АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 1, с. 51–58

УДК 534.26:537.874.6

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА РАССЕИВАТЕЛЯХ, ИМЕЮЩИХ ИЗЛОМЫ ГРАНИЦЫ

© 2003 г. До Дык Тханг, А. Г. Кюркчан

Московский технический университет связи и информатики
111024 Москва, ул. Авиамоторная 8а
E-mail: kyurkchan@mtuci2.ru

Поступила в редакцию 22.8.2001 г.

В статье метод диаграммных уравнений распространен на решение задач рассеяния волн телами с кусочно-гладкой границей. Основу метода составляет сведение исходной краевой задачи к интегро-операторному уравнению второго рода относительно диаграммы рассеяния тела. С использованием разложения диаграммы рассеяния в ряд по угловым сферическим гармоникам задача в итоге сводится к решению бесконечной алгебраической системы относительно коэффициентов разложения диаграммы рассеяния. Указаны условия, при которых эта система может быть решена методом редукции. Рассмотрены примеры решения задач рассеяния волн телами с импедансной границей. Проиллюстрированы существенные преимущества метода по сравнению с известными.

Трехмерная задача рассеяния волн ограниченным телом относится к категории классических задач теории дифракции [1, 2]. Ее решение в резонансной области частот, когда размер тела порядка длины волны падающего поля, сопряжено с серьезными вычислительными трудностями [3]. Если граница рассеивателя имеет изломы, то подобные трудности еще более возрастают. Например, широко распространенный и с вычислительной точки зрения весьма удобный метод вспомогательных (или дискретных) источников [4], строго говоря, вообще не применим к подобным задачам, т.к. в соответствии с теоремой существования [5] носитель вспомогательных токов должен охватывать особенности дифракционного поля, а они в рассматриваемой ситуации будут, в том числе, и на границе рассеивателя. Ясно, что закругление изломов в принципе дела не меняет.

При решении задач рассеяния волн таким универсальным методом, как метод интегральных уравнений относительно поля на поверхности тела [6], соответствующие алгебраические системы даже в двумерном случае имеют порядок ~10–20 kd, где d – характерный размер тела [6]. В трехмерном же случае размер системы будет, очевидно, пропорционален квадрату указанной величины, причем наличие изломов границы безусловно приводит, по крайней мере, к усложнению алгоритма.

Метод диаграммных уравнений (МДУ), предложенный в [7, 8], обладает существенно большей скоростью сходимости, слабо зависящей от геометрии рассеивателя. Так, при решении этим методом задачи рассеяния волн сплюснутым сфероидом [9] было установлено, что даже при соотношении осей сфероида 40:1 скорость сходимости вычислительного алгоритма была близкой к той, которая имеет место при решении задачи о рассеянии волн сферой такого же диаметра. Причина подобного явления, по нашему мнению, заключается в том, что при решении задач рассеяния волн при помощи МДУ искомой величиной является непосредственно диаграмма рассеяния, т.е. некий (стационарный) функционал от распределения поля по поверхности рассеивателя. В результате быстропеременные составляющие поля, аппроксимация которых требует привлечения "гармоник" высоких номеров, сглаживаются в результате интегрирования, что и приводит в итоге к значительному снижению необходимого объема вычислений при фиксированной точности.

В настоящей работе предложенный в [8] подход обобщен на случай импедансных краевых условий. Кроме того, показано, что метод остается высокоэффективным и в случае, когда граница рассеивателя имеет изломы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Итак, рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\Delta u^1 + k^2 u^1 = 0, \tag{1}$$

$$u|_S = \frac{W}{k}\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S, \tag{2}$$

где u^1 – потенциал скорости рассеянного звукового поля, $u = u^0 + u^1$ – потенциал скорости полного, а u^0 – первичного или падающего поля, $k = \frac{\omega}{c}$, $W = \frac{Z}{ic\rho}$, причем c – скорость звука, ρ – плотность

среды, Z – локальный акустический импеданс, постоянный на S – границе рассеивателя, $\frac{\partial}{\partial n}$ – дифференцирование в направлении внешней к S нормали.

Кроме (1), (2) функция u^1 должна также удовлетворять условию излучения [2]

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^1}{\partial r} + iku^1\right) = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем для краткости функцию u^1 будем называть просто волновым или дифракционным полем.

В соответствии с (3) в так называемой волновой зоне (т.е. в области $r \gg d$) имеет место следующее асимптотическое равенство

$$u^1(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{-ikr}}{kr} g(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{(kr)^2}\right), \tag{4}$$

в котором $g(\theta, \varphi)$ – диаграмма рассеяния. С учетом краевого условия (2) для функции g может быть получено следующее представление в сферической системе координат:

$$g(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v(\theta, \varphi)\left\{1 - i\frac{W}{\chi}[R(\theta, \varphi)\cos\gamma\sin\theta - \right.$$

$$- R'_\theta(\theta, \varphi)\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\theta}\sin\theta - \tag{5}$$

$$\left. - R'_\varphi(\theta, \varphi)\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\right]\right\}\exp[ikR(\theta, \varphi)\cos\gamma]d\theta d\varphi,$$

где

$$v(\theta, \varphi) = -\frac{k}{4\pi}\chi R(\theta, \varphi)\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{k}{4\pi}\left[R^2(\theta, \varphi)\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \right.$$

$$\left. - R'_\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\sin\theta - \frac{R'_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right]\Bigg|_{r = R(\theta, \varphi)},$$

$$\chi = \sqrt{[R^2(\theta, \varphi) + R'^2_\theta(\theta, \varphi)]\sin^2\theta + R'^2_\varphi(\theta, \varphi)}, \tag{6}$$

$$dS = \chi R d\theta d\varphi,$$

$$\cos\gamma = [\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi - \beta) + \cos\theta\cos\alpha],$$

$r = R(\theta, \varphi)$ – уравнение поверхности S.

Для волнового поля имеет место следующее представление [10]:

$$u^1(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\int_{0}^{\pi/2 + i\infty} \exp(-ikr\cos\alpha)\times \tag{7}$$

$$\times\hat{g}(\alpha, \beta; \theta, \varphi)\sin\alpha d\alpha d\beta,$$

в котором $\hat{g}(\alpha, \beta; \theta, \varphi)$ определяется соотношением:

$$\hat{g}(\alpha, \beta; \theta, \varphi) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v(\theta', \varphi')\left\{1 - i\frac{W}{\chi}[R(\theta', \varphi')\cos\hat{\gamma}\sin\theta' - \right.$$

$$\left. - R'_{\theta'}(\theta', \varphi')\frac{\partial\cos\hat{\gamma}}{\partial\theta'}\sin\theta' - R'_{\varphi'}(\theta', \varphi')\frac{\partial\cos\hat{\gamma}}{\partial\varphi'}\frac{1}{\sin\theta'}\right]\right\}\times \tag{8}$$

$$\times\exp[ikR(\theta', \varphi')\cos\hat{\gamma}]d\theta' d\varphi',$$

причем

$$\cos\hat{\gamma} = \{\sin\theta'\sin(\varphi' - \varphi)\sin\alpha\cos\beta +$$

$$+ [\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'\cos(\varphi' - \varphi)]\sin\alpha\sin\beta +$$

$$+ [\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi' - \varphi)]\cos\alpha\} = \vec{p}^T A\vec{i}_{r'},$$

где

$$\vec{p}^T = (\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\alpha), \quad \vec{i}_{r'} = \vec{r}'/|\vec{r}'|,$$

$$A = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} -$$

матрица поворота системы координат, в результате которого ось z совмещается с направлением в точку наблюдения.

Представление (7) позволяет найти функцию u^1 всюду в $R^3\setminus\bar{E}$, где $\bar{E}$ – выпуклая оболочка особенностей волнового поля $u^1(r, \theta, \varphi)$. С использованием соотношений (5)–(7) по аналогии с [8] для диаграммы рассеяния может быть получено следующее интегрооператорное уравнение второго рода

$$g(\alpha, \beta) = g^0(\alpha, \beta) +$$

$$+ \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2 + i\infty}\left\{1 - i\frac{W}{\chi}\left[R(\theta, \varphi)\cos\gamma\sin\theta - \right.\right.$$

$$\left.\left. - R'_\theta\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\theta}\sin\theta - \frac{R'_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\varphi}\right]\right\}\times \tag{9}$$

$$\times\left[ik^2R^2(\theta, \varphi)\cos\alpha'\hat{g}(\alpha', \beta'; \theta, \varphi)\sin\theta + \right.$$

$$\left. + \hat{g}'_\theta(\alpha', \beta'; \theta, \varphi)kR'_\theta\sin\theta + \hat{g}'_\varphi(\alpha', \beta'; \theta, \varphi)\frac{kR'_\varphi}{\sin\theta}\right]\times$$

$$\times\exp[ikR(\theta, \varphi)(\cos\gamma - \cos\alpha')]\sin\alpha' d\alpha' d\beta' d\theta d\varphi.$$

В этом уравнении $g^0(\alpha, \beta)$ – известная функция, определяемая соотношением (5), в котором функция $v(\theta, \varphi)$ должна быть заменена на

$$v^0(\theta, \varphi) = -\frac{k}{4\pi}\chi R(\theta, \varphi)\frac{\partial u^0}{\partial n}.$$

Уравнение (8) разрешимо при условии, что

$$\overline{E} \subseteq \overline{D},$$

где $\overline{D}$ – область, занимаемая рассеивателем, вместе с границей.

В частном случае, когда рассеиватель представляет собой шар (т.е. $R(\theta, \varphi) = a \equiv \text{const}$), уравнение (9) принимает следующий вид:

$$g(\alpha, \beta) = g^0(\alpha, \beta) + \\ + \frac{(ka)^2}{2(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2+i\infty}(1 - iW\cos\gamma)\cos\alpha' \times \\ \times \exp[ika(\cos\gamma - \cos\psi)] \times \\ \times \hat{g}(\alpha', \beta'; \theta, \varphi)\sin\alpha' d\alpha' d\beta' \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (10)$$

Уравнение (10) может быть решено, в частности, методом итераций. После проведения несложных, но громоздких вычислений получим

$$g(\alpha, \beta) = \\ = -i\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{j_n(ka) - Wj_n'(ka)}{h_n^{(2)}(ka) - Wh_n^{(2)\prime}(ka)}P_n(\cos\alpha). \quad (11)$$

Выражение (11) совпадает с известным решением для импедансной сферы. Ряд (11) является абсолютно сходящимся для всех значений параметра ka, поэтому его можно использовать и для построения асимптотических (при $ka \gg 1$) решений [7].

В общем случае несферических рассеивателей уравнение (9) также можно решать методом итераций, однако при этом решение не удается записать в замкнутой аналитической форме. Рассмотрим поэтому иной способ решения уравнения (9) – сведение его к системе алгебраических уравнений. Для этого воспользуемся разложением диаграммы в обобщенный ряд Фурье:

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}. \quad (12)$$

Из (8) имеем

$$\hat{g}(\alpha, \beta; \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\hat{a}_{nm}(\theta, \varphi)P_n^m(\cos\alpha)e^{im\beta}, \quad (13)$$

где

$$\hat{a}_{nm}(\theta, \varphi) = \\ = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\sum_{s=-n}^{n}\sqrt{\frac{(n+s)!}{(n-s)!}}a_{ns}i^s P_{ms}^n(\cos\theta)e^{is\varphi},$$

$P_{ms}^n(\cos\theta)$ – обобщенные функции Лежандра [10].

После подстановки (12) и (13) в (9) для коэффициентов a_{nm} получим с использованием соотношения [11]

$$P_{0s}^n(z) = (-i)^s\sqrt{\frac{(n-s)!}{(n+s)!}}P_n^s(z)$$

следующую систему алгебраических уравнений:

$$a_{nm} = a_{nm}^0 + \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}G_{nm,\nu\mu}a_{\nu\mu}, \quad (14)$$
$$|m| \le n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

в которой

$$G_{nm,\nu\mu} = i^{n-\nu}(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{i}{4\pi} \times \\ \times \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[k^2R^2(\theta, \varphi)h_\nu^{(2)\prime}(kR)P_\nu^\mu(\cos\theta)\sin\theta - \\ - h_\nu^{(2)}(kR)(\sin\theta)kR_\theta' P_\nu^\mu(\cos\theta) - \\ - i\mu\frac{kR_\varphi'}{\sin\theta}h_\nu^{(2)}(kR)P_\nu^\mu(\cos\theta)\Big]\Big\{j_n(kR)P_n^m(\cos\theta) - \\ - \frac{iW}{\chi(\theta, \varphi)}\Big[-iR(\theta, \varphi)(\sin\theta)j_n'(kR)P_n^m(\cos\theta) + \\ + \frac{iR_\theta'}{kR}j_n(kR)(\sin\theta)\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta) + \\ + \frac{mR_\varphi'}{kR\sin\theta}j_n(kR)P_n^m(\cos\theta)\Big]\Big\}e^{i(\mu-m)\varphi}d\theta d\varphi. \quad (15)$$

Свободные члены a_{nm}^0 есть коэффициенты разложения известной функции $g^0(\alpha, \beta)$:

$$a_{nm}^0 = i^n(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\ \times \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}v^0(\theta, \varphi)j_n(kR)P_n^m(\cos\theta)e^{-im\varphi}d\theta d\varphi.$$

Важным преимуществом системы (14) является то обстоятельство, что ее матричные элементы, как это видно из (15), выражаются инте-

гралами вдвое меньшей кратности, чем в таких широко используемых методах, как метод интегральных уравнений относительно поля на поверхности тела, метод моментов и др. Кроме того, как мы увидим ниже, решение системы (14) методом редукции характеризуется весьма высокой скоростью сходимости, слабо зависящей от геометрии рассеивателя.

В случае $W = 0$ (акустически мягкое тело) или $W = \infty$ (акустически жесткое тело) исходная краевая задача становится задачей Дирихле или Неймана соответственно. В обоих случаях алгебарическая система сохраняет тот же вид (14), причем можно показать, что имеют место следующие соотношения:

$$G^D_{nm,\,\nu\mu} + G^N_{nm,\,\nu\mu} = \delta_{\nu n}\delta_{\mu m}, \qquad a^{0D}_{nm} + a^{0N}_{nm} = 0. \tag{16}$$

Обозначения очевидны. Полученная связь между элементами алгебраических систем краевых задач Дирихле и Неймана весьма удобна с вычислительной точки зрения. Если рассеиватель представляет собой тело вращения, т.е. $R(\theta, \varphi) = R(\theta)$, то алгебраическая система (14) принимает следующий вид:

$$a_{nm} = a^0_{nm} + \sum_{\nu = |m|}^{\infty} G_{nm,\,\nu m} a_{\nu m}, \qquad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n; \quad n = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

В этой системе

$$G_{nm,\,\nu m} = i^{n-\nu}(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{i}{2}\int_0^{\pi}\Bigg\{ j_n(kR)P_n^m(\cos\theta) - \frac{W}{\chi(\theta)}\Big[R(\theta)j_n'(kR)P_n^m(\cos\theta) - \frac{R_\theta'}{kR(\theta)}j_n(kR)\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)\Big]\sin\theta\Bigg\}\times \Big[k^2R^2(\theta)h_\nu^{(2)'}(kR)P_\nu^m(\cos\theta) - kR_\theta' h_\nu^{(2)}(kR)\frac{d}{d\theta}P_\nu^m(\cos\theta)\Big](\sin\theta)d\theta. \tag{18}$$

Действуя по аналогии с [8], можно показать, что при $n \gg \nu$

$$|G_{nm,\,\nu m}| \le \mathrm{const}\frac{\sigma_1^n}{n\cdot n!}, \tag{19}$$

где

$$\sigma_1 = \max_{\theta_0,\,\varphi_0,\,s}\left|\frac{kR(\theta_0, \varphi_0)}{2}e^{is\theta_0}\right|, \tag{20}$$

причем θ_0, φ_0 – корни уравнений

$$[R_\theta'(\theta, \varphi) + isR(\theta, \varphi)]e^{is\theta} = 0; \qquad s = \pm 1; \quad R_\varphi'(\theta, \varphi) = 0. \tag{21}$$

Максимум в (20) ищется среди корней системы (21), которые при замене $\varsigma = R(\theta, \varphi)e^{i\theta}$ оказываются внутри контуров C_φ, являющихся отображением сечения поверхности S плоскостью $(\varphi, \varphi + \pi)$ на плоскость $z = re^{i\alpha}$. Если поверхность S имеет неаналитические (по θ, φ) точки, то максимум в (20) следует искать также и среди этих точек [12].

Точно так же при $\nu \gg n$ можно установить, что

$$|G_{nm,\,\nu\mu}| \le \mathrm{const}\frac{\nu!}{\sigma_2^\nu},$$

причем

$$\sigma_2 = \min_{\theta_0,\,\varphi_0,\,s}\left|\frac{kR(\theta_0, \varphi_0)}{2}e^{is\theta_0}\right|, \tag{22}$$

а минимум в этом соотношении ищется среди тех корней системы (21), которым при замене $\varsigma = Re^{i\theta}$ соответствуют точки, лежащие вне описанных выше контуров C_φ на плоскости $z = re^{i\alpha}$.

Аналогично можно показать, что при $n \gg 1$

$$\left|a^0_{nm}\right| \le \mathrm{const}\frac{\sigma^n}{n\cdot n!}, \quad \sigma = \max(\sigma_1, \sigma_0), \tag{23}$$

причем $\sigma_0 = \dfrac{kr_0}{2}$, а r_0 – расстояние до наиболее удаленной от начала координат точки внутри S, соответствующей особенности функции $v^0(\theta, \varphi)$ при ее аналитическом продолжении в область комплексных углов [12]. Отметим, что если u^0 – поле плоской волны, то $\sigma_0 = 0$.

Из полученных оценок следует, что в системе (14) необходимо выполнить замену неизвестных коэффициентов [8], положив

$$a_{nm} = \frac{\sigma^n}{n!}x_{nm}. \tag{24}$$

В результате указанной замены система (14) преобразуется к виду

$$x_{nm} = x^0_{nm} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu} g_{nm,\,\nu\mu}x_{\nu\mu}, \qquad |m| \le n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{25}$$

где

$$x^0_{nm} = \frac{n!}{\sigma^n}a_{nm}, \quad g_{nm,\,\nu\mu} = \frac{n!}{\nu!}\sigma^{\nu-n}G_{nm,\,\nu\mu}.$$

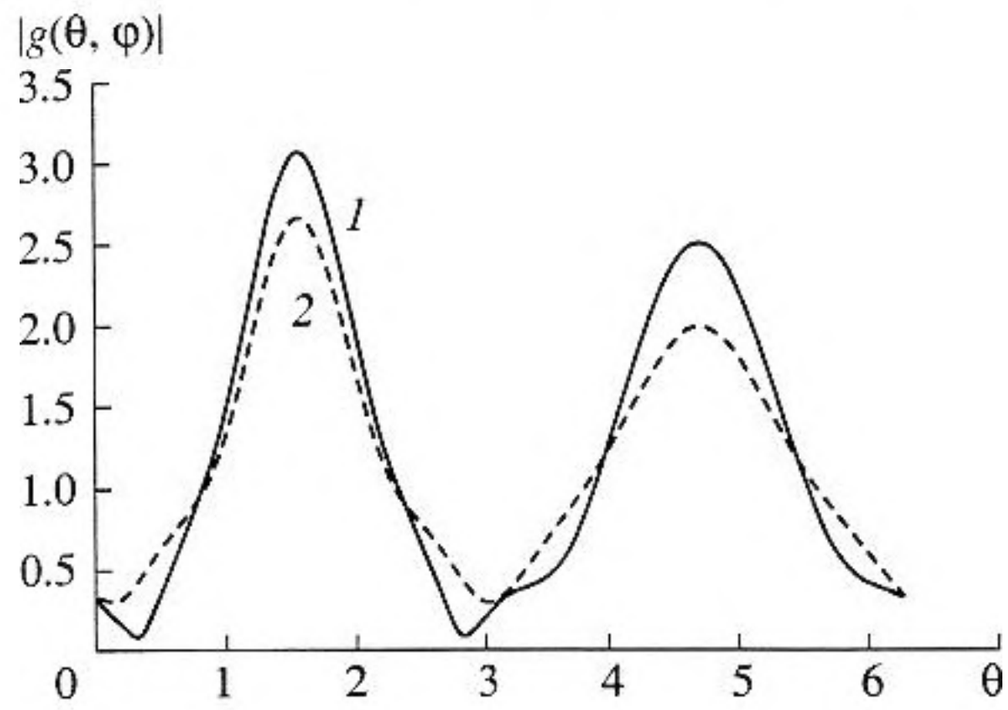

Рис. 1.

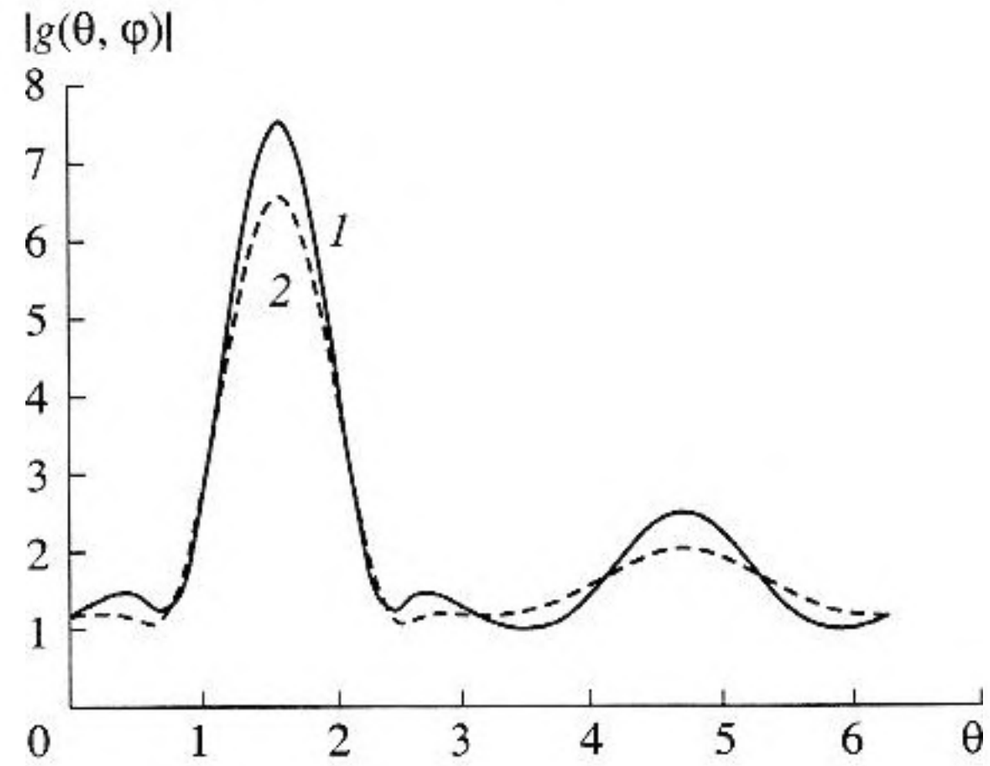

Рис. 2.

Система (25) разрешима методом редукции при выполнении условия

$$\sigma_2 > \sigma. \tag{26}$$

Рассеяние волн телами, не удовлетворяющими условию (26), в частности, существенно невыпуклыми телами, может быть смоделировано при помощи группы тел более простой геометрии, конфигурация которой повторяет геометрию исходного рассеивателя [13, 14], т.к. скорость сходимости вычислительного алгоритма МДУ для группы тел практически не зависит от расстояний между телами вплоть до их соприкосновения [14].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Были выполнены численные исследования задач рассеяния волн осесимметричными телами: вытянутым сфероидом с большой полуосью c (вдоль оси z) и малой a, круговым цилиндром радиусом a со сферическими закруглениями, высотой цилиндрической части h и радиусами сферических закруглений, равными радиусу цилиндра, а также круговым конусом со сферическим основанием радиуса a, равного радиусу конуса и высотой конической части h. Расчеты были выполнены для трех значений импеданса: $W = 0$, $W = 1000$, $W = -i$. Последнее из приведенных значений – это случай так называемого "согласованного импеданса" [6].

Рассматривался случай падения единичной плоской волны под углами $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$ для всех рассматриваемых тел, кроме конуса, для которого направление падения волны характеризовалось углами $\theta_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Рассчитывалась диаграмма рассеяния в зависимости от угла θ в плоскости $\varphi = 0, \pi$.

Все расчеты были проведены на основе решения конечной системы вида

$$x_{nm} = x_{nm}^0 + \sum_{\nu = |\mu|}^{N} g_{nm,\nu m} x_{\nu m},$$

$$|m| \le n, \quad n = 0, 1, \ldots, N,$$

(получаемой из общей системы (25) в случае тела вращения), в которой во всех расчетах (кроме таблицы) N было взято равным 15, т.е. $N \approx 2kd$.

На рис. 1–3 изображены диаграммы рассеяния круговым цилиндром высотой $kh = 4$ (кривые *1*) и "вписанного" в него вытянутого сфероида с полуосями $ka = 2$, $kc = 4$ (кривые *2*). При этом рис. 1 соответствует значению импеданса $W = 1000$, рис. 2 – $W = 0$, рис. 3 – $W = -i$. Видно, что наиболее сильно диаграммы разнятся в случае акустически жесткого рассеивателя. В диаграммах рассеяния главным является теневой лепесток, ширина которого находится в соответствии с геометрооптическими оценками. Однако у акустически жесткого рассеивателя уровень обратного лепестка уже достаточно близок к уровню теневого. У рассеивателя с согласованным импедансом теневой лепесток заметно (примерно на 30 дБ) больше обратного, в то время, как у акустически мягкого – лишь примерно на 10 дБ. Это согласуется с интуитивными представлениями об "идеально поглощающем" рассеивателе.

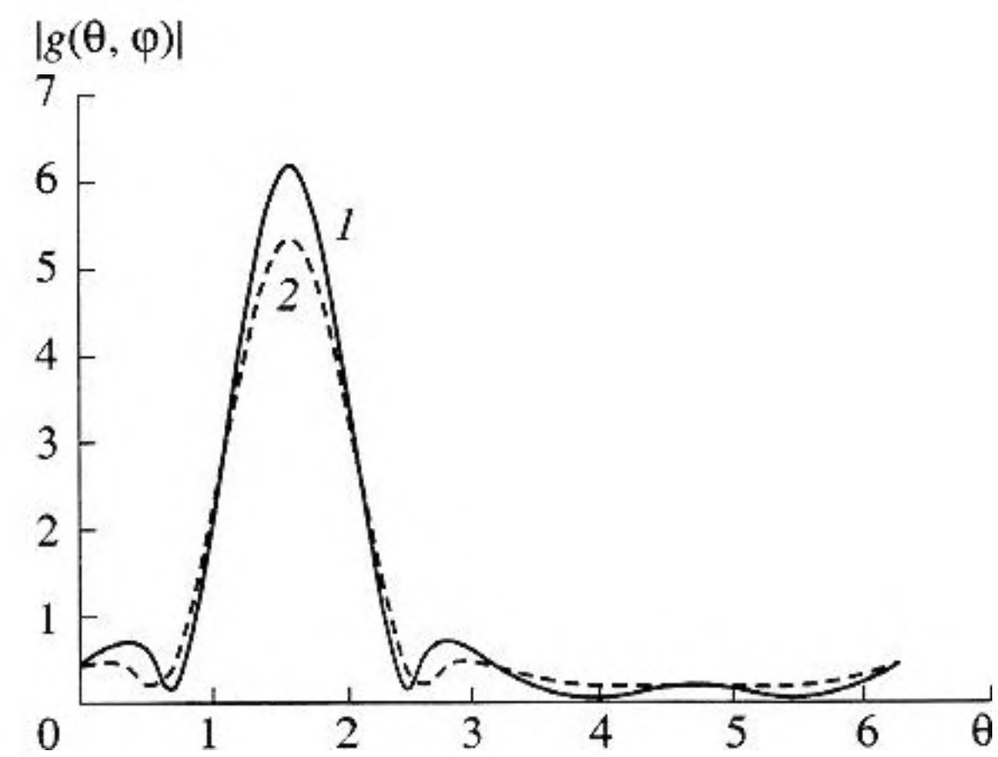

Рис. 3.

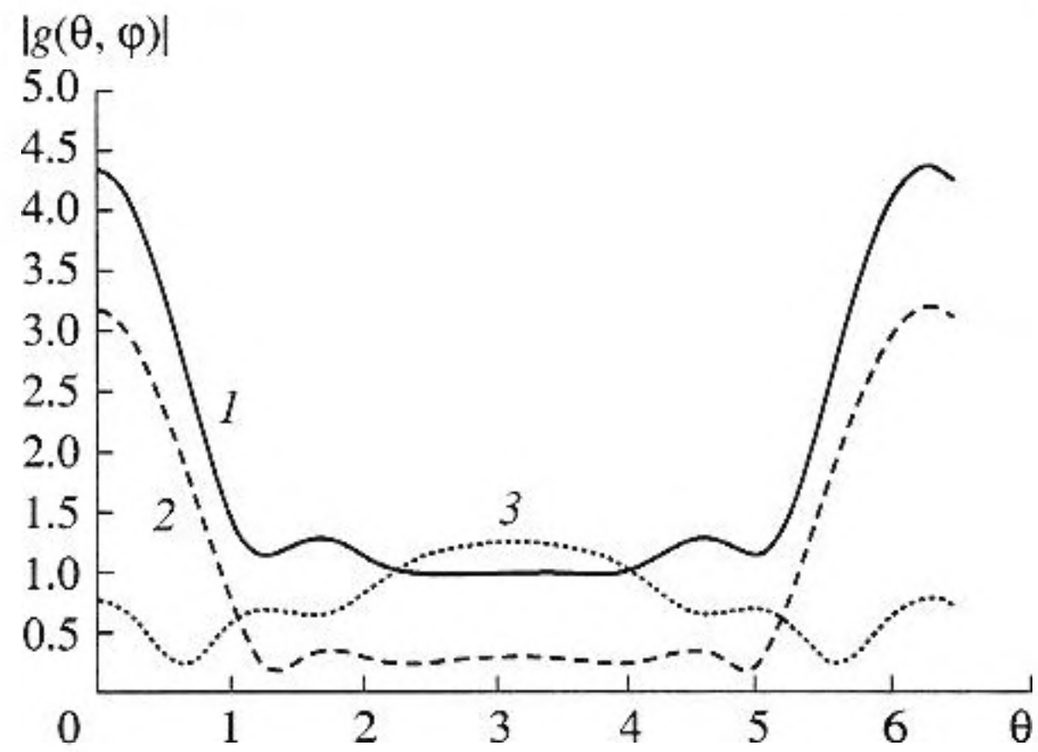

Рис. 4.

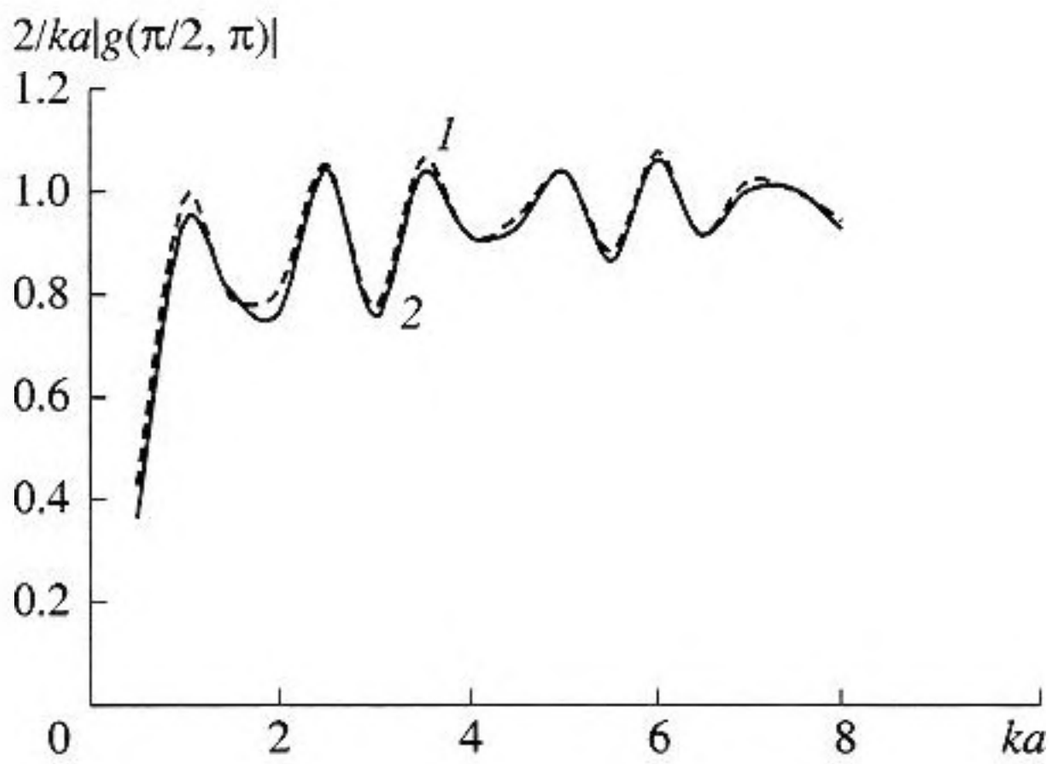

Рис. 5.

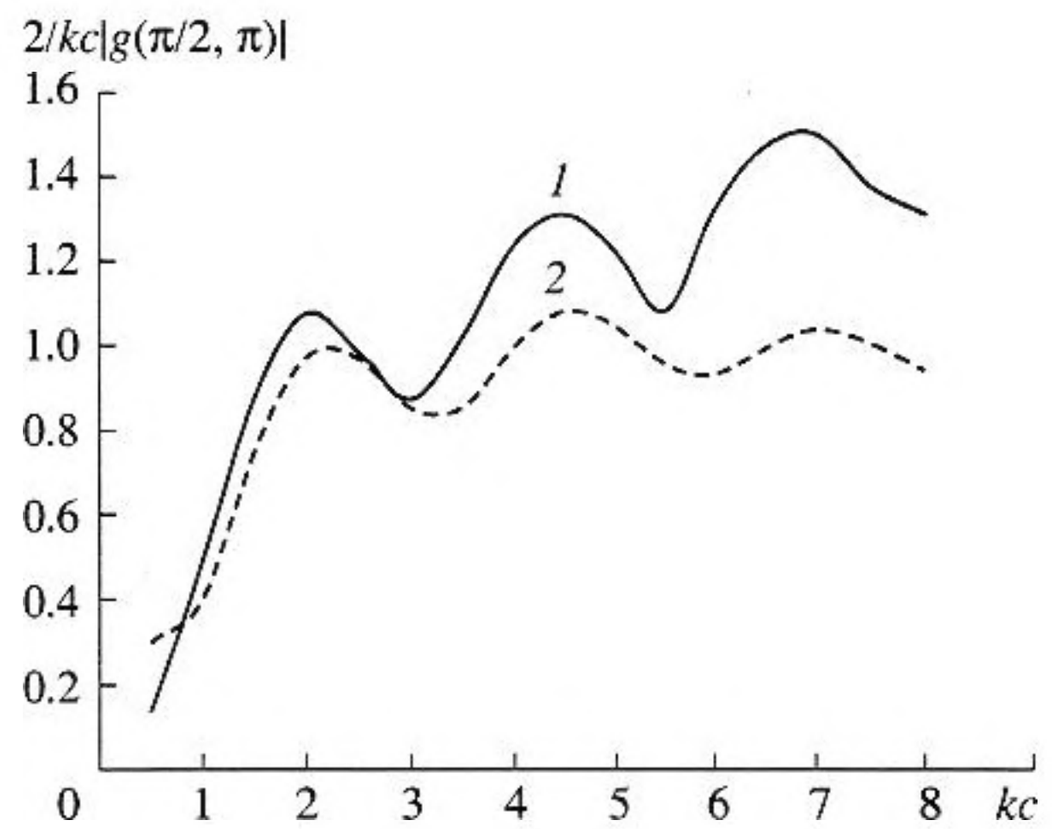

Рис. 6.

На рис. 4 приведены диаграммы рассеяния конуса, характеризуемого следующими значениями геометрических параметров: $ka = 2$, $kh = 6$, для различных значений поверхностного импеданса – кривая *1* соответствует $W = 0$, кривая *2* – $W = -i$, кривая *3* – $W = 1000$. Здесь также у конуса с согласованным импедансом обратный лепесток примерно на 20 дБ меньше теневого. Видно, что диаграмма рассеяния близка к постоянной на довольно большом участке (порядка 90°), соответствующем рассеянию от сферической части тела.

Рис. 5 иллюстрирует результаты расчета параметра $\frac{2}{ka}|g(\pi/2, \pi)|$ – относительного радиуса так называемой эквивалентной сферы [6], характеризующего поперечник обратного рассеяния тела, в зависимости от ka для сферы (кривая 2) и цилиндра высотой $kh = 0.1$, т.е. мало отличающегося от сферы, для значения импеданса $W = 1000$. Видно, что различие между обеими кривыми незначительно (менее 2%).

На рис. 6 приведены результаты аналогичных расчетов величины $\frac{2}{kc}|g(\pi/2, \pi)|$ как функции kc для цилиндра (кривая *1*) и сфероида (кривая *2*) с теми же геометрическими параметрами, что и на рис. 1–3, при $W = 1000$. Здесь параметр c характеризует половину длины тела. Видно, что обе кривые изменяются синхронно, однако кривая для цилиндра здесь заметно выше, что соответствует рис. 1 и объясняется наличием у цилиндра значительного участка поверхности с прямолинейной образующей, нормального к падающей волне.

Наконец, в таблице приведены данные, характеризующие скорость сходимости вычислительного алгоритма для цилиндра, сфероида и конуса. Видно, что у тела с аналитической границей (сфероида) два верных знака после запятой устанавливаются уже при $N \approx kd$. Примерно такая же скорость сходимости имеет место при решении задачи дифракции волн на сфероиде методом разделения переменных с использованием разложения по сфероидальным функциям [15]. Для тел с изломами границы (цилиндр, конус) при расчетах необходимо брать $N \approx 2kd$, что также в несколько раз (а то и на порядки) лучше аналогичных показателей для традиционных методов.

Приведенные численные результаты дают основание сделать вывод о том, что метод диаграммных уравнений позволяет с весьма высокой эффективностью решать задачи дифракции волн на импедансных телах сложной геометрии, в том числе имеющих ребра и конические точки. Вычислительный алгоритм, построенный на основе МДУ, оказывается в высшей степени быстродействующим. При этом расчеты характеристик рассеяния гладких тел и тел, имеющих особенности (ребра и т.п.), осуществляются в рамках одного и того же алгоритма без принятия каких-либо специальных мер.

Таблица

	N	9	11	13	15	17
Цилиндр ($ka = 2$, $kh = 4$)						
$w = 0$	g(π/2, 0)	7.5025E+00	7.5172E+00	7.5229E+00	7.5200E+00	7.4486E+00
$w = 0$	g(π/2, π)	2.5663E+00	2.5169E+00	2.4979E+00	2.5026E+00	2.5027E+00
$w = 1000$	g(π/2, 0)	3.044E+00	3.0743E+00	3.0838E+00	3.0653E+00	3.0644E+00
$w = 1000$	g(π/2, π)	2.4335+00	2.4788E+00	2.5108E+00	2.5070E+00	2.5066E+00
Сфероид ($ka = 2$, $kc = 4$)						
$w = 0$	g(π/2, 0)	6.5647E+00	6.5649E+00	6.5649E+00	6.5659E+00	6.5653E+00
$w = 0$	g(π/2, π)	2.0405E+00	2.0404E+00	2.0404E+00	2.0413E+00	2.0416E+00
$w = 1000$	g(π/2, 0)	2.6626E+00	2.6615E+00	2.6615E+00	2.6615E+00	2.6615E+00
$w = 1000$	g(π/2, π)	1.9921E+00	1.9919E+00	1.9919E+00	1.9919E+00	1.9918E+00
Сфероид ($ka = 1.005$, $kc = 5.1$)						
$w = 0$	g(π/2, 0)	5.7223E–01	5.7231E–01	5.7005E–01	5.7006E–01	5.7005E–01
$w = 0$	g(π/2, π)	5.7178E–01	5.7186E–01	5.6960E–01	5.6962E–01	5.6961E–01
$w = 1000$	g(π/2, 0)	1.2399E–01	1.2408E–01	1.2368E–01	1.2369E–01	1.2367E–01
$w = 1000$	g(π/2, π)	1.2539E–01	1.2564E–01	1.2524E–01	1.2523E–01	1.2525E–01
Конус ($ka = 2$, $kh = 6$)						
$w = 0$	g(π/2, 0)	6.3459E–01	6.1876E–01	6.0257E–01	6.0523E–01	6.0350E–01
$w = 0$	g(π/2, π)	6.5045E–01	6.9022E–01	6.7486E–01	6.7215E–01	6.7252E–01
$w = 1000$	g(π/2, 0)	9.6439E–01	9.4209E–01	9.2592E–01	9.1410E–01	9.2467E–01
$w = 1000$	g(π/2, π)	7.4507E–01	7.5850E–01	7.6272E–01	7.6862E–01	7.6735E–01

Уже после отправки рукописи статьи в редакцию нам стало известно о существовании работы [16], в которой краевая задача дифракции волн на ограниченном рассеивателе сведена к алгебраической системе вида (15). Отметим, однако, что в работе [16] соответствующая алгебраическая система получена на основе представления дифракционного поля рядом по сферическим волновым гармоникам, что, вообще говоря, корректно лишь для так называемых "рэлеевских" тел (см., например, [13], [4], глава 5). В нашем же случае система (15) строго выведена из интегрооператорного уравнения (9), разрешимого при условии (10), которое значительно менее жестко, нежели условие "рэлеевости" тела [7, 8]. Кроме того, система (15) в нашем подходе – лишь один из вариантов алгебраизации уравнения (9), обусловленный выбором угловых сферических гармоник в качестве базиса для представления диаграммы рассеяния. Ясно, что такого рода алгебраизацию можно осуществить огромным числом других корректных способов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-02-17639).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лямшев Л.М.* Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М.: Изд. АН СССР, 1956. 71 с.
2. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
3. *Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М.* Применение метода вспомогательных источников для расчета излучения ограниченных упругих тел // Акуст. журн. 1990. Т. 30. № 4. С. 591–598.
4. Generalized Multipole Techniques for Electromagnetic and Light Scattering / Ed. by Wriedt T. Amsterdam: Elsevier Sci., 1999.
5. *Кюркчан А.Г.* Представление дифракционных полей волновыми потенциалами и метод вспомогательных токов в задаче дифракции электромагнитных волн // РЭ. 1986. Т. 31. № 1. С. 20–27.
6. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989.

7. *Кюркчан А.Г.* Об одном новом интегральном уравнении в теории дифракции // Доклады АН. 1992. Т. 325. № 2. С. 273–275.
8. *Кюркчан А.Г.* Об одном методе решения задач дифракции волн на рассеивателях конечных размеров // Доклады АН. 1994. Т. 337. № 6. С. 728–731.
9. *Кюркчан А.Г., Клеев А.И.* Решение задач дифракции волн на рассеивателях конечных размеров методом диаграммных уравнений // РЭ. 1995. Т. 40. № 6. С. 897–905.
10. *Кюркчан А.Г.* Получение решений уравнений математической физики путем сведения их к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами // Доклады АН. 1992. Т. 322. № 4. С. 686–691.
11. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
12. *Кюркчан А.Г., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* Особенности продолжения волновых полей // УФН. 1996. Т. 166. № 12. С. 1285–1308.
13. *Кюркчан А.Г.* К решению задачи рассеяния волн на нескольких телах // Доклады АН. 1996. Т. 348. № 5. С. 603–606.
14. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* Wave diffraction by the group of bodies located in layered medium // Proc. of the 4th Conference on electromagn. and light scattering by nonspherical particles. Theory and applications. Sept. 20–21,1999. Vigo, Spain.
15. *Конюхова Н.Б., Пак Т.В.* Дифракция плоской звуковой волны на жестком вытянутом сфероиде. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1985.
16. *Ochmann M.* The full-field equations for acoustic radiation and scattering // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105 (5). P. 2574–2584.

Efficient Method for Solving the Problems of Wave Diffraction by Scatterers with Broken Boundaries

Do Dyk Tkhang and A. G. Kyurkchan

Moscow Technical University of Communication and Information Science,
ul. Aviamotornaya 8a, Moscow, 111024 Russia
e-mail: kyurkchan@mtuci2.ru

Abstract—The method of pattern equations is extended to solving the problems of wave scattering by bodies with piecewise smooth boundaries. The method is based on the reduction of the initial boundary-value problem to an integro-operator equation of the second kind in the scattering pattern of a body. With the use of the series expansion of the scattering pattern in angular spherical harmonics, the problem is ultimately reduced to solving an infinite algebraic system of equations in the expansion coefficients of the scattering pattern. The conditions at which this system can be solved by the method of reduction are formulated. Examples of solving the problems of wave scattering by bodies with impedance boundaries are considered. Essential advantages of the proposed method over other known methods are demonstrated.