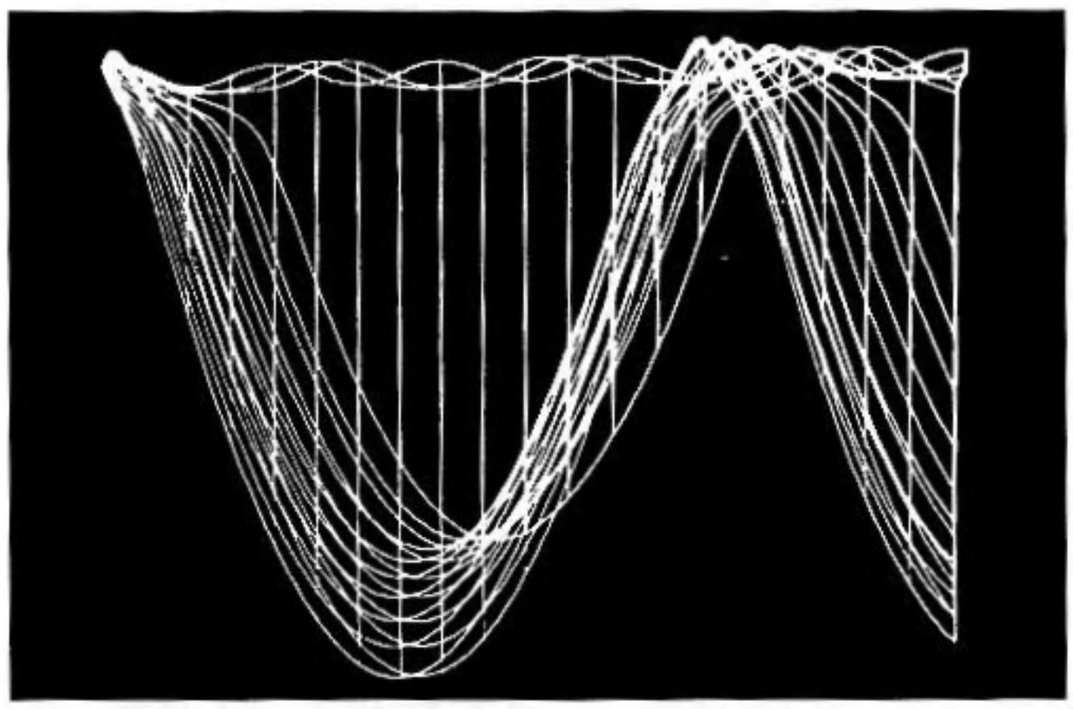

Рис. 3. Компьютерная лучевая модель распространения звука в подводном канале (с разрешения М.М. Сондхи).

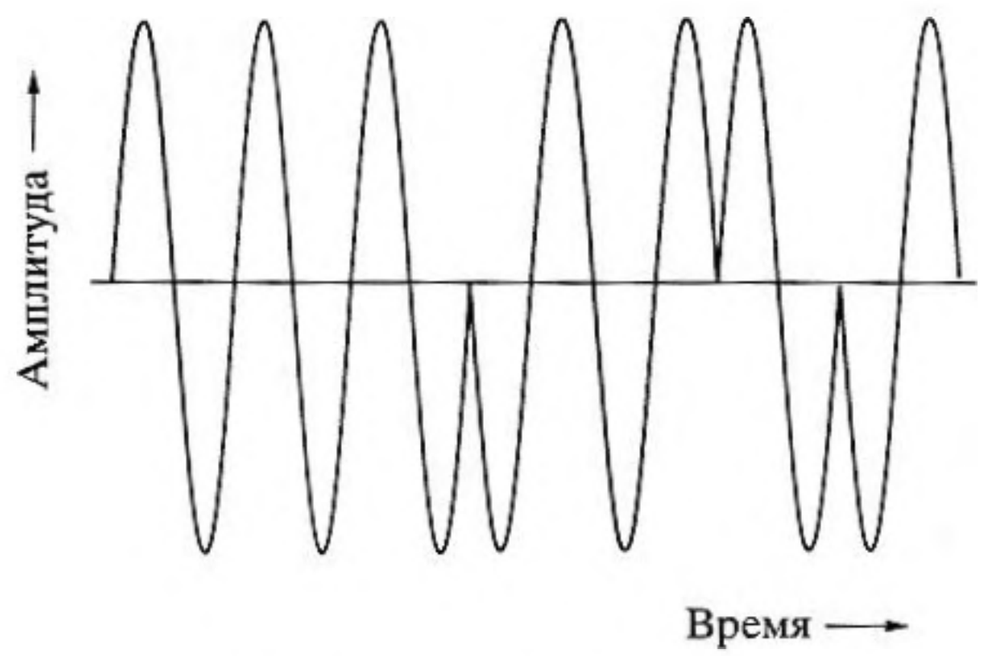

Рис. 4. Радиолокационный сигнал с коммутацией фазы.

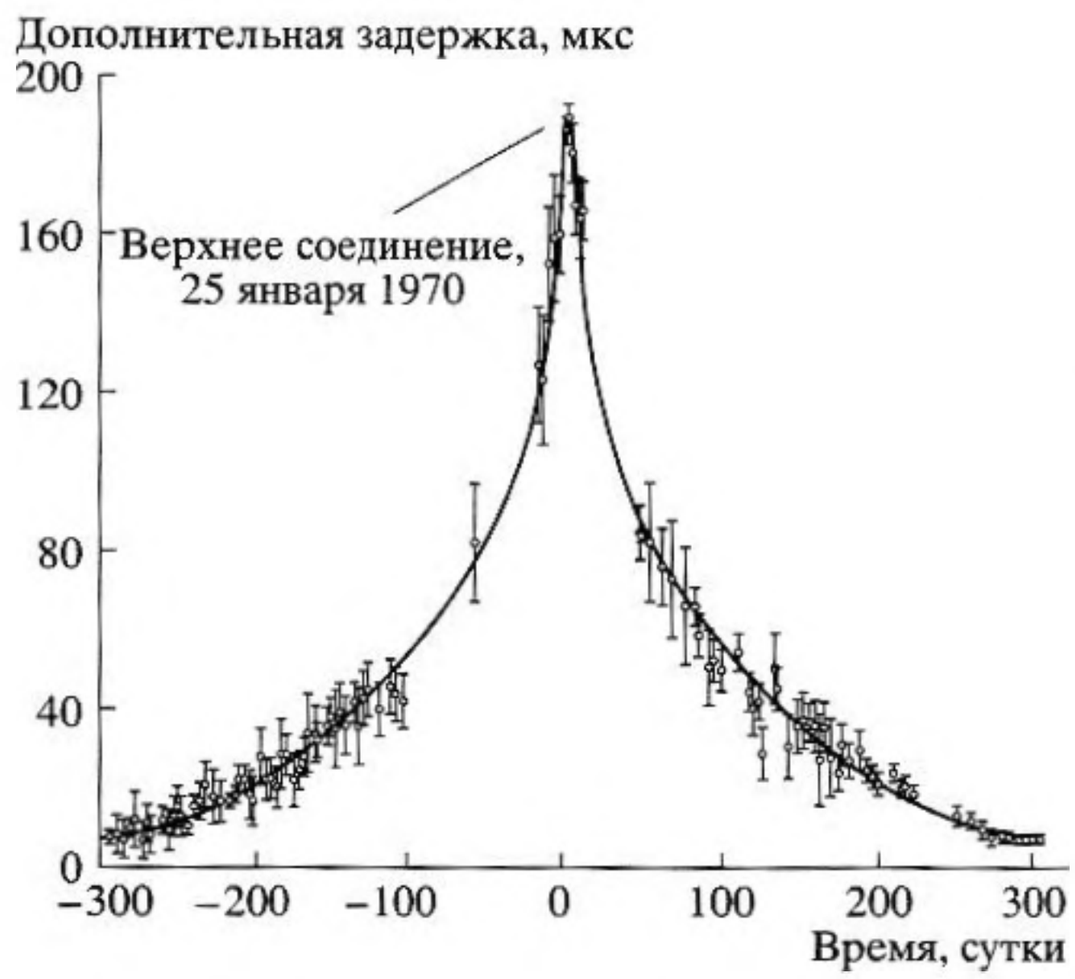

Рис. 5. Дополнительная задержка прохождения радиолокационного сигнала на пути Земля – Венера во время верхнего соединения (Венера находится за Солнцем). Сплошная линия – расчет по эйнштейновской общей теории относительности (И. Шапиро).

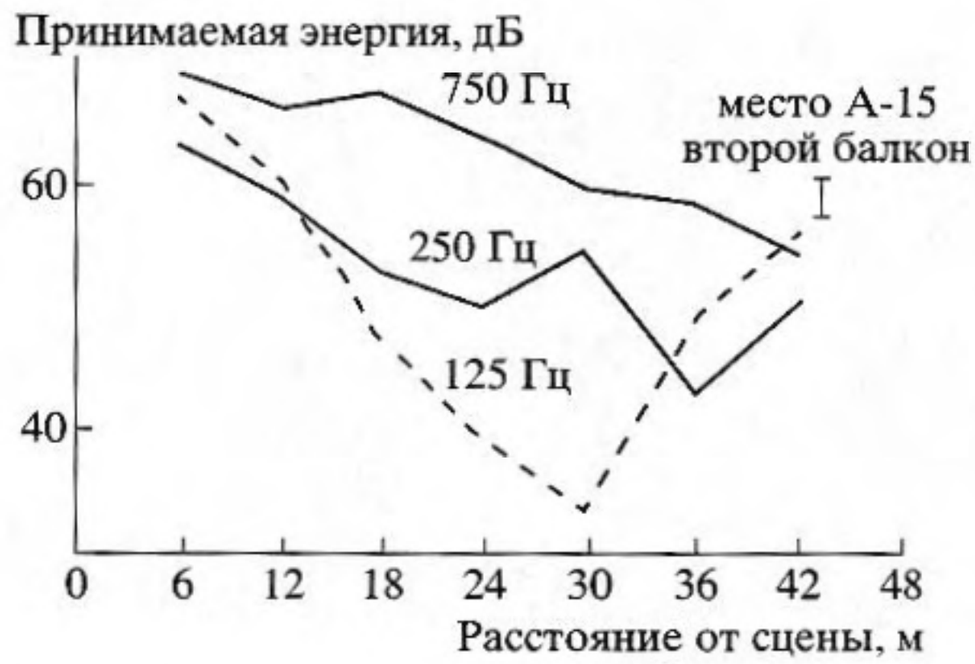

Рис. 6. Звуковая энергия в трех частотных полосах в центральной области Филармонического зала в Нью-Йорке. Отметим резкое падение на частоте 125 Гц и малые изменения для кресла на верхнем балконе ("А 15").

верхнем соединении, радиолокационный сигнал огибает Солнце и, в соответствии с эйнштейновской общей теорией относительности, замедляется его гравитационным полем. Сплошная кривая показывает задержку, рассчитанную в соответствии с эйнштейновской теорией. Таким образом, измерения подтверждают именно эту теорию, а не другие конкурирующие модели. Это была четвертая решающая проверка общей теории относительности. Три более ранние попытки были связаны с движением Меркурия в перигелии, с искривлением лучей звездного света, проходящих вблизи Солнца (впервые наблюдалось во время солнечного затмения в 1919 г.), и со сдвигом частоты света, излучаемого в гравитационном поле.

Последовательность Галуа, использованная Шапиро в этом замечательном эксперименте, имела длину периода $2^6 - 1 = 63$. Было измерено даже очень маленькое время задержки, обусловленное относительно слабым гравитационным полем Земли (по сравнению с полем Солнца), которое также оказалось соответствующим общей теории относительности (порядка 10^{-10} с).

АКУСТИКА КОНЦЕРТНЫХ ЗАЛОВ

Как уже упоминалось, одной из областей, где с помощью последовательностей Галуа удалось многого добиться, является акустика концертных залов. В этом случае большое значение отношения сигнал–шум, которое можно получить с помощью последовательностей Галуа, позволяет проводить точные измерения в зашумленных помещениях в присутствии зрителей (в большинстве залов измерения проводились в идеальных условиях в отсутствие аудитории) и даже во время настоящих музыкальных концертов. (При этом амплитуда последовательности Галуа устанавливается на таком низком уровне, что она маскируется музыкой, и поэтому не слышна.) Высокое временное разрешение позволило точно определить местонахождение источника неприятного эхо в Филармоническом зале в Нью-Йорке (сейчас – это Зал Эвери Фишера) и обнаружить причину недостатка низких частот (верхние отражающие панели, которые называют, может быть и оправданно, "облаками"). Эти измерения (рис. 6) позволили обнаружить потери в 20 дБ в центральной области зала в диапазоне 125–750 Гц. В отличие от этого, диапазон отклонений в районе места А–15 на верхнем балконе составил только 3 дБ. (Это место было включено в программу измерений, потому что билетеры – студенты Музыкального училища Джулиарда – указали на это место как на самое лучшее в Филармоническом зале [16].)

Последовательности Галуа использовались в психофизике и нейрофизиологии, например, для измерения рефлексов [7].Среди других областей

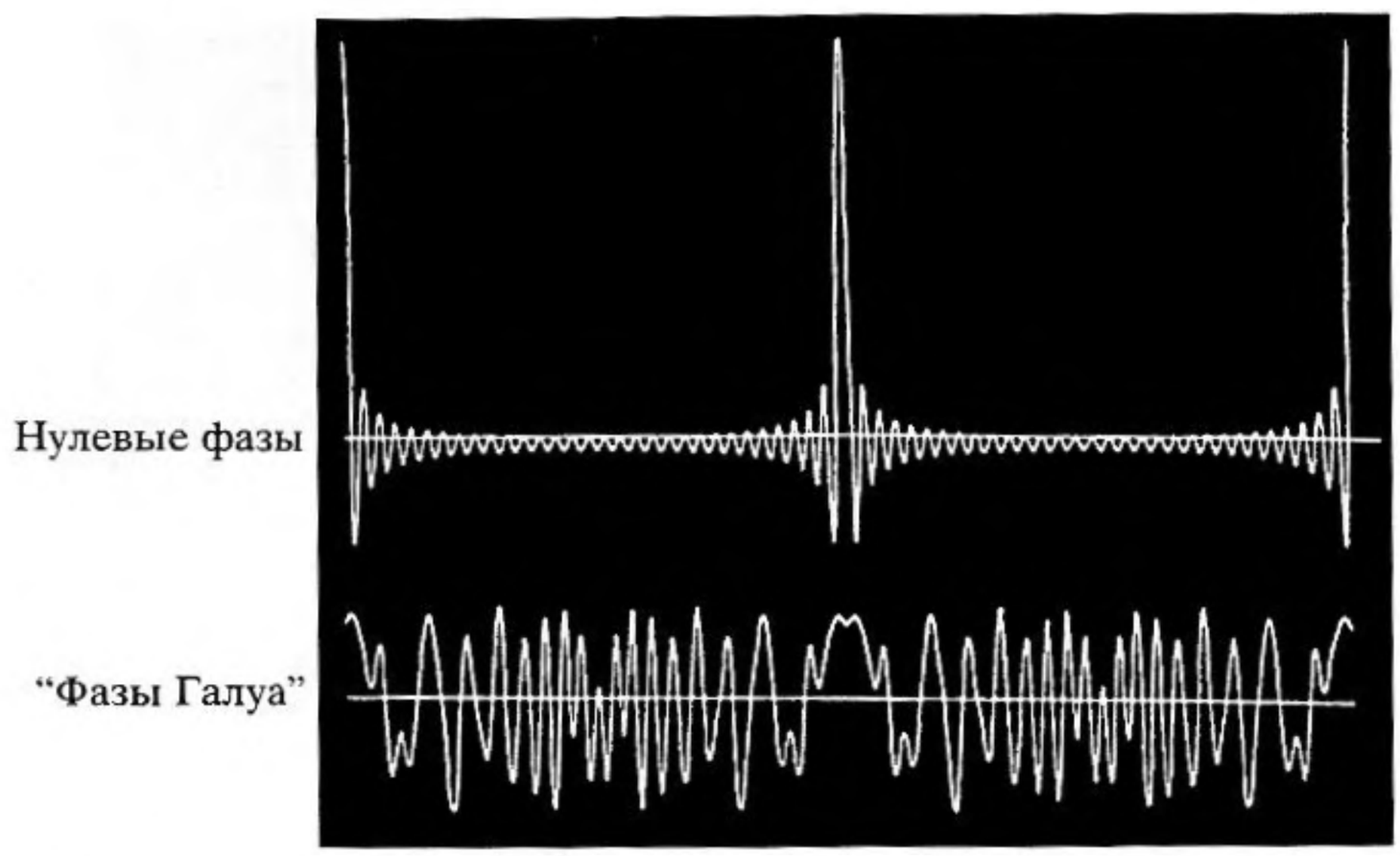

Рис. 7. Уменьшение амплитудного коэффициента для периодической последовательности импульсов (верхняя осциллограмма). Применение "фаз Галуа" позволяет уменьшить амплитудный диапазон почти в три раза. (Обе осциллограммы приведены в одном масштабе.)

их применения можно назвать физику атмосферы [8] и другие области. Для всех этих применений решающее значение имеют быстрые расчетные алгоритмы [9, 10].

АМПЛИТУДНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Звуки вокализованной речи синхронизируются электронными приборами путем фильтрации квазипериодической последовательности импульсов, состоящей, например, из 31 синфазной гармоники (рис. 7, верхняя осциллограмма), которая приводит к "хриплому" звучанию синтезированных речевых сигналов.

Заменяя нулевые фазы в косинусоидальном ряде Фурье из 31 члена на 31 знак (± 1) последовательности Галуа, полученной из поля Галуа (2^5), причем +1 соответствует нулевому фазовому углу, а –1 соответствует фазовому углу, равному π, можно снизить амплитудный коэффициент до приемлемого уровня (см. нижнюю осциллограмму на рис. 7, которая изображена в том же масштабе, что и верхняя [1]). Оба сигнала на рис. 7 имеют одинаковую полную мощность и одинаковый (плоский) спектр мощности, однако звучат они совершенно по-разному, причем амплитудный коэффициент нижнего сигнала обеспечивает "гладкий" звук и более приятную на слух синтезированную речь. Причину такого удивительного воздействия фазы Галуа можно объяснить следующим образом. Вместо минимизации амплитудного диапазона сигнала $s(t)$ для данной мощности можно поставить условие минимизации четвертого момента огибающей ("гильбертовской") сигнала:

$$\int |\sigma(t)|^4 dt,$$

где $\sigma(t)$ представляет собой "аналитический сигнал", соответствующий $s(t)$, и определяемой как

$$\sigma(t) := \sqrt{s^2(t) + \mathcal{E}^2(t)},$$

а $\mathcal{E}(t)$ – так называемое преобразование Гильберта функции $s(t)$ [11]. Как хорошо известно, аналитический сигнал имеет ненулевой Фурье-образ только в случае положительных частот. Его полный квадрат, т.е. квадрат огибающей $|\sigma|^2$, конечно же, является автокорреляционной функцией этого спектра. Таким образом, $|\sigma|^4$ является мерой мощности квадрата огибающей. Чем меньше эта мощность, тем более постоянной, т.е. с меньшим количеством пиков будет $|\sigma|^2$.

КОДЫ ИСПРАВЛЕНИЯ ОШИБОК

Еще одним важным применением последовательностей Галуа является цифровая коррекция ошибок [12]. Как мы видели выше, последовательности Галуа в конечном поле (p^m) генерируются линейной рекурсией по модулю p.

Для $p = 2$ (наиболее частый случай) и $m = 3$, например, одна такая рекурсия имеет вид

$$a_{k+3} = a_{k+1} + a_k (\mathrm{mod}\ 2).$$

При начальном условии 1 1 1, остаток одного периода представляет собой, например, 0 0 1 0. В контексте кодов исправления ошибок мы теперь рассматриваем начальные условия (1 1 1) как информационные разряды, а остальные разряды (0 0 1 0) – как контрольные. Это – симплексный код (длиной 7), называемый так, поскольку геометрическое представление кодовых слов является симплексным (например, тетраэдр в трех изме-

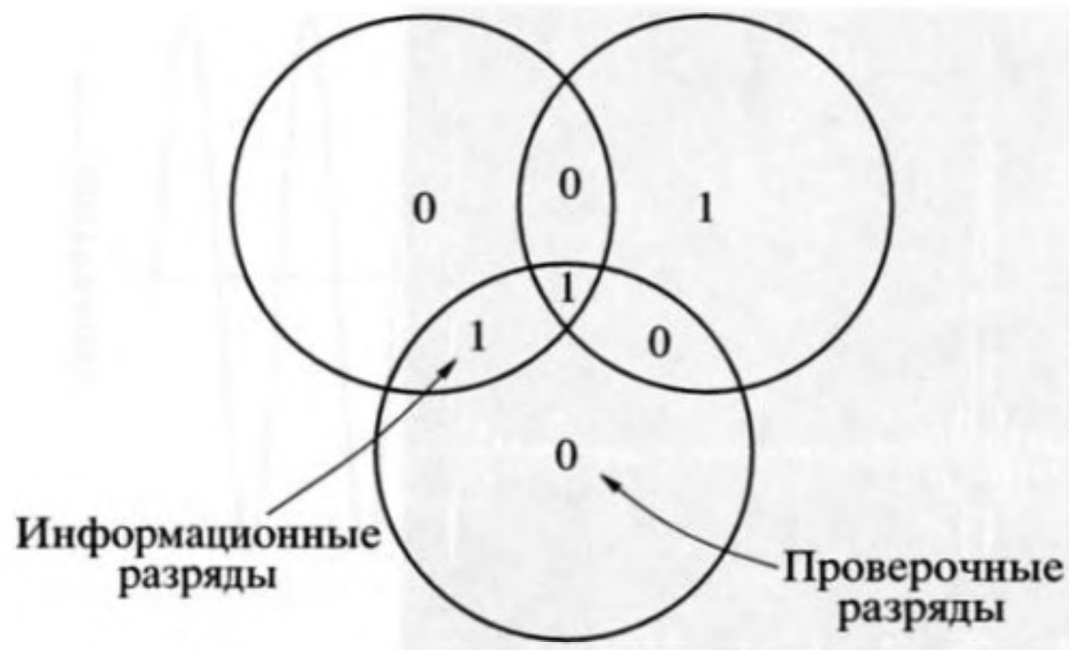

Рис. 8. Диаграмма Венна, иллюстрирующая работу кода Хемминга с длиной 7. Четыре внутренних разряда (жирный шрифт) – информационные разряды. Остальные три разряда (обычный шрифт) определены таким образом, чтобы контрольное число (сумма разрядов по модулю 2) в каждой из трех окружностей было равно нулю. Легко видеть, что обращение любого из семи разрядов нарушит контрольное число в одной или нескольких окружностях, что единственным образом определяет его расположение.

рениях). Общий двоичный код имеет длину $2^m - 1$ с количеством информационных разрядов, равным m (т.е. 2^m кодовых слов), и $2^m - 1 - m$ проверочных разрядов. Таким образом, передаточное отношение для информации составляет $m/(2^m - 1)$. Однако кодовые слова имеют взаимное расстояние Хемминга 2^{m-1}, которое позволяет обнаружить 2^{m-2} ошибок и исправление $2^{m-2} - 1$ ошибок, или для больших m – почти 25%. Эта замечательная возможность – результат сравнительно большого расстояния Хемминга, равного 2^{m-1}.

Рис. 9. Двумерная сетка Галуа.

Оно непосредственно связано малой автокорреляцией, соответствующей последовательности ±1: малая автокорреляция соответствует большому расстоянию Хемминга.

Симплексный код является основой нескольких других мощных кодов исправления ошибок, используемых в компьютерах, на лазерных дисках и при исследовании межпланетного пространства. "Двойником" симплексных кодов являются коды Хемминга, в которых информационные и проверочные разряды меняются местами. Таким образом, код Хемминга длиной 7 имеет 4 информационных и только 3 проверочных разряда, что является достаточным для исправления одной ошибки в любом из семи разрядов или для определения факта отсутствия ошибок. Различить эти 8 случаев – это все, чего можно добиться с помощью трех двоичных проверочных разрядов. По этой причине коды Хемминга называют совершенными кодами. (На самом деле, все двоичные совершенные коды являются кодами Хемминга.) Исправление ошибок в коде Хемминга с помощью диаграммы Венна проиллюстрировано на рис. 8.

Коды Хемминга, являясь совершенными кодами, являются также совершенными кодами покрытия [14]. Код покрытия представляет собой такую выборку точек пространства, что "единичные шары" закроют все остальные точки пространства. Оптимальный код покрытия содержит наименьшее возможное количество точек. Хороший код покрытия нужен для квантования аналоговых или цифровых сигналов на наименьшее количество представляющих точек для заданной максимальной ошибки. Они также хороши для решения некоторых задач о "цвете шляп".

РЕНТГЕНОВСКАЯ АСТРОНОМИЯ

Рентгеновские лучи трудно фокусировать. Зонные пластинки Френеля очень сильно зависят от длины волны. Однако теория чисел предлагает метод получения рентгеновских изображений, который можно применять в рентгеновской астрономии, позволяющий избежать этих трудностей [15]. Этот метод основан на применении двумерной "сетки Галуа", получаемой наложением последовательности Галуа на прямоугольную решетку по диагонали, причем "1" соответствует маленькому квадратному прозрачному отверстию, а "0" – маленькому квадрату, задерживающему рентгеновские лучи. Для того чтобы этот метод работал, длина последовательности $L = 2^m - 1$ должна быть разложимой на два взаимно простых сомножителя. (Следовательно, L не должно быть простым числом Мерсенна.)

Например, для $m = 12$ $L = 4095 = 63 \times 65$. Соответствующая двумерная сетка показана на рис. 9. Рентгеновская тень от этой маски вводится в ком-

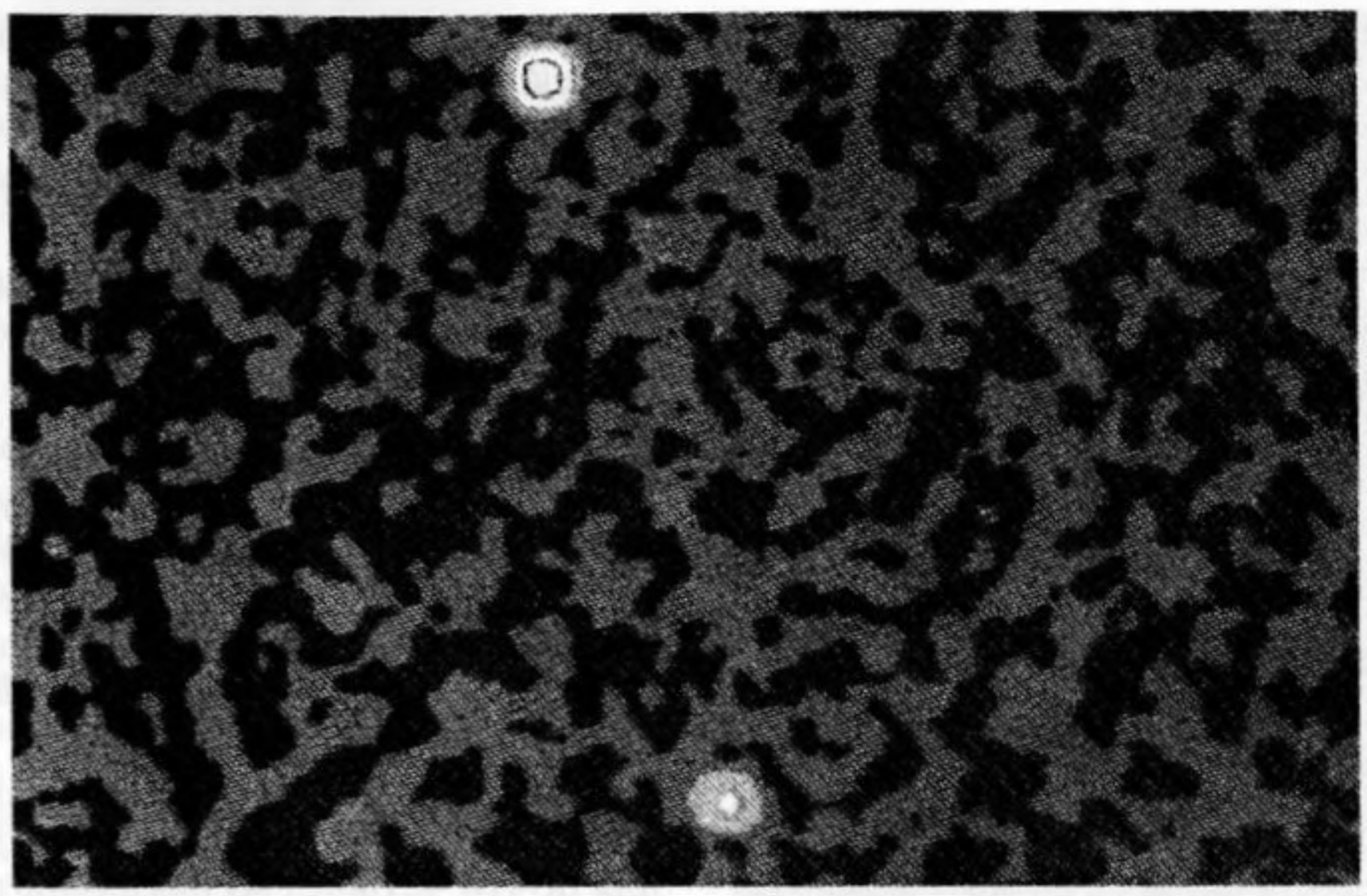

Рис. 10. Рентгеновское изображение, полученное с помощью сетки, показанной на рис. 9, на котором видны два рентгеновских источника.

пьютер, который проводит обращение свертки с помощью той же сетки 63 × 65 и получает изображение, показанное на рис. 10 (видны два рентгеновских источника).

ДИФФУЗОРЫ

Одним из наиболее широко известных приложений последовательностей Галуа является их применение для рассеяния волн (звуковых, СВЧ, световых) с помощью решеток. В этом случае последовательность Галуа (в виде ±1) реализуется как последовательность коэффициентов отражения (рис. 11). Нормально падающая плоская волна дифрагирует с почти одинаковыми энергиями в различные дифракционные максимумы [13] (рис. 12). Конечно, в случае частоты, вдвое превышающей расчетную (половина длины волны), глубина бороздок составляет $\lambda/2$. Таким образом, набег фазы на пути туда и обратно отсутствует, и решетка ведет себя как плоское зеркало. Для расширения частотного диапазона простое число 2, использованное при создании решетки, должно быть заменено большим простым числом p, что дает решетку длиной $p^m - 1$ и соответствует $p - 1$ частотам $(1, 2, 3, \ldots, p - 1)$. (Для нецелочисленных частот, кратных расчетной частоте, например, 1.5, рассеяние остается очень хорошим.)

Рис. 11. Отражательная фазовая решетка, основанная на последовательности Галуа длины 7.

ДИФФУЗОРЫ НА ОСНОВЕ КВАДРАТИЧНЫХ ВЫЧЕТОВ

Другой подход к конструированию широкополосных диффузоров основывается на использова-

Рис. 12. Рассеяние назад от металлической отражательной фазовой решетки Галуа, показанной на рис. 11. Измерения проводились с использованием СВЧ-излучения с длиной волны 3 см.

Рис. 13. Отражательная фазовая решетка, основанная на квадратичных вычетах простого числа 17.

Рис. 14. Диаграмма отражения от решетки, показанной на рис. 13.

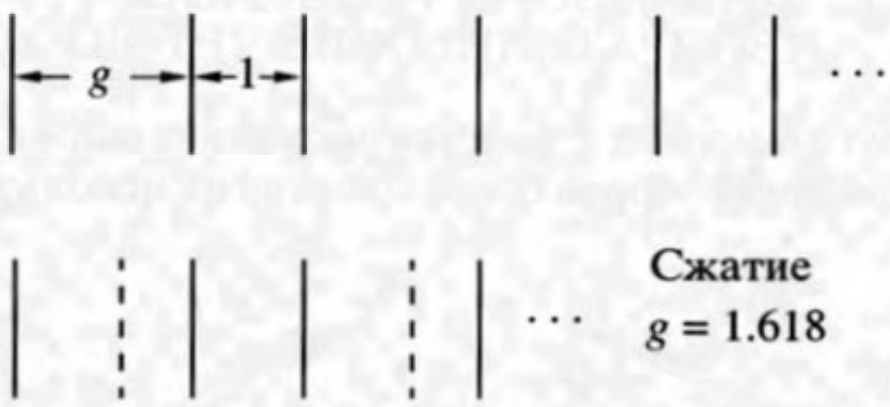

Рис. 15. Одномерная кроличья сетка и ее самоподобие. При сжатии с использованием множителя g каждый "атом" исходной сетки оказывается непосредственно над атомом сжатой сетки. Каждая единица в кроличьей последовательности соответствует "межатомному" расстоянию, пропорциональному g, а каждый нуль – расстоянию 1.

нии квадратичных вычетов простого числа p. Например, для $p = 7$ квадратичными вычетами целого 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... являются 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0, ..., т.е. последовательность, повторяющаяся с периодом 7. Отражательная фазовая решетка, основанная на квадратичных вычетах простого числа $p = 17$, показана на рис. 13. Глубина бороздок дается выражением

$$d_n = \frac{\lambda_0}{2p}(n^2) \bmod p,$$

где λ_0 – основная (самая большая) длина волны. Легко показать, что последовательность коэффициентов отражения

$$r_n = \exp(2\pi i dn/\lambda_0)$$

имеет нулевую автокорреляционную последовательность (кроме сдвига, конгруэнтного нулю по модулю p). Таким образом, соответствующий спектр мощности является плоским, и диаграмма рассеяния является равномерной [1].

Результирующая диаграмма направленности показана на рис. 14. Напомним еще раз, что такая решетка хорошо работает для $p - 1$ частот, т.е. для почти четырех музыкальных октав в случае $p = 17$.

"КРОЛИЧЬЯ" ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Одной из наиболее интересных двоичных последовательностей является "кроличья" последовательность [16]: 1 0 1 1 0 1 0 1 ..., генерируемая при помощи преобразования 0 ⟶ 1 и 1 ⟶ 1 0. Таким образом, начиная с одного нуля, последовательность "поколений" представляет собой

n	Кролики	F_n
0	0	1
1	1	1
2	1 0	2
3	1 0 1	3
4	1 0 1 1 0	5
...		

Каждое поколение представляет собой предпоследнее поколение, присоединенное к последнему. Таким образом, количество разрядов в поколении n представляет собой n-е число Фибоначчи F_n, которое подчиняется рекурсии $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, начиная с $F_0 = F_1 = 1$. Число единиц в поколении n равно F_{n-1}, а число нулей – F_{n-2}. Следовательно, отношение количества единиц к количеству нулей стремится к "золотому среднему" $g = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1.618$. На самом деле, золотое среднее полезно при генерации всей кроличьей последовательности r_n без обращения к рекурсии

$$r_n = \lfloor (n+1)g \rfloor - \lfloor ng \rfloor,$$

где $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x. Название "кроличья последовательность" происходит из того факта, что отображение 0 ⟶ 1 и 1 ⟶ 1 0 рассматривалось Фибоначчи [17] для подсчета потомства кроликов. Неполовозрелые кролики становятся половозре-

лыми (0 ⟶ 1), а половозрелые кролики живут и дают (неполовозрелое) потомство (1 ⟶ 1 0). Одно из важных свойств кроличьей последовательности – ее самоподобие, проиллюстрированное с помощью кроличьей сетки на рис. 15. Масштабный коэффициент равен $(\sqrt{5} + 1)/2 = g$.

КВАЗИКРИСТАЛЛЫ

Когда сплав, полученный быстрым охлаждением смеси марганца и алюминия в пропорции 1:6 (Al_6Mn), подвергают воздействию пучка электронов, то на получающейся дифракционной картине можно видеть яркие точки и симметрию пятого порядка [18] (рис. 16). Дифракционная картина демонстрирует также самоподобие: многочисленные правильные пятиугольники различных размеров с масштабным коэффициентом g или $g^2 = 1 + g = 2.618\ldots$. Однако симметрия пятого порядка для любой периодической решетки запрещена фундаментальной геометрией. И все-таки, светлые пятна подразумевают периодический кристалл. Следовательно, что-то должно быть не так. Совершенно неожиданно затруднение может быть разрешено с помощью кроликов Фибоначчи. Там мы столкнулись с одномерной структурой (см. рис. 15), которая самоподобна и масштабируется с коэффициентом g. Можно ли найти трехмерный аналог? На рис. 17 иллюстрируется метод проекции, который генерирует одномерную кроличью сетку из квадратной сетки [19]. Этот метод может быть обобщен на двух- и трехмерные кроличьи решетки. Для получения двумерной кроличьей сетки необходимо начать с пятимерной гиперкубической сетки и спроецировать ее на соответственным образом наклоненную плоскость (рис. 18). Если эту апериодическую решетку, полученную при помощи компьютера, поместить под лазерный луч, то в результате получается дифракционная картина, показанная на рис. 19, которая демонстрирует тот же самый масштаб и симметрию пятого порядка. (С разрешения Х. В. Штрубе и Х. Хенце.)

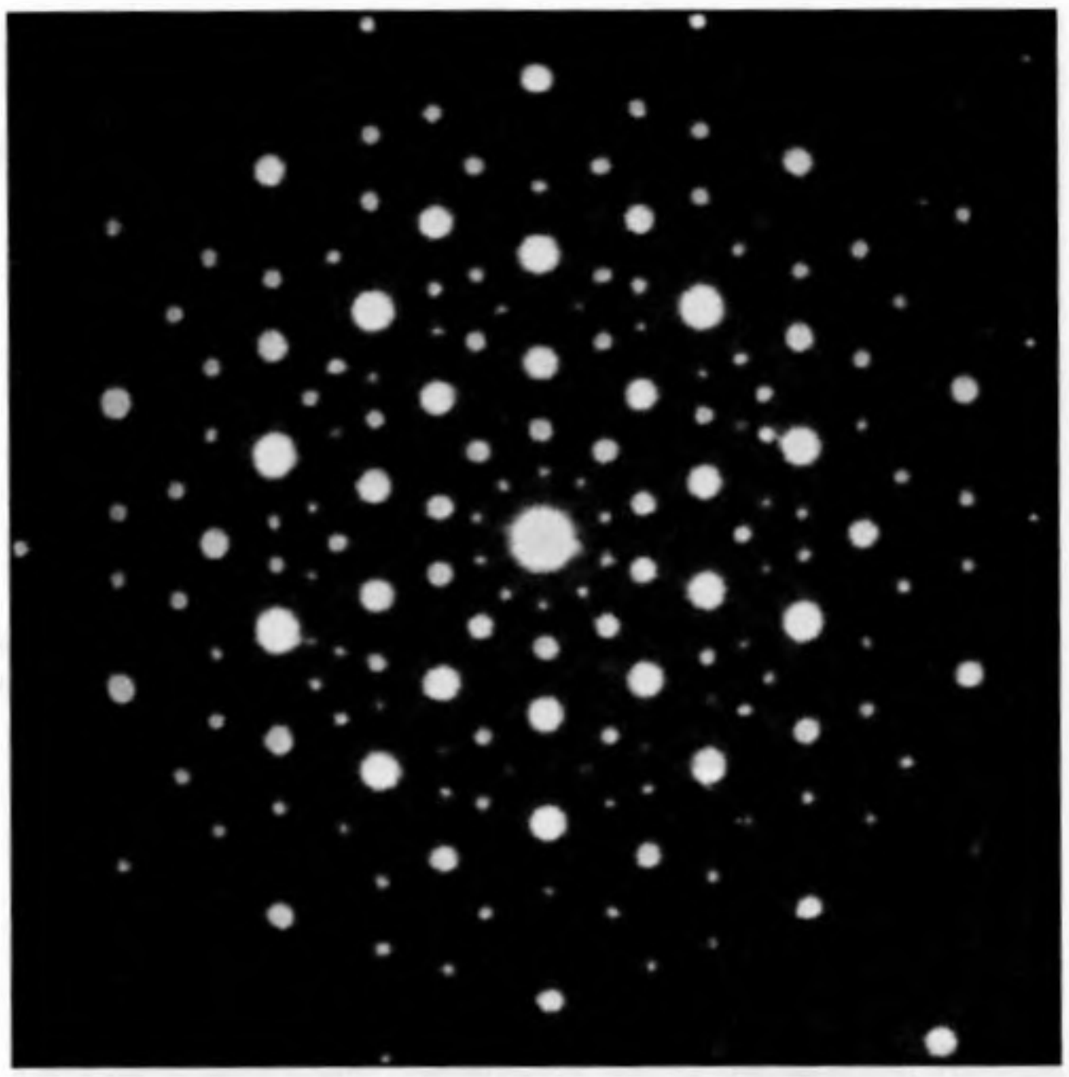

Рис. 16. Картина дифракции электронов на квазикристалле с пятикратной запрещенной симметрией [18].

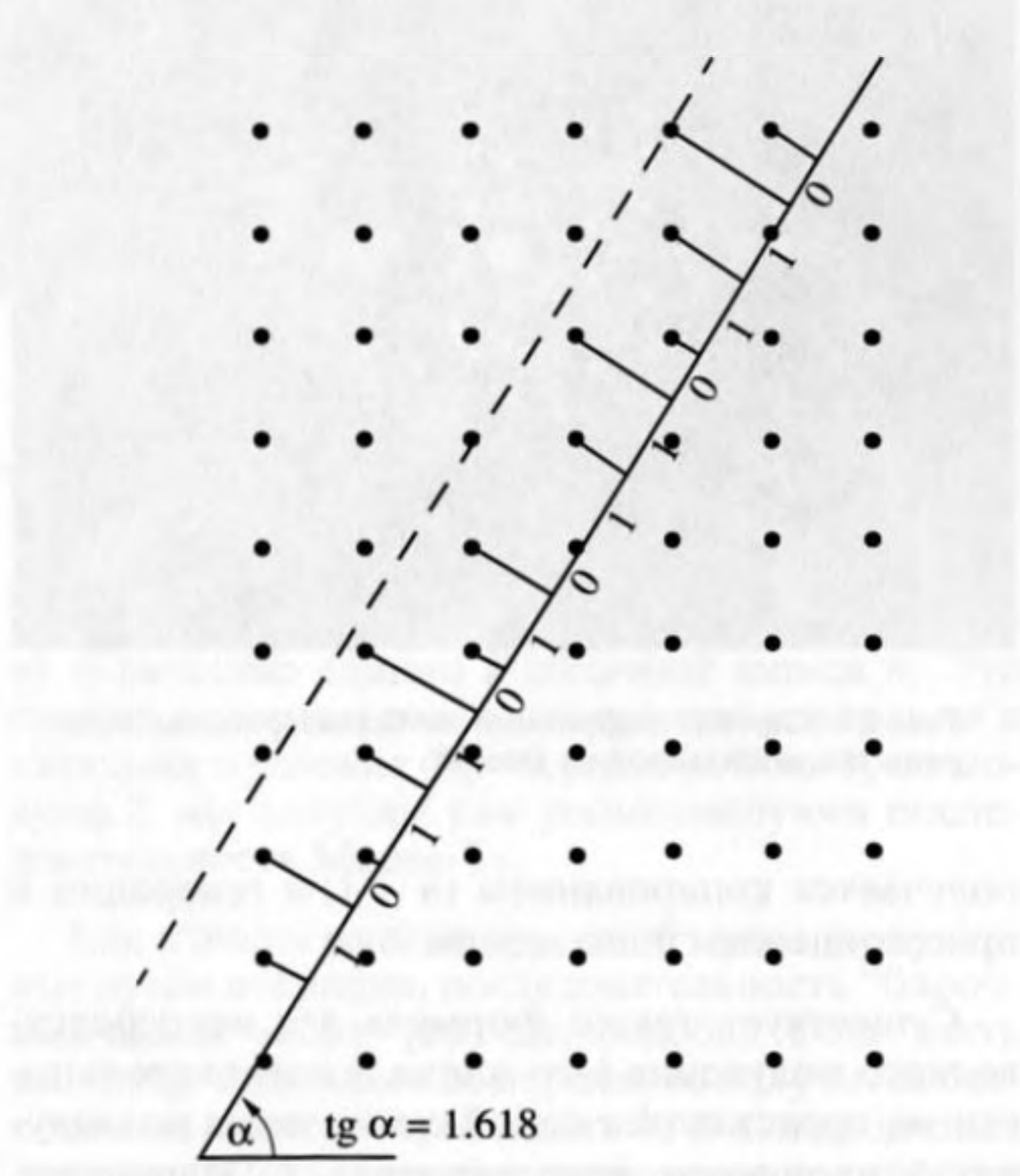

Рис. 17. Метод проекции для получения одномерной квазипериодической "кроличьей сетки", показанной на рис. 15.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МОРЗЕ-ТУ

Еще одной важной для физики последовательностью является последовательность Морзе-Ту. Как и кроличья последовательность, она – самовоспроизводящаяся и подчиняется правилам отображения 0 ⟶ 0 1 и 0 ⟶ 1 0. Начиная с одного нуля, мы получаем следующую последовательность генераций:

n	m_n	Количество разрядов
0	0	1
1	0 1	2
2	0 1 1 0	4
3	0 1 1 0 1 0 0 1	8
…		

Другими словами, последовательность Морзе-Ту генерируется при помощи простого правила: "копируй и присоединяй дополнение". Это правило "наследуется" в том смысле, что n-я генерация

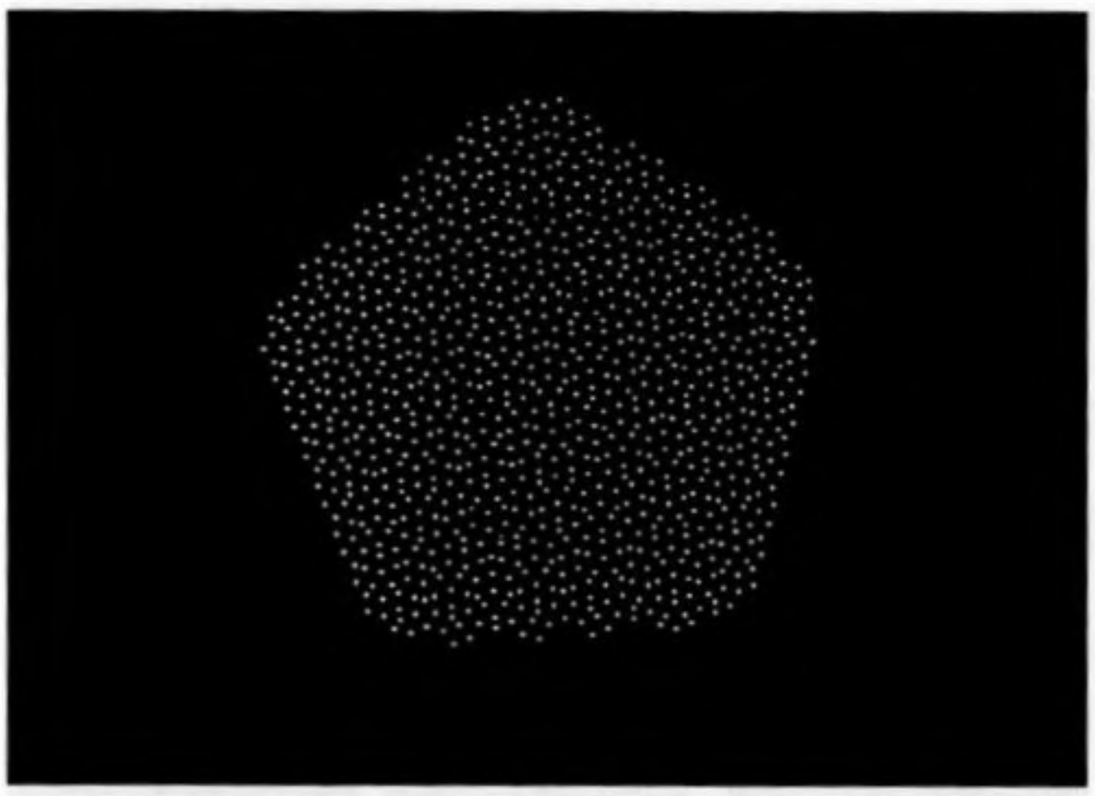

Рис. 18. Двумерная кроличья сетка, полученная с помощью компьютера путем проецирования пятимерной гиперкубической решетки на соответственным образом наклоненную плоскость.

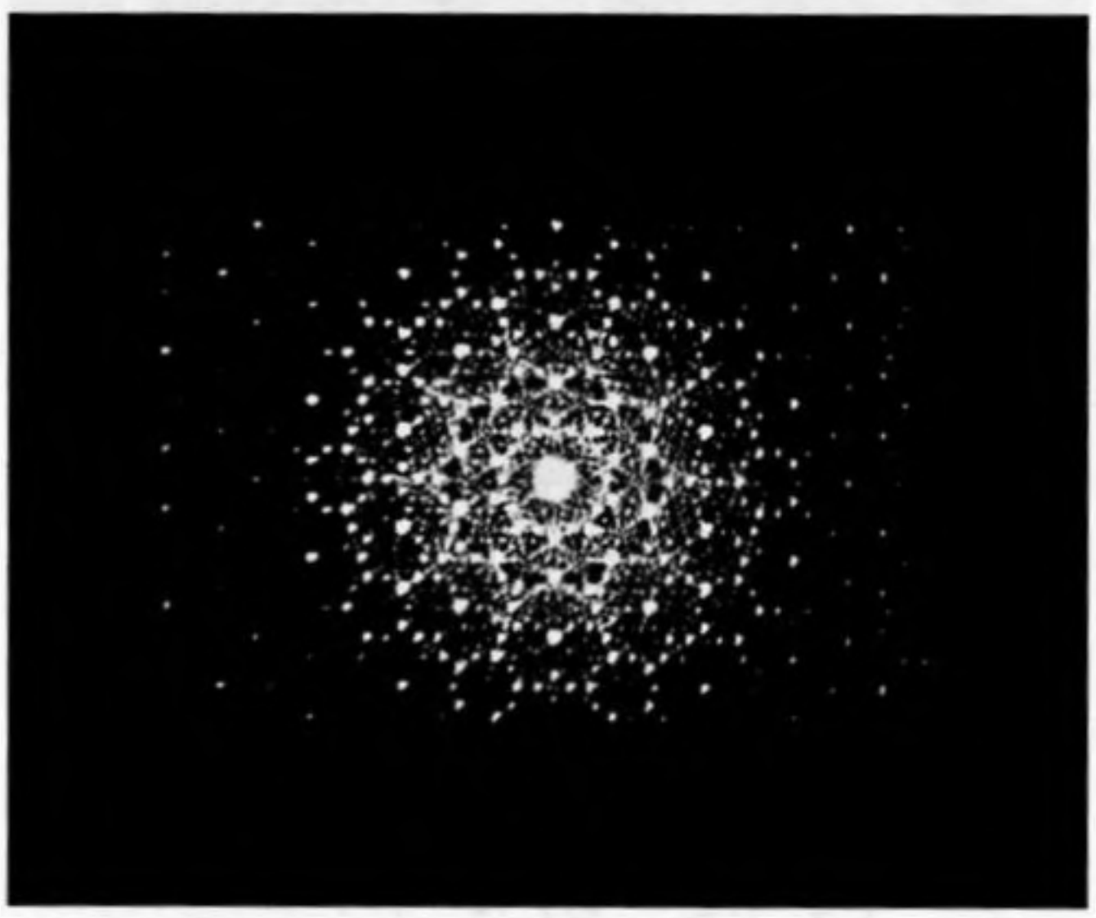

Рис. 19. Картина дифракции на квазипериодической решетке, показанной на рис. 18.

получается копированием (n – 1)-й генерации и присоединением дополнения.

Существует также формула для непосредственного получения k-го члена последовательности: m_k представляет собой сумму чисел по модулю 2 двоичного представления k. Например, седьмой член (считая от нуля) равен 1, поскольку 7 € 1 1 1, а 1 + 1 + 1 = 1 по модулю 2. Последовательность Морзе-Ту самоподобна в том смысле, что $m_{2k} = m_k$. Она получила свое название по именам Акселя Ту [20], который использовал ее в математической лингвистике, и Марстона Морзе [21], открывшего ее важное значение для "хаотической" динамики.

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Рассмотрим простой пример дискретной нелинейной динамической системы – итерированное квадратичное отображение:

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n).$$

При $x = \left(1 - \frac{1}{r}\right)$ отображение имеет фиксированную точку, и при $r = 2$ эта фиксированная точка "сверхстабильна" ($f(x)$ имеет нулевую производную). Начальное значение $x = \frac{1}{2}$ сохраняется при значении $x_0 = \frac{1}{2}$, которое называется "орбитой". Символически мы обозначим эту орбиту как

$$C\,C\,C\ldots \text{ (длина периода 1)},$$

где C обозначает "центр" $\left(x = \frac{1}{2}\right)$.

При $r = 1 + \sqrt{5} = 3.236\ldots$ отображение имеет сверхстабильную орбиту с периодом длиной 2. Начиная с $x_0 = \frac{1}{2}$, мы получаем $x_1 = 0.809\ldots x_3 = \frac{1}{2}, \ldots$. Или символически: $C\,R\,C\,R\,C\,R\ldots$ (период длиной 2). Здесь R означает "справа", т.к. x_1 находится справа от (больше, чем) x_0.

Для последующих значений r мы получаем сверхстабильные орбиты с периодами длиной 4, 8, 16 и т.д. – так называемый каскад с удваивающимися периодами. Соответственно, символическая динамика

$C\ldots$ (период длиной 1)

$C\,R\ldots$ (период длиной 2)

$C\,R\,L\,R\ldots$ (период длиной 4)

$C\,R\,L\,R\,R\,R\,L\,R\ldots$ (период длиной 8)

Существует ли простое правило, позволяющее переходить от одной символической динамики к следующей? Да, существует: мы один раз копируем орбиту и заменяем второе C попеременно на R и L [16]. Орбиту можно описать также двоичной последовательностью, записывая 1 вместо R и 0 вместо C или L:

0

0 1

0 1 0 1

0 1 0 1 1 1 0 1

...

Существует глубокая связь символической динамики квадратичного отображения с последовательностью Морзе-Ту:

0 1 1 0 1 0 0 1....

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Двоичная запись:	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	...
Количество единиц:	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4	...
До-мажор:	C	C	D	C	D	D	E	C	D	D	E	C	E	E	F	...
Каждая третья нота:			D			D			D			C			F	...
Мелодия:			D									C			F	...

Рис. 20. Последовательность барочных целых чисел, преобразованная в звук в тональности до-мажор путем связывания единицы с нотой "до", двойки – с нотой "ре" и т.д. Повторяющиеся ноты не повторяются, но длительность их звучания увеличивается, что определяет ритм.

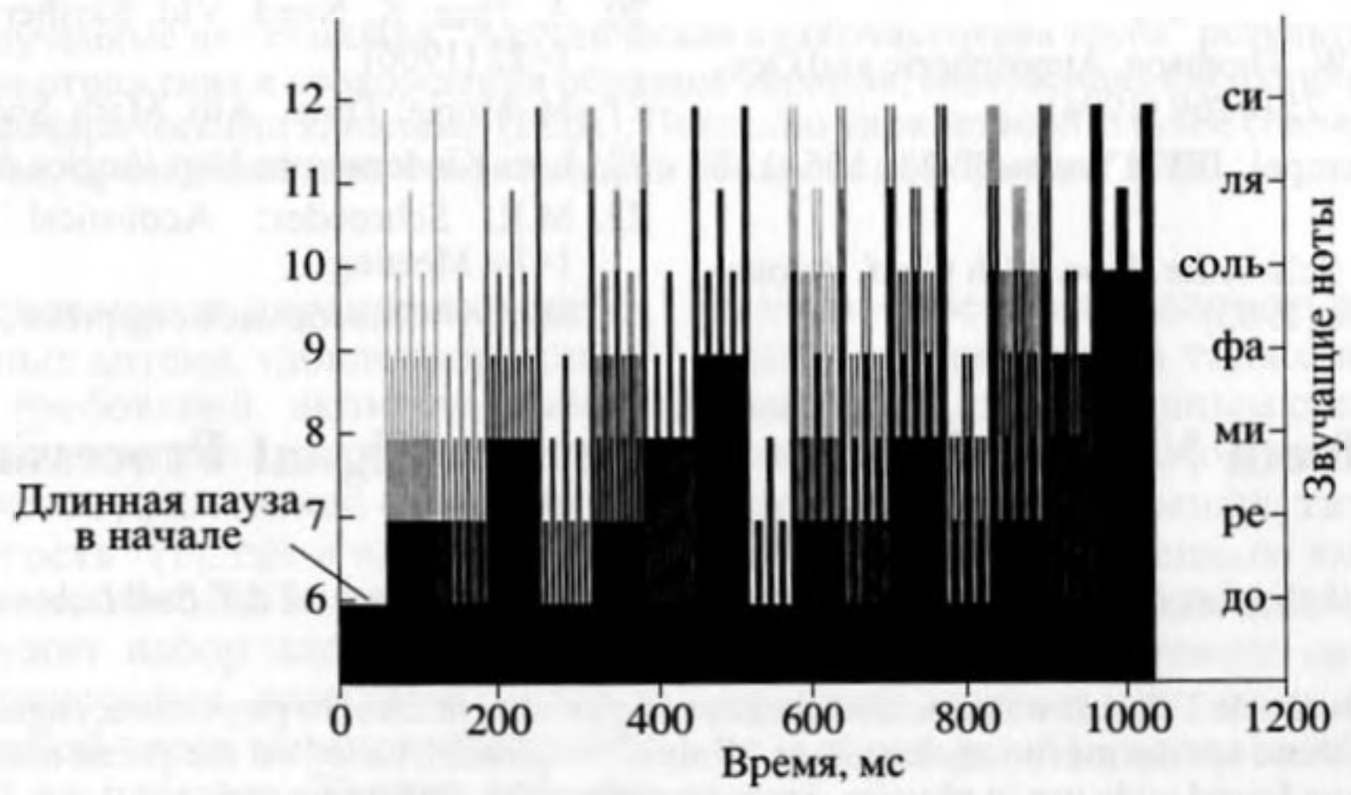

Рис. 21. Созданная компьютером "барочная" мелодия. С этой и другими мелодиями можно ознакомиться через Интернет [22, 23].

Определение первой разности по модулю 2 дает

1 0 1 1 1 0 1...,

что, за исключением начального нуля, является символической динамикой квадратичного отображения при его сверхстабильной орбите в конце каскада с удваивающимися периодами. Таким образом, выявляется интересная связь между случаем нелинейной динамики и теорией чисел (подробнее см. в [16]).

БАРОЧНЫЕ ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим еще одно правило генерации интересных последовательностей, а именно: "скопируй, добавь единицу и присоедини". Таким образом, начиная с одного нуля, мы получаем

0
0 1
0 1 1 2
0 1 1 2 1 2 2 3.

В этой последовательности n-й член обозначает количество единиц в двоичной записи n. Это следует непосредственно из правила генерации и начального условия ($b_0 = 0$, рис. 20). Взяв b_n по модулю 2, мы получим уже упоминавшуюся последовательность Морзе-Ту.

Как и очень многие другие объекты, полученные путем итерации, последовательность "барочных целых чисел" [16] самоподобна. Если взять все члены с четными номерами, то получится бесконечная последовательность b_n (т.к. в двоичных записях n и $2n$ содержится одинаковое количество единиц). Однако если взять каждый третий член b_{3m}, то получается интересная новая последовательность, чьи частичные суммы демонстрируют заслуживающую внимания фрактальную тенденцию роста. Если преобразовать такие усеченные последовательности барочных целых чисел в звук (рис. 20), то могут получиться мелодии [22, 23], напоминающие музыку в стиле барокко (отсюда и следует название, которое я им дал). Это в

особенности верно, если взять каждый 63-й член (рис. 21), которые, как говорят, звучат как произведения Скарлатти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M.R. Schroeder: Number Theory in Science and Communication, 3rd Edition (Springer 1997)
2. S.W. Golomb: Shift Register Sequences (Aegean Park Press 1982)
3. W. Munk: J.Fluid Mech. 173, 43–53 (1986)
4. M.M. Sondhi: частная беседа
5. I. Shapiro: Phys. Rev. Letter 13, 789 (1964)
6. M.R. Schroeder, B.S. Atal, G.M. Sessler, and J.E. West: J. Acoust. Soc. Am. 40, 434–440 (1966)
7. U. Eysholdt and C.E. Schreiner, Audiology 21, 242–250 (1982)
8. D.K. Wilson and D.W. Thomson, Atmospheric and Oceanic Technology 11, 751–769 (1994)
9. M. Cohn and A. Lempel, IEEE Trans. IT 23, 135–137 (1977)
10. H. Alrutz and M.R. Schroeder, Proc. 11th Conf. Acoustics (Paris), 235–238 (1983)
11. M.R. Schroeder: Computer Speech: Recognition, Compression, Synthesis (Springer 1999)
12. F.J. MacWilliams and N.J.F. Sloane: The Theory of Error-Correcting Codes (North-Holland, Amsterdam 1977)
13. M.R. Schroeder in R.N. Thurston (ed.): Physical Acoustics, Vol. XVIII, 1–20 (1988)
14. D. Slepian: Key Papers in The Development of Information Theory (IEEE Press, New York 1974)
15. N.J.A. Sloane and M. Harwitt, Applied Optics 15, 107–114 (1976)
16. M.R. Schroeder: Fractals Chaos, Power Laws (W.H. Freeman, New York 1992)
17. Leonardo Fibonacci: Liber Abaci (Pisa 1202)
18. D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn: Phys. Rev. Letters 53, 1951–1953 (1984)
19. V. Elsner: Phys. Rev B 32, 4892–4898 (1985)
20. A. Thue: K. Nord. Vid. Skrifter I Math. Nat. (Oslo) 7, 1–22 (1906)
21. M. Morse: Trans. Am. Math. Soc 22, 84–100 (1921)
22. Lars Kindermann: http://reglos.de/musinum/
23. M.R. Schroeder: Acoustical Society of America 141st Meeting. http://www.acoustics.org/press/141st/schroeder.html

Sequences from Number Theory for Physics, Signal Processing and Art

Manfred R. Schroeder

Drittes Physikalisches Institut, University of Gottingen, Germany, and AT&T Bell Laboratories (ret.)

Abstract—In this article I discuss numerical sequences of potential interest to physicists, engineers, and artists. Foremost among these are the maximum-length or "Galois" sequences, based on the prime number 2 and larger primes, which have found wide use in physics, including acoustics, and engineering:
—the measurement of impulse responses in concert halls, radar echoes from planets (to check the General Theory of Relativity) and travel times in the deep-ocean sound channel (to monitor water temperature and global warming);
—the spatial diffusion of sound waves, coherent (laser) light, and electromagnetic waves;
—algebraic error-correcting codes (Simplex and Hamming codes);
—minimizing peak-factors for radar and sonar signals, synthetic speech, and computer music;
—the formation of X-ray images with 2D masks (in X-ray astronomy).
Other sequences include:
—quadratic-residue sequences for the construction of wide-band diffusing reflection-phase-gratings in one and two dimensions;
—the Morse-Thue sequence, the Fibonacci and "rabbit" sequences and their musical potential; and
—certain self-similar sequences from number theory that engender attractive visual patterns, rhythms, and melodies.