АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 1, с. 14–23

УДК 534.134

ВЗАИМНОСТЬ В ЗАДАЧЕ ОБ ОТРАЖЕНИИ И ПРОХОЖДЕНИИ ВОЛН. ЧАСТЬ 1: СИММЕТРИЯ МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ

© 2003 г. Ю. И. Бобровницкий

Институт машиноведения РАН
101990 Москва, Малый Харитоньевский пер. 4
E-mail: bobrovni@orc.ru

Поступила в редакцию 28.03.2002 г.

Из теоремы взаимности в формулировке Л.М. Лямшева выведено общее соотношение симметрии матриц коэффициентов отражения волн в однородных средах и одномерных волноводах. Показано, что соотношение эквивалентно нормировке амплитуд перекрестным потоком мощности прямых и обратных волн. Оно верно как для распространяющихся, так и для неоднородных волн. Все известные в литературе соотношения симметрии следуют из него как частные случаи.

Классическое понятие взаимности в акустике соответствует неизменности отклика при перемене местами точечного источника и приемника и эквивалентно симметрии функции Грина относительно координат возбуждения и отклика. Свойство взаимности присуще широкому классу линейных сред и конструкций и часто используется при решении практических задач [1–3].

Рассматриваемое в данной статье понятие взаимности относится к задаче об отражении и прохождении волн – см. также [4–7]. "Источником" здесь является волна, падающая на препятствие, а "отклику" соответствуют отраженные и прошедшие волны. Взаимность означает неизменность коэффициента отражения (прохождения) при перемене местами падающей и отраженной (прошедшей) волн. Математически такая взаимность эквивалентна симметрии матрицы коэффициентов отражения и прохождения относительно главной диагонали.

Из литературы известно (например, [8]), что в общем случае коэффициенты отражения и прохождения взаимностью не обладают. Однако если амплитуды волн нормировать усредненным по времени потоком мощности (такая нормировка означает, что амплитуда волны считается равной единице, если ее нормальная к границе интенсивность равна единице), то отражение (прохождение) становится взаимным [5, 8–12]. К сожалению, этот результат верен только для однородных, распространяющихся без затухания, волн. К неоднородным волнам, экспоненциально убывающим с расстоянием, он не применим, так как поток мощности для них тождественно равен нулю. Для неоднородных волн в некоторых простых структурах (стержень, пластина) были получены частные соотношения между симметричными коэффициентами отражения и прохождения [7, 10, 11], однако, общего соотношения взаимности получено не было.

В данной статье показано, что если волновод (среда) и препятствие обладают свойством взаимности в его классическом понимании, то взаимность имеет место и в задаче об отражении и прохождении волн. Ниже, исходя из классической теоремы взаимности, выведено новое соотношение симметрии для коэффициентов отражения волн, которое обобщает все известные в литературе соотношения и которое верно как для распространяющихся, так и для неоднородных волн. Наиболее существенным результатом работы является то, что полученное соотношение эквивалентно нормировке амплитуд переменной составляющей перекрестного потока мощности прямых и обратных волн, а не постоянной составляющей собственных потоков мощности, как это делается в литературе. Иначе говоря, если все учитываемые в задаче волны нормировать переменной составляющей перекрестного потока мощности, то полная матрица коэффициентов отражения и прохождения становится симметричной. Величина этой переменной составляющей отлична от нуля для всех типов волн, причем для распространяющихся волн она совпадает с постоянной составляющей собственного потока мощности.

В этой части работы выведено и проанализировано соотношение симметрии для задачи отражения волн. Кроме того, установлен ряд новых свойств волновых матриц, на которых основана теория. Общая задача об отражении и прохождении волн будет рассмотрена позднее. Тогда же будут приведены некоторые общие результаты, касающиеся энергетики участвующих в процессе волн, в том числе и неоднородных.

Рассмотрим задачу об отражении волн от препятствия в однородной непрерывной структуре, в которой все полевые величины являются функциями одной пространственной координаты x. Предполагается, что в структуре на каждой частоте ω могут существовать $2n$ независимых волн вида

$$u(\pm k_j)\exp(\pm ik_jx - i\omega t), \tag{1}$$

где k_j – это в общем случае комплексная постоянная распространения j-ой волны в направлении x;

$$u = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T - \tag{2}$$

это n-вектор обобщенных смещений сечения структуры; $j = 1, 2, \ldots, n$; верхний индекс T везде означает транспонирование. Действительные значения постоянной распространения соответствуют распространяющимся или однородным по x волнам. Мнимые и комплексные k_j относятся к неоднородным волнам. Половина волн (1), имеющих знак + перед k_j, являются прямыми, т.е. распространяющимися или убывающими в сторону положительных x, остальные n волн (со знаком –) являются обратными, т.е. распространяющимися или убывающими в сторону отрицательных x.

Под структурами в статье подразумеваются прежде всего одномерные твердые и жидкие волноводы, в которых, в отличие от дву- и трехмерных волноводов, может существовать конечное число нормальных волн. Типичным примером такого волновода является прямой тонкий стержень. В нем существует $n = 6$ волн вида (1): продольная, крутильная и по две изгибные волны в двух перпендикулярных плоскостях [13], а компонентами вектора u являются смещения по трем ортогональным осям и углы поворота вокруг этих осей. В общем случае число независимых волн в одномерном волноводе равно числу степеней свободы его поперечного сечения [14].

Рассматриваемые структуры включают в себя также однородные трехмерные среды, если волны в них являются плоскими и отражаются они от однородных плоских границ. В этом случае проекция всех отраженных волн на границу фиксирована, так как определяется падающей волной (закон Снелля [8]), и задача отражения фактически является одномерной: важна зависимость полевых величин только от перпендикулярной к границе координаты x. Число волн (1) здесь ограничено и равно числу различных типов плоских волн в данной среде. Так, в жидкой или газообразной среде это единственная волна продольного типа ($n = 1$). В упругой среде существует два типа волн – продольная и сдвиговая ($n = 2$). В пористых средах, композиционным материалах, средах с микроструктурой число типов волн может быть три и больше [15].

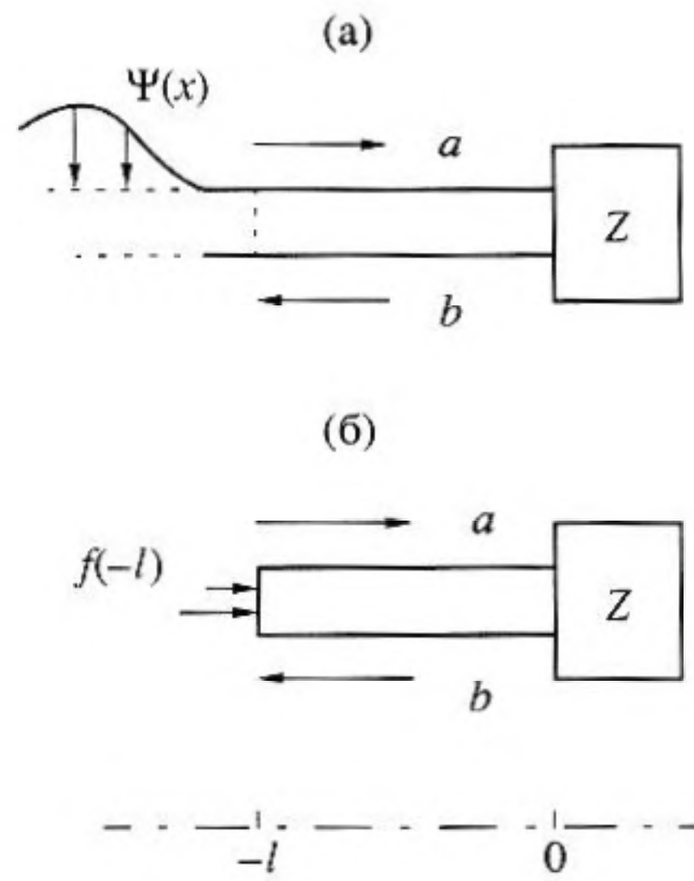

Рис. 1. Однородная структура (волновод) с препятствием Z на конце $x = 0$. а – Падающие волны с амплитудами a, возбуждаемые внешней нагрузкой $\Psi(x)$, отражаются от препятствия с амплитудами b; б – те же падающие и отраженные волны, возбуждаемые силами $f(-l)$ в сечении $x = -l$.

Приводимая ниже теория охватывает также однородные двумерные среды, в которых волны с линейным фронтом отражаются от однородных линейных препятствий. Здесь также след волн на линейной границе задан и задача является одномерной, а число n волн (1) равно числу плоских волн в среде. Например, в тонкой однородной пластине число волн равно четырем – это две волны изгибного типа (распространяющаяся и неоднородная), а также продольная и сдвиговая волны, распространяющиеся без затухания в плоскости пластины [13].

Пусть одна из указанных выше структур занимает область отрицательных x и к ее правой границе $x = 0$ присоединено препятствие Z (рис. 1). Положим, что участок структуры $[-l, 0]$, примыкающий к препятствию, свободен от внешних воздействий и в нем возбуждается n прямых (падающих на препятствие) волн (1) с комплексными амплитудами смещения $a_1, \ldots, a_n$ и n обратных, отраженных от препятствия, волн (1) с комплексными амплитудами смещения $b_1, \ldots, b_n$. Амплитуды отраженных волн однозначно определяются амплитудами падающих волн и параметрами структуры и препятствия. Связь между ними принято записывать в матричном виде

$$b = Ra, \tag{3}$$

где a и b – это записанные в виде n-векторов амплитуды падающих и отраженных волн

$$a = [a_1, \ldots, a_n]^T, \quad b = [b_1, \ldots, b_n]^T, \tag{4}$$

а R – это комплексная $n \times n$-матрица коэффициентов отражения. Элемент R_{jm} этой матрицы равен амплитуде смещения j-ой отраженной волны, если падающей является m-ая волна единичной амплитуды.

Задача состоит в том, чтобы вычислить матрицу коэффициентов отражения и найти соотношение симметрии, устанавливающее связь между ее симметричными элементами R_{jm} и R_{mj} или, что то же самое, связь между матрицей R и ее транспонированной R^T.

Введем, следуя [13, 16], волновые матрицы – основные характеристики структуры, необходимые для решения задачи отражения. Так как структура с n типами волн имеет поперечное сечение с n степенями свободы [14], то ее колебательное движение характеризуется не только n обобщенными смещениями (2), но и n сопряженными с ними обобщенными силами $f = [f_1, f_2, \ldots, f_n]^T$. Каждая из n прямых (падающих) волн, скажем с номером m, имеет свою независимую форму колебаний поперечного сечения, которая характеризуется определенным n-вектором обобщенных смещений и вектором обобщенных сил:

$$u^{(m)} = [u_1^{(m)}, \ldots, u_n^{(m)}]^T, \quad f^{(m)} = [f_1^{(m)}, \ldots, f_n^{(m)}]^T, \quad (5)$$

причем эта форма не зависит от продольной координаты x; $m = 1, \ldots, n$. Составим из вектор-столбцов (5) две квадратные матрицы порядка n, матрицу смещений D_i и силовую матрицу F_i,

$$D_i = [u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}], \quad F_i = [f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}], \quad (6)$$

а также две аналогичные матрицы D_r и F_r, которые составлены из векторов (5), соответствующих обратным (отраженным) волнам. Очевидно, что матрицы D_r и F_r могут быть получены из матриц D_i и F_i путем замены знака перед всеми постоянными распространения.

Зависимость смещений и сил в нормальной волне от координаты x определяется ее амплитудой, которая, согласно (1), является экспоненциальной функцией x. Если (4) это амплитуды падающих и отраженных волн в сечении $x = 0$, то их амплитуды в произвольном сечении x можно записать в матричном виде как

$$a(x) = \Phi_i(x)a, \quad b(x) = \Phi_r(x)b, \quad (7)$$

где амплитудные матрицы

$$\begin{aligned} \Phi_i(x) &= \mathrm{diag}[\exp(ik_1x), \ldots, \exp(ik_nx)], \\ \Phi_r(x) &= \mathrm{diag}[\exp(-ik_1x), \ldots, \exp(-ik_nx)] \end{aligned} \quad (8)$$

определяют набег фаз и убывание амплитуд на отрезке $[0, x]$.

Используя матрицы (6), (8) и амплитуды (7), смещения и напряжения (силы) в любом сечении структуры в самом общем случае, когда присутствуют все падающие и отраженные волны, можно записать в следующей компактной форме

$$\begin{aligned} u(x) &= D_ia(x) + D_rb(x) = D_i\Phi_i(x)a + D_r\Phi_r(x)b, \\ f(x) &= F_ia(x) + F_rb(x) = F_i\Phi_i(x)a + F_r\Phi_r(x)b. \end{aligned} \quad (9)$$

Эти соотношения дают исчерпывающее описание произвольного гармонического движения структуры и являются отправными для последующего изложения. В них входят шесть квадратных матриц порядка n, назовем их волновыми матрицами, которые полностью характеризуют структуру как носителя волнового поля. Элементы волновых матриц являются комплексными, зависят от частоты и параметров структуры, в частности от постоянных распространения k_j.

В качестве примера вычислим волновые матрицы для однородного тонкого изгибно колеблющегося стержня. Общим решением уравнения Бернулли-Эйлера [13] $Bd^4w(x)/dx^4 - \rho\omega^2Aw(x) = 0$ относительно поперечного смещения w является функция

$$w(x) = a_1e^{ikx} + a_2e^{-kx} + b_1e^{-ikx} + b_2e^{kx}, \quad (10)$$

где постоянные распространения двух нормальных волн равны $k_1 = k$ и $k_2 = ik$; $k^4 = \rho\omega^2A/B$, ρ – плотность материала, A – площадь поперечного сечения, B – изгибная жесткость стержня. Вычисляя из (10) два обобщенных смещения $u_1(x) = w(x)$, и $u_2(x) = -w'(x)$, а также два сопряженных с ними обобщенных усилия – перерезывающую силу $f_1(x) = Bw'''(x)$ и изгибающий момент $f_2(x) = Bw''(x)$, нетрудно получить после приведения к виду (9), что волновые матрицы для прямых волн равны

$$\begin{aligned} D_i &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ik & k \end{bmatrix}, \quad F_i = -Bk^2\begin{bmatrix} ik & k \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ \Phi_i(x) &= \begin{bmatrix} e^{ikx} & 0 \\ 0 & e^{-kx} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

а для обратных волн получаются заменой k на $-k$, $a = [a_1, a_2]^T$, $b = [b_1, b_2]^T$.

Приведем теперь некоторые общие свойства волновых матриц, которые потребуются в дальнейшем, но в литературе не рассматривались. Отметим прежде всего, что волновые матрицы являются неособенными. Для диагональных амплитудных матриц (8) это свойство очевидно. Для матриц смещения D_i, D_r и сил F_i, F_r это свойство является следствием линейной независимости их столбцов (см. (5), (6)), которые являются собственными векторами некоторой нормальной матрицы [14]. Неособенность означает, в частности, что все волновые матрицы имеют обратные. Для

амплитудных матриц (8) имеют место также следующие очевидные равенства:

$$\Phi_r(x) = \Phi_i^{-1}(x), \quad \Phi_i(0) = \Phi_r(0) = I, \tag{12}$$

где I – единичная матрица порядка n.

При выводе соотношения симметрии важную роль играют следующие энергетические матрицы, которые определяют различные энергетические характеристики волнового поля в структуре:

$$P_i = D_i^* F_i, \quad P_r = D_r^* F_r, \tag{13}$$

$$S_i = D_i^T F_i, \quad S_r = D_r^T F_r, \tag{14}$$

$$S = \frac{1}{2}(D_i^T F_r - F_i^T D_r), \quad Q = D_i^T F_r, \tag{15}$$

где звездочка означает эрмитово сопряжение. Матрицы (13) определяют средние по времени собственные потоки мощности прямых и обратных волн. Например, величина

$$W_i^= = \frac{i\omega}{2} a^* P_i a$$

представляет собой постоянный по времени комплексный поток мощности падающих волн. Матрицы (14) определяют переменную составляющую мгновенного потока мощности – см. подробнее Приложение 1. Матрицы (15) тесно связаны с переменной составляющей перекрестного потока мощности.

Матрицы (13)–(15) удовлетворяют следующим соотношениям

$$P_i + P_r = 0, \quad S_i + S_r = 0, \tag{16}$$

$$S_i^T = S_i, \quad S_r^T = S_r, \tag{17}$$

$$S = \frac{1}{2}(Q + Q^T) = \mathrm{diag}[Q_{11}, Q_{22}, \ldots, Q_{nn}]. \tag{18}$$

Соотношения (16) означают, что как постоянная, так и переменная составляющие потока мощности прямых и обратных нормальных волн равны и противоположны по знаку. Соотношения (17) выражают свойство симметрии энергетических матриц. А соотношение (18) означает, что матрица S (15) диагональна. Строгое доказательство соотношений (16)–(18) дано в Приложении 2. Там же показано, что свойства (17) и (18) являются следствием классической теоремы взаимности.

Для получения общего решения задачи об отражении волн препятствие должно быть описано теми же понятиями, что и волновод. Так как на препятствие со стороны волновода действуют n обобщенных сил $g = [g_1, \ldots, g_n]^T$, а его отклик представляет собой n обобщенных смещений (2), то наиболее естественной характеристикой для описания движения препятствия является его $n \times n$-матрица Z входных импедансов по отношению к силам взаимодействия или его $n \times n$-матрица Y входных проводимостей, определенные соотношениями

$$g = Zu, \quad u = Yg. \tag{19}$$

Матрицы Z и Y комплексны и симметричны. Их симметричность является следствием теоремы взаимности, которая предполагается верной и для препятствия. (Строго говоря, равенства (19) определяют матрицы динамических жесткостей и податливостей, отличающихся от матриц импедансов и проводимостей множителем $-i\omega$. В рамках данной статьи это отличие не является существенным).

Рассмотрим теперь структуру с препятствием на конце $x = 0$ (рис. 1). Пусть g и $f(-0)$ это векторы обобщенных сил, действующих соответственно на препятствие и на структуру, а u и $u(0)$ – их обобщенные смещения при $x = 0$. Тогда, записав условия жесткого соединения препятствия и структуры в виде

$$g + f(-0) = 0, \quad u = u(0) \tag{20}$$

и, подставив в них соотношения (9) и (19), получим после несложных преобразований следующее выражение для $n \times n$-матрицы коэффициентов отражения (3)

$$R = -(F_r - ZD_r)^{-1}(F_i - ZD_i). \tag{21}$$

Если вместо импедансной матрицы Z используется матрица проводимостей Y, то вместо (21) получается формула

$$R = -(YF_r - D_r)^{-1}(YF_i - D_i). \tag{22}$$

Матрица R устанавливает связь между амплитудами a падающих волн и амплитудами b отраженных волн в сечении $x = 0$. Она зависит от физических и геометрических параметров структуры, точнее от ее волновых матриц, и от матрицы Z входных импедансов или матрицы Y входных проводимостей препятствия.

Приведем несколько полезных частных случаев формул (21), (22).

Свободный край. Матрица коэффициентов отражения волн от свободного края структуры получается из (21), если матрицу импедансов препятствия положить равной нулевой матрице

$$R_0 = -F_r^{-1} F_i. \tag{23}$$

Неподвижный край. Матрица коэффициентов отражения от неподвижного края структуры равна

$$R_\infty = -D_r^{-1} D_i. \tag{24}$$

Ее можно получить из (22), устремив матрицу проводимостей Y к нулевой матрице.

Прозрачное препятствие. Все коэффициенты отражения равны нулю (матрица R является

нулевой), если препятствие имеет матрицу импедансов, равную

$$Z = Z_i = F_i D_i^{-1}. \tag{25}$$

Матрица Z_i является матрицей характеристических импедансов структуры. Она равна матрице входных импедансов в сечении $x = 0$ полубесконечной структуры, занимающей область $x \geq 0$. (Действительно, в этом случае имеем $f(0) = F_i a$, $u(0) = D_i a$, откуда, исключая a, получаем $f(0) = F_i D_i^{-1} u(0)$). Отметим, что матрица входных импедансов полубесконечной структуры, занимающей область $0 \geq x$, равна $Z_r = -F_r D_r^{-1}$ и отличается от Z_i знаком некоторых внедиагональных элементов. Используя характеристические импедансные матрицы Z_i и Z_r, формулу (21) можно переписать в виде

$$R = D_r^{-1}(Z_r + Z)^{-1}(Z_i - Z)D_i. \tag{26}$$

Аналогично, если вместо импедансов используются проводимости, то

$$R = F_r^{-1}(Y_r + Y)^{-1}(Y_i - Y)F_i, \tag{27}$$

где $Y_i = Z_i^{-1}$, $Y_r = Z_r^{-1}$. Матричные выражения (21), (22), (26) и (27) для коэффициентов отражения волн от препятствия представляют собой обобщение известных формул Френеля [8] на случай волноводов и сред со многими типами нормальных волн. Некоторые из этих формул приводятся в литературе, например, в [13].

Чтобы вывести соотношение симметрии для матрицы коэффициентов отражения R, воспользуемся классической теоремой взаимности [2]. С этой целью выделим участок волновода $[-l, 0]$, свободный от внешних воздействий, и заменим действие отсеченной его части $x < -l$ обобщенными силами реакции $f(-l)$, действующими в сечении $x = -l$, как показано на рис. 1б. Эти силы создают в выделенном участке такой же набор прямых и обратных волн, как и внешнее воздействие $\Psi(x)$ в первоначальной структуре (рис. 1а). Используя равенства (3) и (9), силы и смещения в сечении $x = -l$ можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} u(-l) &= [D_i\Phi_i(-l) + D_r\Phi_r(-l)R]a, \\ f(-l) &= [F_i\Phi_i(-l) + F_r\Phi_r(-l)R]a. \end{aligned} \tag{28}$$

Пусть теперь имеется два разных набора амплитуд падающих волн $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ и соответствующие им векторы сил и смещений (28): $f^{(1)}(-l)$, $u^{(1)}(-l)$ и $f^{(2)}(-l)$, $u^{(2)}(-l)$. Тогда, согласно классической теореме взаимности, имеет место равенство

$$[f^{(1)}(-l)]^T u^{(2)}(-l) - [u^{(1)}(-l)]^T f^{(2)}(-l) = 0. \tag{29}$$

Подстановка соотношений (28) в (29) приводит, после несложных преобразований, к равенству

$$\begin{gathered} [a^{(1)}]^T[\Phi_i(-l)(S_i - S_i^T)\Phi_i(-l) + \\ + R^T\Phi_r(-l)(S_r - S_r^T)\Phi_r(-l)R + 2\Phi_i(-l)S\Phi_r(-l)R - \\ - 2R^T\Phi_r(-l)S^T\Phi_i(-l)]a^{(2)} = 0, \end{gathered}$$

где энергетические матрицы S_i, S_r и S даны формулами (13)–(15). Используя свойство симметрии матриц S_i, S_r и диагональность матрицы S – см. (17), (18), а также легко проверяемое соотношение $\Phi_i(-l)S\Phi_r(-l) = S$, это равенство сводится к следующему

$$[a^{(1)}]^T(SR - R^TS^T)a^{(2)} = 0.$$

В силу произвольности векторов амплитуд падающих волн из этого следует симметричность матрицы SR:

$$SR = (SR)^T. \tag{30}$$

Это и есть искомое соотношение симметрии: матрица коэффициентов отражения R, определенная относительно амплитуд смещения, первоначально не являясь симметричной ($R^T \neq R$), становится симметричной после умножения слева на матрицу $S = (D_i^T F_r - F_i^T D_r)/2$. Матрица S зависит только от параметров волновода (среды), она неособенна $|S| \neq 0$ и диагональна.

Свойство (30) можно записать в виде соотношения между симметричными элементами матрицы R:

$$S_{jj}R_{jm} = S_{mm}R_{mj}, \tag{31}$$

где S_{jj} и S_{mm} – это j-ый и m-ый элементы диагонали матрицы S, $j \neq m$.

Покажем также, что свойство симметрии (30), (31) эквивалентно некоторой нормировке амплитуд нормальных волн. Действительно, если вместо амплитуд смещений a и b ввести амплитуды α и β в соответствии с равенствами

$$a = S^{-1/2}\alpha, \quad b = S^{-1/2}\beta, \tag{32}$$

то матрица коэффициентов отражения R_1, связывающая новые амплитуды, является симметричной. Подставляя (32) в (3), получим

$$\beta = R_1\alpha, \quad R_1 = S^{1/2}RS^{-1/2}. \tag{33}$$

Если матрицу R_1 представить в виде

$$R_1 = S^{1/2}RS^{-1/2} = S^{-1/2}(SR)S^{-1/2}$$

и учесть, что нормировочная матрица $S^{1/2}$ диагональна, а значит, и симметрична, то симметричность новой матрицы коэффициентов отражения становится очевидной: $R_1^T = R_1$. Таким образом, если амплитуды смещений нормальных волн нор-

мировать элементами диагональной матрицы $S^{1/2}$, то отражение волн становится взаимным (симметричным): амплитуда m-ой отраженной волны β_m при падении на препятствие единичной j-ой волны ($\alpha_j = 1$) равна амплитуде отраженной j-ой волны β_j, вызванной падением на препятствие m-ой волны единичной амплитуды ($\alpha_m = 1$). Подчеркнем, что это свойство верно для всех типов волн – распространяющихся и неоднородных.

Рассмотрим физический смысл полученного соотношения симметрии. Как видно из (18), матрица S составлена из диагональных элементов матрицы $Q = D_i^T F_r$. Ее m-ый элемент $S_{mm} = Q_{mm}$ определяет, согласно формуле (П5) Приложения 1, переменную составляющую перекрестного потока мощности прямой и обратной нормальных волн с номером m: если a_m и b_m это амплитуды смещений этих волн, то величина

$$-\frac{i\omega}{2} S_{mm} a_m b_m = -\frac{i\omega}{2} (u_i)_m (f_r)_m \tag{34}$$

представляет собой комплексную амплитуду переменной составляющей работы в единицу времени обобщенных сил $(f_r)_m$ m-ой обратной волны на смещениях $(u_i)_m$ m-ой прямой волны. Пусть $W_{im}^{\sim}$ – это величина (34), определенная для прямой нормальной волны при $b_m = a_m$, и $W_{rm}^{\sim}$ – это величина (34), определенная для обратных волн при $a_m = b_m$. Тогда, если от амплитуд смещений a_m и b_m перейти к энергетическим амплитудам

$$\begin{aligned} \alpha_m &= (W_{im}^{\sim})^{1/2} = (-i\omega S_{mm}/2)^{1/2} a_m, \\ \beta_m &= (W_{rm}^{\sim})^{1/2} = (-i\omega S_{mm}/2)^{1/2} b_m, \end{aligned} \tag{35}$$

которые отличаются от (32) постоянным множителем $(-i\omega/2)^{1/2}$, то физический смысл соотношений симметрии (30)–(33) становится вполне ясным: чтобы матрица коэффициентов отражения была симметричной, амплитудами нормальных волн должны быть квадратные корни переменной составляющей перекрестного потока мощности.

Покажем, что для однородной волны с действительной постоянной распространения k_m переменная составляющая перекрестного потока мощности (34) совпадает с постоянной составляющей собственного потока m-ой волны. Действительно, согласно свойству (П6) силовой матрицы F_r (см. Приложение 2), силы $(f_r)_m$ в m-ой обратной волне с действительной амплитудой равны комплексно сопряженным силам $(f_i)_m$ в m-ой прямой волне, а выражение (34) оказывается равным усредненному по времени комплексному собственному потоку мощности в m-ой прямой волне. Таким образом, нормировка (32), (35) в случае распространяющихся волн эквивалентна известной в литературе энергетической нормировке.

Для неоднородных волн собственные потоки мощности равны нулю. Однако перекрестные потоки прямых и обратных волн отличны от нуля [17], так что нормировка перекрестными потоками (32), (35) является, по-видимому, единственной, которая приводит к симметричным матрицам коэффициентов отражения, обладающих свойством взаимности для волноводов и сред с любыми типами нормальных волн. Отметим также, что имеющиеся в литературе соотношения между симметричными коэффициентами отражения неоднородных волн в некоторых частных волноводах и средах [7–12] получаются из нормировки перекрестным потоком мощности как частные случаи.

Рассмотрим два простых примера, которые иллюстрируют полученное соотношение симметрии. Начнем со стержня Бернулли-Эйлера, в котором из двух типов нормальных волн одна распространяющаяся, а другая неоднородная. Волновые матрицы для этого волновода даны в (11). По ним нетрудно рассчитать энергетические матрицы, матрицы характеристических импедансов и коэффициентов отражения. В частности, диагональная матрица (15) имеет стедующие ненулевые элементы:

$$S_{11} = 2iBk^3, \quad S_{22} = 2Bk^3. \tag{36}$$

Соотношение симметрии для матрицы коэффициентов отражения в форме (31) записывается в виде

$$R_{21} = R_{12}(S_{11}/S_{22}) = iR_{12}, \tag{37}$$

что совпадает с результатом работы [7]. Например, для свободного и защемленного краев матрицы коэффициентов отражения, вычисленные по формулам (23) и (24), равны

$$R_0 = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ 1+i & -i \end{bmatrix}, \quad R_\infty = \begin{bmatrix} i & -1+i \\ -1-i & -i \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что они удовлетворяют соотношению (37). Автор проверил непосредственно (аналитически) справедливость соотношения (37) и для случая отражения от препятствия с произвольной симметричной матрицей импедансов Z. Комплексные амплитуды переменной составляющей перекрестного потока мощности (34) здесь равны (отличаются от (36) множителем $-i\omega/2$)

$$W_1^{\sim} = Bk^3\omega a_1^2, \quad W_2^{\sim} = -iBk^3\omega a_2^2. \tag{38}$$

Для распространяющейся волны $W^{\sim}$ действительна (если a_1 действительна) и совпадает с усредненным по времени ее собственным потоком мощности. Для неоднородной волны собственный поток

мощности тождественно равен нулю. Но перекрестный поток, как видно из (38), является отличной от нуля чисто мнимой величиной.

Рассмотрим теперь пример отражения волн в двумерной структуре – полубесконечной однородной пластине ($x < 0$) с линейной границей $x = 0$. Положим, что пластина имеет малую волновую толщину h, так что ее изгибные колебания подчиняются классическому уравнению Жермен-Лагранжа [13]: $\Delta^2 w(x, y) - k_0^4 w(x, y) = 0$, где $k_0 = (\rho\omega^2/D)^{1/4}$ – волновое число, D – изгибная жесткость, ρ – плотность, Δ – двумерный оператор Лапласа. Пусть в пластине возбуждаются (например, с помощью внешних сил, приложенных на некотором расстоянии от границы $x = 0$) две падающие изгибные волны с амплитудами a_1 и a_2, след которых на границе $x = 0$ представляет собой экспоненциальную функцию $\exp(iky)$ с заданной комплексной y-компонентой k волнового вектора. От границы отражаются две изгибные волны с амплитудами b_1 и b_2, имеющие на границе, в силу закона Снелля, тот же след. Общее поле поперечных смещений пластины представляется суммой смещений всех этих волн

$$w(x, y) = [a_1\exp(ik_1x) + a_2\exp(ik_2x) + \\ + b_1\exp(-ik_1x) + b_2\exp(-ik_2x)]e^{iky}, \quad (39)$$

где комплексные x-компоненты постоянной распространения получаются после подстановки (39) в уравнение Жермен-Лагранжа и равны

$$k_1^2 = k_0^2 - k^2, \quad k_2^2 = -k_0^2 - k^2. \quad (40)$$

Выбирая в качестве компонентов вектора u смещение $u_1 = w$ и угол поворота $u_2 = -\partial w/\partial x$, а в качестве элементов вектора f – перерезывающую силу $f_1 = D[\partial^3 w/\partial x^3 + (2 - \nu)\partial^3 w/\partial x\partial y^2]$ и изгибающий момент $f_2 = D(\partial^2 w/\partial x^2 + \nu\partial^2 w/\partial y^2)$, где ν – это коэффициент Пуассона, и представляя их в форме (9), получим следующие выражения для волновых матриц

$$D_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ik_1 & -ik_2 \end{bmatrix}, \quad F_i = D\begin{bmatrix} -ik_1p_1 & ik_2p_2 \\ -p_2 & p_1 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Здесь введены обозначения: $p_1 = k_0^2 + k^2(1 - \nu)$, $p_2 = k_0^2 - k^2(1 - \nu)$. Диагональные элементы матрицы (15), вычисленные с помощью (41), здесь равны

$$S_{11} = i2Dk_0^2k_1, \quad S_{22} = -i2Dk_0^2k_2. \quad (42)$$

Поэтому соотношение симметрии (31) для произвольного препятствия на пластине, установленного на линии $x = 0$, записывается в виде

$$R_{21} = R_{12}(S_{11}/S_{22}) = R_{12}(-k_1/k_2), \quad (43)$$

где $k_{1,2}$ даны в (40). В случае нормального падения волн на границу ($k = 0$) имеем $k_1 = k_0$, $k_2 = ik_0$ и соотношение (43) совпадает с соотношением симметрии для стержня (37). Величины (42), умноженные на $-i\omega/2$, совпадают, согласно (34), с комплексной амплитудой переменной составляющей перекрестного потока мощности. В случае, когда след падающих волн характеризуется действительной ($k < k_0$) или чисто мнимой величиной k, первая изгибная волна в пластине является однородной, а величина $-i\omega S_{11}/2$ представляет собой ее вещественный положительный поток мощности в направлении x. В общем случае произвольного следа падающих волн (k комплексна) все волны, падающие и отраженные, являются неоднородными, а величины (42) и, следовательно, перекрестные потоки мощности являются комплексными величинами.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. МГНОВЕННЫЙ ПОТОК МОЩНОСТИ И ЕГО КОМПОНЕНТЫ

Все выкладки в статье проведены для гармонических во времени сигналов с использованием их комплексного представления. Реальные сигналы всегда действительны. Поэтому для выяснения физического смысла квадратичных комплексных величин, например, произведения комплексных амплитуд смещения и силы, следует знать соотношения между действительным и комплексным представлениями соответствующих функций. Ниже приводятся необходимые для целей статьи соотношения[18].

Пусть

$$u(t) = u_c\cos(\omega t) + u_s\sin(\omega t), \\ f(t) = f_c\cos(\omega t) + f_s\sin(\omega t) - \quad (\text{П1})$$

это n-векторы смещений и сил (2), (5), записанные как действительные функции времени, где векторы $u_{c,s}$ и $f_{c,s}$ имеют действительные компоненты. Комплексное представление сигналов (П1) имеет вид

$$u(t) = \mathrm{Re}(ue^{-i\omega t}), \quad f(t) = \mathrm{Re}(fe^{-i\omega t}),$$

где

$$u = u_c + iu_s, \quad f = f_c + if_s \quad (\text{П2})$$

это n-векторы комплексных амплитуд. Мгновенный поток колебательной мощности через сечение волновода по определению равен

$$W(t) = f(t)du(t)/dt = \\ = W_0 + W_c\cos(2\omega t) + W_s\sin(2\omega t), \quad (\text{П3})$$

где W_0 – это постоянная, т.е. средняя по времени, составляющая потока, а $W^{\sim} = W_c + iW_s$ – это ком-

плексная амплитуда переменной составляющей потока мощности частоты 2ω. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что для них верны следующие соотношения

$$W_0 = \mathrm{Re}\left(\frac{i\omega}{2}u^* f\right), \qquad (\text{П4})$$

$$W^{\sim} = -\frac{i\omega}{2}u^T f. \qquad (\text{П5})$$

Если вместо векторов u и f подставить их выражения через волновые матрицы – см. (9), то получим, что постоянная составляющая потока мощности (П4) выражается через энергетическую матрицу (13), переменная составляющая (П5) – через матрицу (14), а матрица (15) определяет переменную составляющую перекрестного потока мощности – см. также (34).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. СВОЙСТВА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Ниже выводятся соотношения (16)–(18), которым удовлетворяют энергетические матрицы (13)–(15).

Для доказательства соотношений (16) рассмотрим сначала зависимость волновых матриц от постоянных распространения k_j нормальных волн. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_m$ – это порядковые номера тех компонент обобщенного вектора смещений (2), (5), которые имеют нечетную зависимость от k_j, т.е. изменяют знак при изменении знака всех постоянных распространения. Так как смещения и силы являются сопряженными величинами и их произведение пропорционально потоку мощности, представляющему собой нечетную функцию от k_j, то компоненты силы с порядковыми номерами $j_1, j_2, \ldots, j_m$, наоборот, являются четными функциями, а остальные компоненты – нечетными функциями k_j. Таким образом, если ввести две диагональные матрицы порядка n: J_d, у которой элементы диагонали с порядковыми номерами $j_1, j_2, \ldots, j_m$ равны –1, а остальные элементы равны единице, и матрицу J_f, у которой $j_1, j_2, \ldots, j_m$-ые элементы диагонали равны 1, а остальные равны –1, то связь между волновыми матрицами прямых и обратных нормальных волн можно записать как

$$D_r = J_d D_i, \quad F_r = J_f F_i. \qquad (\text{П6})$$

Введенные таким образом матрицы удовлетворяют следующим очевидным равенствам

$$J_d + J_f = 0, \quad J_d J_f = J_f J_d = -I, \qquad (\text{П7})$$

где I – единичная матрица. Кроме того, они являются нильпотентными:

$$J_d^2 = J_f^2 = I. \qquad (\text{П8})$$

Используя свойства (П6)–(П8), нетрудно доказать равенства (16). Так, для матрицы P_r имеем

$$P_r = D_r^* F_r = (J_d D_i)^* J_f F_i = D_i^* J_d J_f F_i = -P_i,$$

что эквивалентно первому равенству (16). Второе равенство доказывается аналогично. Кроме этого, с помощью (П6)–(П8) можно получить связь между двумя слагаемыми матрицы S – см. (15), (18). Действительно, второе слагаемое оказывается равным

$$F_i^T D_r = F_i^T J_d D_i = F_i^T J_f^2 J_d D_i =$$

$$= -F_i^T J_f D_i = -(D_i^T F_r)^T = -Q^T,$$

так что матрица (15) равна $S = (Q + Q^T)/2$, что доказывает первую половину равенства (18).

Свойство симметрии (17) матриц S_i и S_r, а также диагональность матрицы S тесно связаны с классической теоремой взаимности. Для доказательства этих свойств рассмотрим однородный участок структуры с граничными сечениями $x = 0$ и l. Пусть в нем имеется поле из прямых нормальных волн с амплитудами a и обратных волн с амплитудами b. Тогда, на основании равенств (9), обобщенные силы на торцах структуры, которые возбуждают эту систему нормальных волн, должны равняться

$$f(0) = F_i a + F_r b, \quad f(l) = -F_i \Phi_i(l) a - F_r \Phi_r(l) b, \qquad (\text{П9})$$

а обобщенные смещения торцевых сечений запишутся в виде

$$u(0) = D_i a + D_r b, \quad u(l) = D_i \Phi_i(l) a + D_r \Phi_r(l) b. \qquad (\text{П10})$$

Воспользуемся теперь теоремой взаимности [2]. Пусть имеется две системы сил (П9): $f^{(1)}(0), f^{(1)}(l)$ и $f^{(2)}(0), f^{(2)}(l)$. Эти силы возбуждают в структуре две системы нормальных волн с амплитудами $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ и $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, а также смещения $u^{(1)}(0)$, $u^{(1)}(l)$ и $u^{(2)}(0)$, $u^{(2)}(l)$. По теореме взаимности имеем

$$\begin{aligned}&[f^{(1)}(0)]^T u^{(2)}(0) + [f^{(1)}(l)]^T u^{(2)}(l) = \\ &= [u^{(1)}(0)]^T f^{(2)}(0) + [u^{(1)}(l)]^T f^{(2)}(l).\end{aligned} \qquad (\text{П11})$$

Подстановка сюда выражений (П9) и (П10) дает равенство, которое из-за его громоздкости целиком здесь не приводится. Вместо этого рассмотрены его частные случаи, достаточные для доказательства соотношений (17), (18).

Положим, что в равенствах (П9)–(П11) амплитуды всех обратных волн равны нулю: $b^{(1)} = b^{(2)} = 0$. Тогда соотношение взаимности приводится к виду

$$[a^{(1)}]^T[(S_i - S_i^T) - \Phi_i(l)(S_i - S_i^T)\Phi_r(l)]a^{(2)} = 0.$$

Ввиду произвольности векторов $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, каждый jm-ый элемент матрицы в квадратных скобках должен равняться нулю:

$$(S_i - S_i^T)_{jm}[1 - \exp i(k_j + k_m)l] = 0.$$

Но так как постоянные распространения отличны от нуля и длина l участка структуры выбрана произвольно, то отсюда следует равенство симметричных элементов матрицы S_i: $(S_i)_{jm} = (S_i)_{mj}$, которое и означает ее симметричность: $S_i^T = S_i$. Второе равенство (17), т.е. симметричность матрицы S_r, доказывается аналогично, если в соотношениях (П9)–(П11) положить, что амплитуды прямых волн равны нулю, $a^{(1)} = a^{(2)} = 0$, и в структуре возбуждены только обратные волны.

Диагональность матрицы (15) доказывается тем же способом, если в соотношениях (П9)–(П11) положить $b^{(1)} = a^{(2)} = 0$. В этом случае соотношение взаимности (П11) приводится к следующему виду

$$[a^{(1)}]^T[S - \Phi_i(l)S\Phi_r(l)]b^{(2)} = 0.$$

Очевидно, что ввиду произвольности амплитуд $a^{(1)}$, $b^{(2)}$ матрица в квадратных скобках должна быть нулевой. Рассмотрим произвольный, скажем jm-ый, ее элемент:

$$(S)_{jm}[1 - \exp i(k_j - k_m)l] = 0.$$

Для внедиагональных элементов, $j \neq m$, выражение в квадратных скобках отлично от нуля, так как $k_j \neq k_m$ и l произвольно, и следовательно jm-ый элемент матрицы S, лежащий вне главной диагонали, должен равняться нулю. Для диагональных элементов, $j = m$, наоборот, выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю, а элементы матрицы отличны от нуля, что и доказывает диагональность матрицы S и вторую половину свойства (18).

Следует заметить, что при доказательстве было использовано предположение о том, что все постоянные распространения волн различны. Это предположение верно для всех жидких и твердых волноводов и сред на всех частотах, кроме счетного числа критических частот, где корни дисперсионных уравнений являются кратными. Для случая кратных корней система волн (1) математически неполна и должна быть дополнена так называемыми присоединенными волнами [19]. Насколько известно автору этих строк, теория отражения и прохождения для присоединенных волн еще не создана и вопрос о симметрии матриц отражения/прохождения здесь поэтому не ставился. Однако, по мнению автора, присоединенные волны являются чрезмерно сильной математической идеализацией и в реальных средах их нет. В работе [20], в частности, показано, что наличие в волноводе потерь, даже ничтожно малых, снимает кратность корней дисперсионных уравнений. Это делает все корни различными, а все результаты данной статьи справедливыми на всех частотах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955.
2. *Лямшев Л.М.* К вопросу о принципе взаимности в акустике // Доклады АН СССР. 1959. Т. 125. № 6. С. 1231–1234.
3. *Lyamshev L.M.* Reciprocity principle and its applications in acoustics // Proc. of Intern. Noise and Vibration Control Conf. NOISE-93. StPetersburg, 1993. V. 5. P. 41–51.
4. *Тютекин В.В.* Проявление свойства взаимности в задаче прохождения звуковой волны через слоисто-неоднородный слой // Акуст. журн. 1997. Т. 43. Вып. 4. С. 570–572.
5. *Mace B.R.* Reciprocity, conservation of energy and some properties of reflection and transmission coefficients // Journal of Sound and Vibration. 1992. V. 155. № 2. P. 375–381.
6. *Caviglia G., Morro A.* A new approach to reflection-transmission between viscoelastic half-spaces // Journal of the Acoustical Society of America. 1999. V. 106. № 4. P. 1666–1672.
7. *Milne H.K.* A note on beam reflection matrices and reciprocity // Journal of Sound and Vibration. 1987. V. 114. № 1. P. 149–151.
8. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957.
9. *Kuhn G.J.* Symmetry of energy-transfer ratios for elastic waves at a boundary between two media // Journal of the Acoustical Society of America. 1964. V. 36. № 3. P. 423–427.
10. *Kennett B.L.N.,Kerry N.J.,Woodhouse J.H.* Symmetries in the reflection and transmission of elastic waves // Geophysical J. of the Royal Astronomical Society. 1978. V. 52. № 2. P. 215–229.
11. *Gibbs B.M., Tattersall J.D.* Vibration energy transmission and mode conversion at a corner junction of square section rods // Transaction of the ASME (Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design). 1987. V. 109. № 4. P. 348–355.
12. *Коузов Д.П., Кравцова Т.С.* О преобразовании вибрационных волн в пластине на ребре жесткости // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 204–211.
13. *Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д.* Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979.
14. *Краснушкин П.Е.* Нормальные волны в цепочечных многополюсных фильтрах // Журнал технической физики. 1947. Т. 17. Вып. 6. С. 705–722.
15. *Кунин И.А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975.
16. *Miller D.W., von Flotow A.* A travelling wave approach to power flow in structural networks // Journal of Sound and Vibration. 1989. V. 128. № 1. P. 145–162.

17. *Bobrovnitskii Yu.I.* On the energy flow in evanescent waves // Journal of Sound and Vibration. 1992. V. 152. № 2. P. 175–176.

18. *Бобровницкий Ю.И.* Физический смысл теоремы взаимности Максвелла-Бетти // Акуст. журн. 1995. Т. 42. Вып. 2. С. 267–268.

19. *Краснушкин П.Е., Федоров Е.Н.* О кратности волновых чисел нормальных волн в слоистых средах // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17. № 6. С. 1129–1140.

20. *Бобровницкий Ю.И.* Дисперсия изгибных нормальных волн в тонкой полосе // Акуст. журн. 1977. Т. 23. Вып. 1. С. 34–40.

Reciprocity in the Wave Reflection and Transmission Problem. Part 1: Symmetry of the Matrices of Reflection Coefficients

Yu. I. Bobrovnitskii

Institute of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, Malyi Khariton'evskii per. 4, Moscow, 101990 Russia

e-mail: bobrovni@orc.ru

Abstract—The reciprocity theorem is used to derive a general symmetry relationship for the matrices of reflection coefficients in homogeneous media and one-dimensional waveguides. This relationship is shown to be equivalent to the normalization of the amplitudes by the cross power flux of the forward and backward waves. The relationship is valid for both propagating and evanescent waves, and all the symmetry relationships known from the literature represent its particular cases.